*Chapitre*

# VII Fonctions circulaires



Dans les chapitres précédents, nous avons déjà (re)défini les fonctions dites de référence ainsi que l'exponentielle. Si ces fonctions sont importantes, il en manque et c'est le thème de ce chapitre qui aborde la trigonométrie et les fonctions dite circulaires ainsi que leur réciproque.

La définition (1) , tout en étant correcte, est insuffisante par bien des aspects. Une autre approche eût été de voir ce chapitre comme un hommage à la fonction exponentielle, complexe s'entend. Fonction exponentielle dont la définition analytique comme la somme d'une série entière normalement convergente nous échappe encore :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ainsi dotés, nous aurions pu voir :

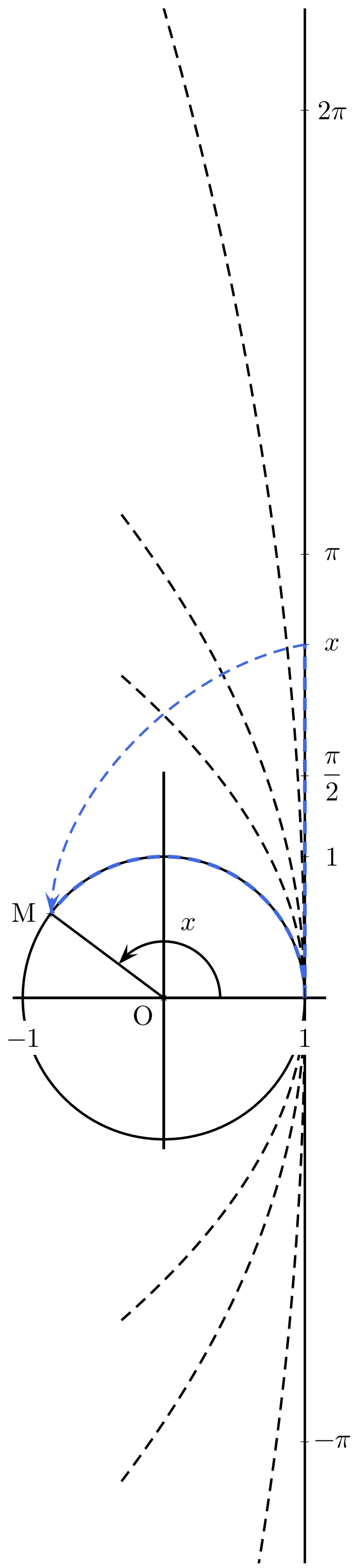
— La fonction *logarithme* comme sa bijection réciproque et …réciproquement. Déjà fait !
— Les fonctions *hyperboliques* comme ses parties paire et impaire. Aussi !
— les fonctions *circulaires* comme ses parties réelle et imaginaire. Bientôt mais pas encore !

Vous serez surpris mais ce qu'il nous fait le plus défaut est une correcte définition de $\pi$. Nous ne l'avons pas, loin s'en faut donc, nous nous appuierons désormais sur vos connaissances de lycée.

**CONTENU**

# I/ Le cercle trigonométrique

## I.1 Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique




Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel $x$ est associé un et un seul point M du cercle trigonométrique.

Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel $x_0$, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où $k$ est un entier relatif.

On dit alors que « *$x_0$ et $x_1$ sont égaux modulo $2\pi$* » et on note :

$$x_0 \equiv x_1 \ [2\pi] .$$

La relation d'égalité modulo $2\pi$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel $x$ associé à M par ce procédé est, par définition, une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des réels égaux à $x_0$ modulo $2\pi$.

On parlera plutôt de *classe d'équivalence* de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ dont $x_0$ est un *représentant*.

Lorsque $x_0 \in \left]-\pi\,;\pi\right]$, on parlera alors de *mesure principale* de l'angle.

**Exemples 1 :**

— 1 radian correspond à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 1.

— Par définition, $2\pi$ radian correspond donc à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur $2\pi$ : le périmètre du cercle !

— La mesure d'un angle orienté en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

| degrés | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | $x = \dfrac{180}{\pi} \times y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radians | 0 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $y = \dfrac{\pi}{180} \times x$ |

— $1\,\text{rad} \simeq 57,3^\circ$ et $1^\circ \simeq 0,0175\,\text{rad}$.

**Exercice 1 :** Donner la mesure qui appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ puis la mesure principale de l'angle dont une mesure vaut :

1. $-\dfrac{9\pi}{10}$
2. $\dfrac{95\pi}{7}$
3. $\dfrac{148\pi}{3}$
4. $3,15$

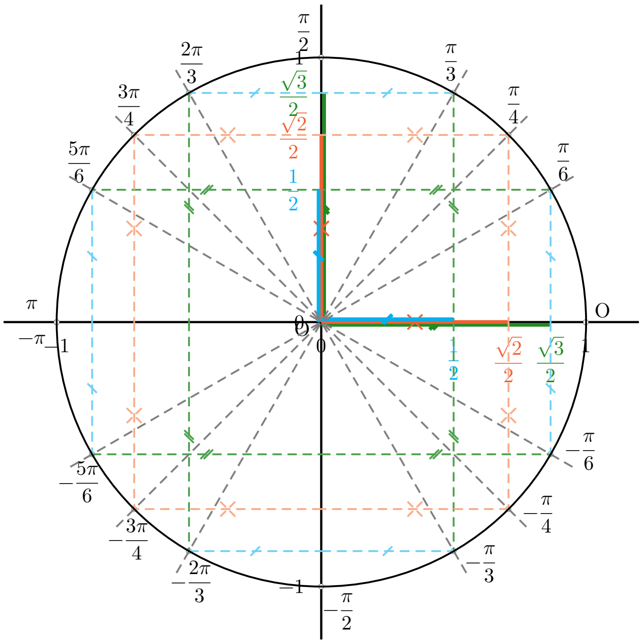



**Figure VII.1** – Angles remarquables.

### I.2 Autour du cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

**Définition 1 :** Pour tout nombre réel $x$, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ ait pour mesure $x$ radians.

- On appelle *cosinus de* $x$, noté $\cos(x)$, l'abscisse de M.
- On appelle *sinus de* $x$, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

On les appelle le cosinus et le sinus du nombre réel $x$.

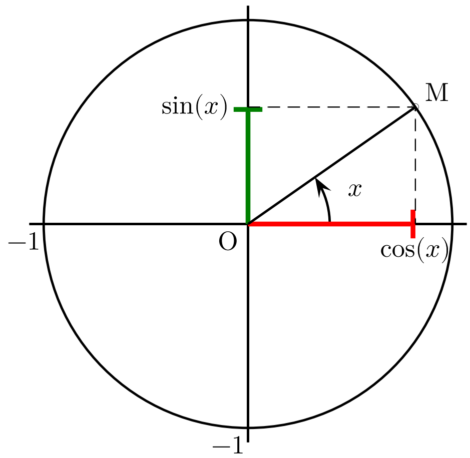



**Figure VII.2** – Pour tout nombre réel $x$, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ ait pour mesure $x$ radians.

**Un peu d'histoire :**

- *La trigonométrie (l'étude des mesures dans le triangle) existe depuis l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), et est développée en rapport avec l'astronomie.*
- *Le sinus, sous sa forme actuelle, a été introduit par les indiens aux alentours de 500 ap JC, pour l'étude des angles célestes. La première table connue date de 499, et est attribuée au mathématicien indien Aryabhata. En 628, Brahmagupta construit une approximation de la fonction sinus par interpolation.*
- *Ces notions nous sont parvenus grâce aux travaux de synthèse des mathématiciens arabes des 9$^{\text{ème}}$ et 10$^{\text{ème}}$ siècles (essentiellement basés dans les actuelles Irak, Iran et Khazakstan).*
- *Auparavant, les grecs utilisaient plutôt la mesure de la corde, ce qui est moins commode, mais assez équivalent.*
- *Le nom de « sinus » provient d'un mot sanscrit signifiant « arc », apparaissant dans l'ouvrage de Aryabhata, et transcrit phonétiquement en arabe, puis déformé en un mot proche signifiant « repli de vêtement ». Il a été traduit en latin au 12$^{\text{ème}}$ siècle par le mot « sinus » signifiant « pli ».*

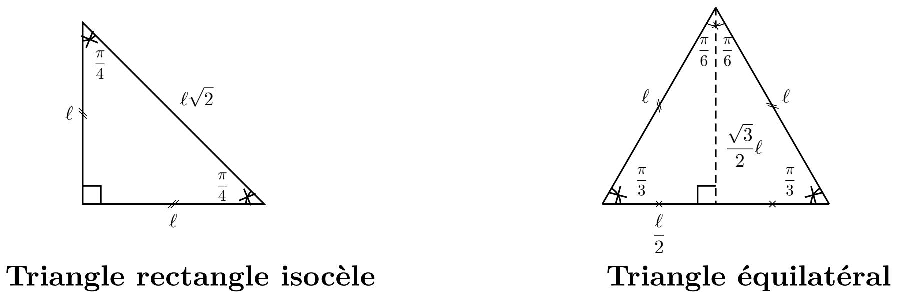



**Figure VII.3** – Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.

| Radian | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Remarque :** La ligne des sinus s'écrit $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$.

**Figure VII.4** – Cosinus et sinus d'angles remarquables.

**Exercice 2 :** Calculer :

1. $\cos(3\pi)$
2. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\frac{64\pi}{3}\right)$

De la définition découle immédiatement quelques propriétés simples à démontrer mais importantes :

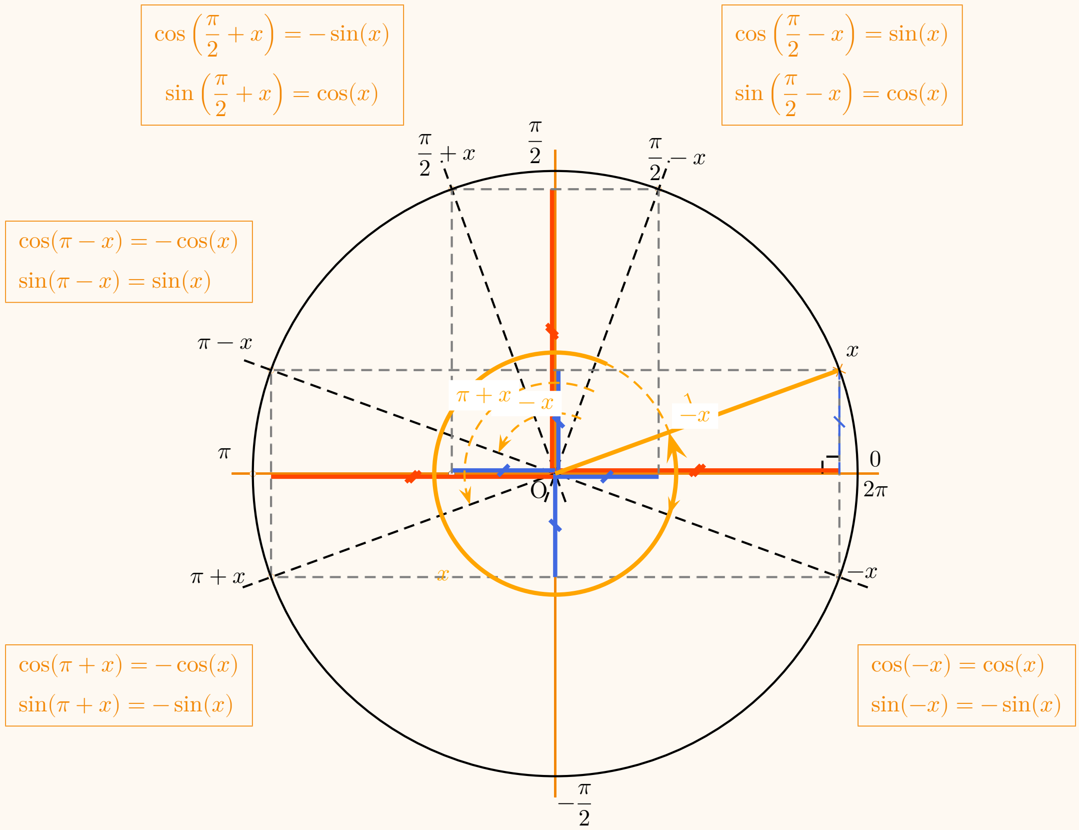
**Théorème 1 :**
Soit $x$ un réel.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \iff |\cos(x)| \leqslant 1.$

  $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff |\sin(x)| \leqslant 1.$
- Pour tout $x \in [-\pi\,;\pi]$,
  - $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$
  - $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi.$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x).$

**Exercice 3 :** À quelle condition peut-on écrire $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$ ?

**Proposition 2 (Trigonométrie et Transformations du plan) :**
Soit $x \in \mathbb{R}$.




**Corollaire 2.1 :**
Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin(x).$$

En particulier, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.

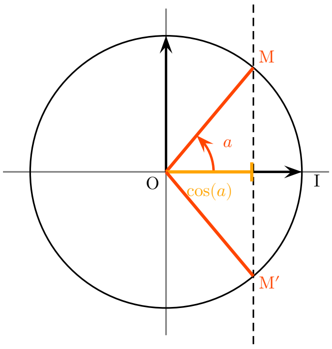
**Exercice 4 :** Simplifier $-\cos(\pi-x) + 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 2\sin(x+3\pi) + 3\sin(-x)$.

### I.3 Équations trigonométriques

**Théorème 3 (Résolution d'équations trigonométriques élémentaires) :**
Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b \ [2\pi]$$
$$\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b \ [2\pi]$$

$$\big(\cos(a) = \cos(b) \text{ et } \sin(a) = \sin(b)\big) \iff a \equiv b \ [2\pi] .$$



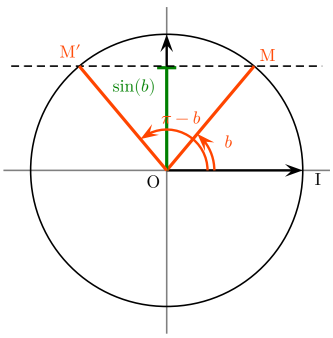




**Figure VII.5** – Équations trigonométriques.

**Exercice 5 :** Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x)$ sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3}\right]$

**Exercice 6 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) = \cos(2x)$
3. $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

## II/ Trigonométrie

Littéralement, « trigonométrie » signifie « mesure des trois angles », donc se rapporte aux propriétés des angles d'un triangle. On fait donc ainsi référence aux interprétations géométriques usuelles des fonctions trigonométriques.

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OM}}.$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}.$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OH}}.$$

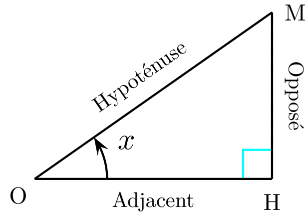
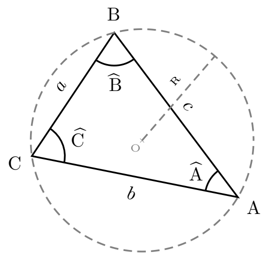



**Figure VII.6** – Trigonométrie dans un triangle.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{C}}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{\mathrm{B}}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}.$$




$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \frac{1}{2\mathrm{R}} = \frac{2\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}}{abc}.$$

Avec $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, on a $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

**Figure VII.7** – Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.

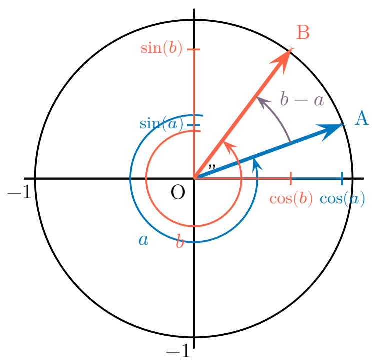
## II.1 Formules de duplication

**Proposition 4 (Formule d'addition) :**
Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

**Preuve :** soit $a$ et $b$ deux réels quelconques.

Dans un repère orthonormé orienté positivement, on considère deux points $\mathrm{A}(\cos(a)\,;\sin(a))$ $\mathrm{B}(\cos(b)\,;\sin(b))$ du cercle trigonométrique.



Il suffit de calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de deux manières :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$$
$$\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

La proposition (2) permet d'écrire :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Les autres relations s'en déduisent en transposant $b$ par $-b$ puis $a+b$ par $\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \pm b$.

**Remarque :** On verra une autre démonstration au prochain chapitre.

En prenant $a = b$ dans les expressions de la proposition (4) , on obtient aussi :

**Proposition 5 (Formule de duplication) :**
Pour tout réel $a$, on a :

— $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

— $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$= 2\cos^2(a) - 1$
$= 1 - 2\sin^2(a)$.

**Exercice 7 :** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

## II.2 Formules de linéarisation

La deuxième assertions de la proposition (5) permet d'obtenir une première linéarisation pour les expressions de degré 2 :

**Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) :**
Soit $a \in \mathbb{R}$ :

— $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

— $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

En retournant les formules de la proposition (4) , on obtient des formules de développement de produit du premier ordre :

**Proposition 7 :**
Soient $a$ et $b$ deux réels :

— $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$.

— $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.

— $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k(x)\sin^l(x)$ où $k$ et $l$ sont supérieurs à 2, on utilise plutôt les écritures complexes, formules de Moivre et d'Euler qui seront vues au chapitre suivant. Patience !

**Exercice 8 :**

1. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

## III/ Fonctions circulaires

Pour chaque réel $x$, on peut calculer les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux nouvelles fonctions.

**Définition 2 :** La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos : x \longmapsto \cos(x) \qquad\qquad \sin : x \longmapsto \sin(x).$$

**Remarque :** Les fonctions cos et sin portent le nom de « circulaires » car on peut paramétrer le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos(t) \\ y & = & \sin(t) \end{array}\right., \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

### III.1 Domaine de définition, parité et périodicité

On résume ici les propriétés découvertes au paragraphes précédents.

**Proposition 8 (Cosinus et Sinus) :**

— Les fonctions *cos* et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$.

— La fonction cos est *paire*. La fonction sin est *impaire*.

**Définition 3 (Fonction périodique) :** On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qu'elle est *périodique de période* T ou T-*périodique* s'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}_f, \quad \text{et} \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x). \tag{VII.1}$$

**Corollaire 8.1 :**
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2\pi$.

**Remarque :** Un élève attentif aura remarqué que l'on a simplement montré que les fonctions circulaires admettaient $2\pi$ comme période et non que celle-ci était la plus petite des périodes.

C'est le cas mais la démonstration de cette propriétés nous échappe encore et nécessite une définition plus rigoureuse du nombre $\pi$ lui-même.

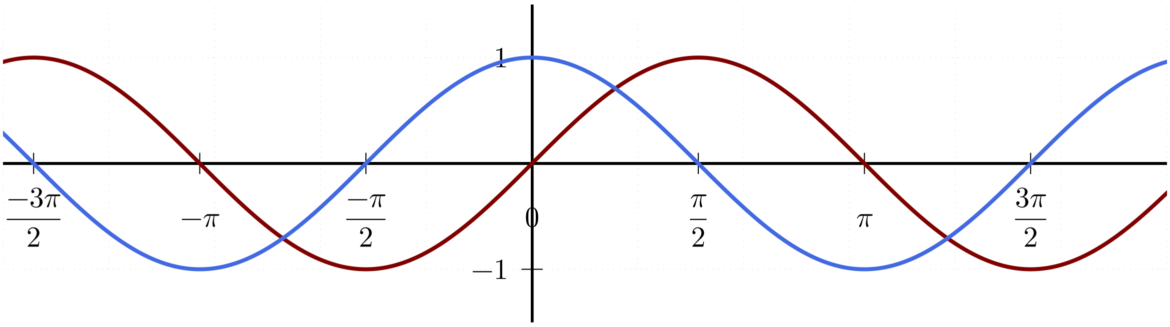



**Figure VII.8** – $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont $2\pi$-périodiques.

**Exercice 9 :** Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \sin(6x - 3)$ est $\dfrac{\pi}{3}$-périodique.

Compléments sur les fonctions périodiques :

— Une fonction T-périodique est aussi $k$T-périodique pour $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle *période de f*, le plus petit réels strictement positif T vérifiant (VII.1) :

$$\mathrm{T} = \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x + t \in \mathscr{D}_f \ \text{ et } \ f(x+t) = f(x)\right\}.$$

**ATTENTION** Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

— Alors qu'une fonction peut être paire ou impaire sur un intervalle borné à condition qu'il soit symétrique par rapport à O, l'invariance par translation du domaine de définition d'une fonction périodique lui impose d'être nécessairement infini.

**Exercice 10 :** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

Montrer que $f$ est périodique de période 4.

**Proposition 9 (Interprétation graphique) :**
Une fonction $f$ est T-périodique si, et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

**Méthode 1 (Restriction du domaine d'étude) :**
Si la fonction est T-périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T et on complète la courbe par translations de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

**Exercice 11 :** Proposer un domaine d'étude minimal pour $f : x \longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2$.

**Proposition 10 (Opérations sur les fonctions périodiques) :**
Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

— Les fonctions $f+g$, $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si $g$ ne s'annule pas.

— Pour tout $a > 0$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est $\dfrac{\mathrm{T}}{a}$-périodique.

**Exemple 2 :** La fonction $x \longmapsto \cos(5x)$ est $\dfrac{2\pi}{5}$-périodique et un domaine d'étude sera $\left[0\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$ par périodicité et parité.

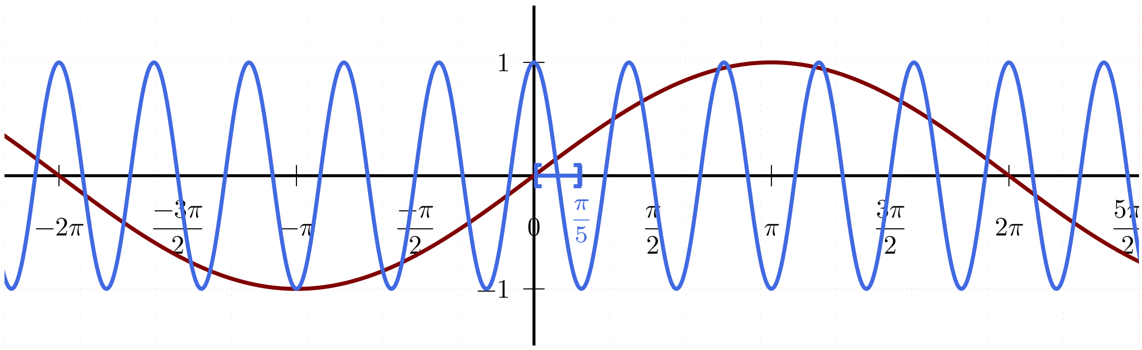



**Figure VII.9** – $x \longmapsto \cos(5x)$ et $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
En physique, on parle de dilatation temporelle.

## III.2 Continuité, dérivabilité

**Théorème 11 (Continuité) :**
Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

**Preuve :** Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Montrons que cos et sin sont continues en $a$ *i.e.* $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$.

En prenant $h \in \mathbb{R}$, il est équivalent de montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \cos(a+h) = \cos(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \sin(a+h) = \sin(a).$$

Or, $\quad \cos(a+h) = \cos(a)\cos h - \sin(a)\sin h \quad$ et $\quad \sin(a+h) = \sin(a)\cos h + \sin h\cos(a).$

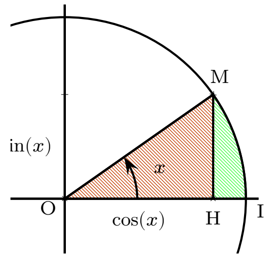
Il est donc nécessaire de connaître tout d'abord $\lim_{h\to 0} \sin(h)$ et $\lim_{h\to 0} \cos(h)$.

Mieux, par parité et imparité, seules suffisent $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sans rien changer à la démonstration, on peut considérer $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Considérons alors le point $\mathrm{M}$ du cercle trigonométrique défini par $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv x \ [2\pi]$ et $\mathrm{H}$ le projeté orthogonal de $\mathrm{M}$ sur l'axe des abscisses.

Le triangle rectangle $\mathrm{OHM}$ est alors inscrit dans l'arc de disque $\mathrm{OIM}$ d'angle au centre $x$.




En terme d'aires, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \leqslant & \mathscr{A}_{\mathrm{OHM}} & \leqslant & \mathscr{A}_{\mathrm{OIM}} \\
0 & \leqslant & \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{2} & \leqslant & \dfrac{1}{2}x \\
0 & \leqslant & \dfrac{\sin(2x)}{4} & \leqslant & \dfrac{1}{2}x \\
0 & \leqslant & \dfrac{\sin(u)}{4} & \leqslant & \dfrac{1}{4}u \\
0 & \leqslant & \sin(u) & \leqslant & u.
\end{array}$$

(D'après la proposition (5))

(En posant $u = 2x$)

D'après le théorème d'encadrement, on obtient, $\lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0$ puis, par imparité :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0.}$$

Utilisons alors la première assertion du théorème (1), $\cos(x) = +\sqrt{1-\sin^2(x)}$ car $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit aisément :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.}$$

Ces deux résultats en poche, on obtient alors aisément :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \cos(x) &= \lim_{h\to 0} \cos(a+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) \\
&= \cos(a)
\end{aligned}
\quad \text{et} \quad
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \sin(x) &= \lim_{h\to 0} \sin(a+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a) \\
&= \sin(a).
\end{aligned}$$

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont donc continues en $a$ donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Les physiciens ont l'habitude d'utiliser le résultat $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ sous la forme :

« pour les petites valeurs de $x$, $\sin(x) \simeq x$ ».

C'est en particulier ce qu'ils font quand ils analysent le mouvement du pendule simple.

Le théorème (12) permet surtout d'affirmer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0.

En effet, les taux d'accroissement en 0 de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(0+x)-\cos(0)}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

D'où, $\boxed{\big(\sin(x)\big)'(0) = 1}$ et $\boxed{\big(\cos(x)\big)'(0) = 0.}$

**Remarque :** Les courbes représentatives des fonctions cos et sin admettent ainsi, respectivement, comme tangente à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\cos}) : \ y = 1 \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\sin}) : \ y = x.$$

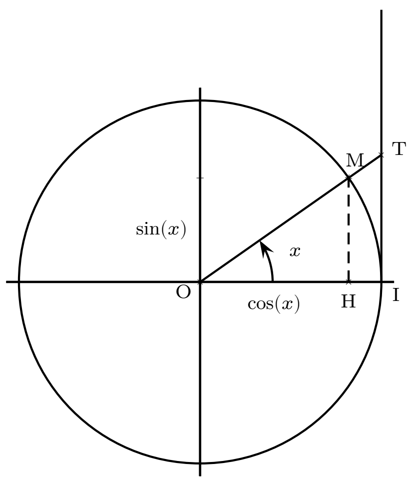
**Preuve :** A priori, nous avons une forme indéterminée de la forme « $\frac{0}{0}$ ». Nous allons lever cette indétermination grâce au théorème d'encadrement et un peu de géométrie de cinquième.

Tout d'abord, puisqu'il s'agit d'un calcul de limite en $0$ on peut restreindre l'étude à un voisinage de $0$, en l'occurrence, $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Par parité ou imparité, on se restreint même à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On complètera l'étude par symétrie.

On reprend l'idée de la démonstration précédente mais en poussant le raisonnement car nous avons besoin de plus d'informations. Ce résultat est, en effet, un résultat d'« ordre » supérieur.

Considérons encore le point $\mathrm{M}$ du cercle trigonométrique défini par $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv x \ [2\pi]$, $\mathrm{H}$ le projeté orthogonal de $\mathrm{M}$ sur l'axe des abscisses et $\mathrm{T}$ le point de $[\mathrm{OM})$ d'abscisse $1$.

En particulier $x > 0$.



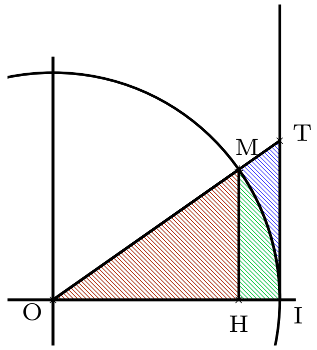

D'après le théorème de Thalès dans le triangle $\mathrm{OIT}$,

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{HM}} \iff \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\mathrm{IT}} \iff \mathrm{IT} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Big( = \tan(x)\Big).$$

De plus, en considérant les aires, on a :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{OHM}} \leqslant \mathscr{A}_{\mathrm{OIM}} \leqslant \mathscr{A}_{\mathrm{OIT}}.$$

où $\mathscr{A}_{\mathrm{OIM}}$ est encore l'aire de l'arc de disque d'angle au centre $x$, $\mathscr{A}_{\mathrm{OHM}} = \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{2}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{OIT}} = \dfrac{\sin(x)}{2\cos(x)}$, respectivement celles des triangles OHM et OIT.




$$\begin{aligned}
\text{D'où,}\quad \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} &\leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \\
0 < \cos(x) &\leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}\text{, avec } \sin(x) > 0 \text{ sur } \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[ \\
\frac{1}{\cos(x)} &\leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \cos(x)\text{, en inversant les inégalités (strictement positives !).}
\end{aligned}$$

Donc, $\forall\, x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\quad \dfrac{1}{\cos(x)} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \cos(x).$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, d'après le théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, puis, par parité :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Pour la deuxième limite, il faut commencer par faire un peu de trigonométrie :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\quad \frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to 0} \dfrac{\sin(\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\sin(0) = 0.$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on obtient bien le résultat escompté :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

**Exercice 12 :** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}$.

**Correction :** Il suffit d'appliquer les formule de la proposition (6) pour se ramener à une formule connue :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \left( \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \underset{u=\frac{x}{2}}{=} \dfrac{1}{2} \lim\limits_{u\to 0} \left( \dfrac{\sin(u)}{u} \right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Puis $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} \underset{\substack{u=\sqrt{x} \\ x>0}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} = \dfrac{1}{2}$.

On va faire mieux que le théorème (12) :

**Théorème 13 (Dérivabilité) :**
Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

**Preuve :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On forme les taux d'accroissement de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)-\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \times \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \times \frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème (12), $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de produits et de sommes, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x).$$

Autrement dit, la fonction cosinus est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et $\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$.

Pour la fonction, sinus, on va se ramener au résultat précédent en remarquant que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

La fonction sinus est donc, elle aussi, dérivable et, pour tout réel $x$,

$$(\sin)'(x) = (-1) \times (\cos)'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

**Corollaire 13.1 (Fonctions composées) :**
Soit $u$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Big(\cos\left(u(x)\right)\Big)' = -u'(x) \times \sin\left(u(x)\right) \qquad \text{et} \qquad \Big(\sin\left(u(x)\right)\Big)' = u'(x) \times \cos\left(u(x)\right).$$

**Exercice 13 :** Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}_f$ et calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)+2}{\sin^2(x)+2}$.

## III.3 Variations et représentation graphique

Les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi$-périodiques donc il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur $2\pi$ et de compléter la courbe par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

On considère alors l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

De plus, ces mêmes fonctions sont, respectivement, paire et impaire. L'étude sur la moitié de l'intervalle précédent suffit donc à connaître la courbe que l'on complètera alors par symétrie axiale ou centrale, respectivement.

On va donc étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

**Théorème 14 :**
- La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

**Preuve :** D'après le théorème (13), il suffit d'étudier le signe de leur dérivée :

- $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ sur $[0\,;\pi]$ donc la fonction cosinus est y est décroissante.
- $\sin'(x) = \cos(x)$, positif sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis négatif sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. La fonction sinus y est donc croissante puis décroissante.

On en déduit les tableaux de variations puis les courbes représentatives en (VII.12).

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\sin(x)$ | | | $+$ | | $0$ | | $-$ | | |
| cos | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

**Figure VII.10** – Tableau de variations de $x \longmapsto \cos(x)$

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | | | $+$ | | $0$ | | $-$ | | |
| sin | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

**Figure VII.11** – Tableau de variations de $x \longmapsto \sin(x)$

**Figure VII.12** – Tableaux de variation des fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

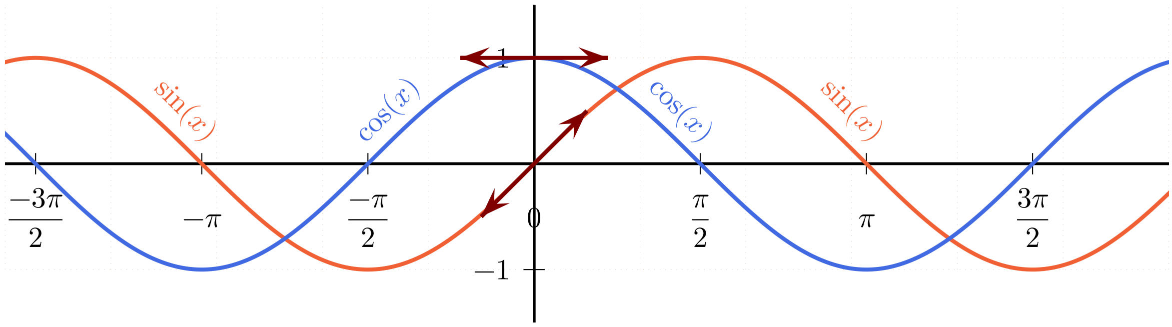



**Figure VII.13** – Courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

En remarquant que $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe de sin est obtenue à partir de celle de cos par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.

En physique, on dira que sin est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à cos.

**Définition 4 :** Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont appelées *sinusoïdes*.

**Exercice 14 :** Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin^2(x) + \cos(x)$ et préciser les intersections de sa courbe représentative avec l'axe des abscisses.

# IV/ Fonctions circulaires réciproques

## IV.1 Arccosinus et Arcsinus

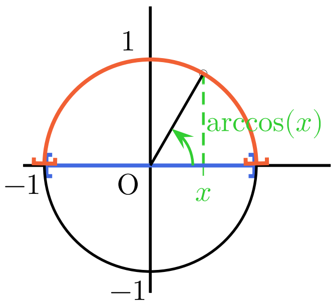
**Cosinus :** La fonction $\cos : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective.

Par exemple, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une infinité d'antécédents $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, ... Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$).

Par contre, la restriction de la fonction cos à $[0\,;\pi]$ corestreinte à $[-1\,;1]$ est continue et strictement croissante donc bijective.

On la note $\cos_{|[0;\pi]}^{|[-1;1]}$ :

$$\begin{array}{rccc} \cos_{|[0;\pi]}^{|[-1;1]} : & [0\,;\pi] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$



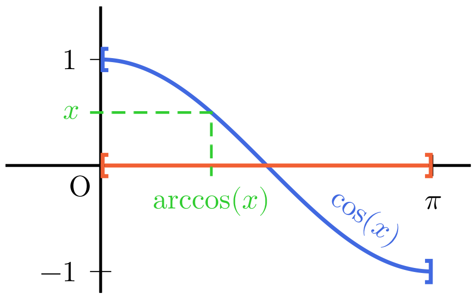




**Figure VII.14** – La fonction cos est continue strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

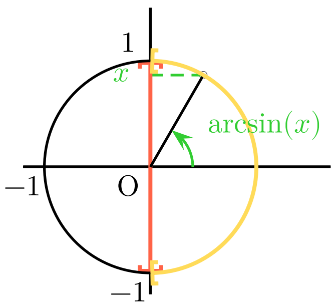
**Sinus :** La fonction $\sin : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas non plus bijective.

Par exemple, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet une infinité d'antécédents $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, ... Elle n'admet donc pas de réciproque.

Par contre, la restriction de la fonction sin à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ corestreinte à $[-1\,;1]$ est continue et strictement croissante donc bijective.

On la note $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}^{|[-1;1]}$ :

$$\begin{array}{rccl} \sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}^{|[-1;1]} : & \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$



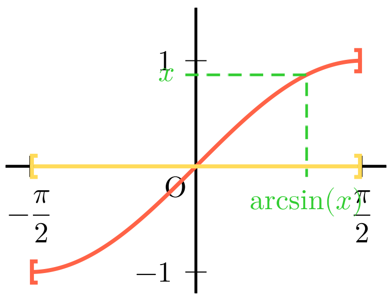




**Figure VII.15** – La fonction sin est continue strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

**Définition 5 (Arccosinus et Arcsinus) :** On appelle :

— fonction *arccosinus*, notée arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

— fonction *arcsinus*, notée arcsin, la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

Pour $x$ dans $[-1\,;1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut $x$. Même chose pour $\arcsin(x)$ avec le sinus dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**Corollaire 14.1 (Formule de réciprocité) :**
Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1\,;1]$ et on a :

— $\forall x \in [-1\,;1]$, $\cos\left(\arccos(x)\right) = x$.
— $\forall x \in [-1\,;1]$, $\sin\left(\arcsin(x)\right) = x$.
— $\forall x \in [0\,;\pi]$, $\arccos\left(\cos(x)\right) = x$.
— $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin\left(\sin(x)\right) = x$.

**Exemples 3 (Arccosinus) :**

— $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
— $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
— $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Mais **ATTENTION** $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6} \neq -\dfrac{\pi}{6}$.

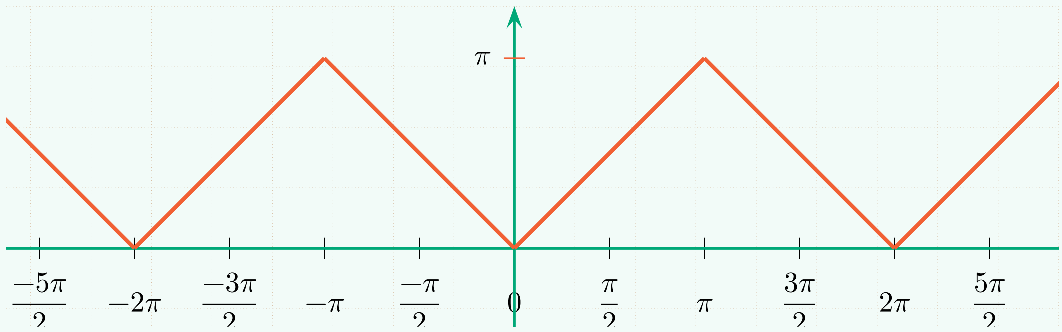
**Exemples 4 (Arcsinus) :**

— $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.
— $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
— $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Mais **ATTENTION** $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{3\pi}{4}$.

**Exercice 15 :** Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos\left(\cos(x)\right)$ sur $\mathbb{R}$.

**Correction :**



## IV.2 Dérivabilité

**Proposition 15 :**

— Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1\,;1]$ et dérivables sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\, ]-1\,;1[\,,\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x).$$

En particulier,

— la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

— la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.

— La fonction arcsin est impaire.

**Preuve :**

— En tant que réciproques de fonctions continues, les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ sont continues sur leur ensemble de définition *i.e.* sur $[-1\,;1]$.

— Pour les mêmes raisons, $\arccos$ et $\arcsin$ sont également strictement monotones, respectivement, strictement décroissante et croissante sur $[-1\,;1]$.

— Pour tout $x \in ]0\,;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ et ne s'annule pas.

Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $\arccos$ est dérivable sur $]-1\,;1[$, et pour tout $x \in ]-1\,;1[$, on a :

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin\left(\arccos(x)\right)}.$$

D'autre part, pour tout $x \in ]-1\,;1[$, $\cos^2\left(\arccos(x)\right) + \sin^2\left(\arccos(x)\right) = 1$, donc $\sin^2\left(\arccos(x)\right) = 1 - x^2$ *i.e.* $\sin\left(\arccos(x)\right) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Or, $\arccos(x) \in [0\,;\pi]$ et $\sin$ est positif sur cet intervalle.

Donc $\sin\left((\arccos(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$ *i.e.* $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De même, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ et ne s'annule pas.

Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $\arcsin$ est dérivable sur $]-1\,;1[$, et pour tout $x \in ]-1\,;1[$, on a :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)}.$$

D'autre part, pour tout $x \in ]-1\,;1[$, on obtient aussi $\cos^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - x^2$ *i.e.* $\cos\left(\arcsin(x)\right) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Or, $\arccos(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos$ est positif sur cet intervalle.

Donc $\cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$ *i.e.* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

— Pour montrer l'imparité de $\arcsin$, il suffit d'utiliser l'imparité de $\sin$.

$$\forall\, x \in [-1\,;1],\ \sin\left(\arcsin(-x)\right) = -x = -\sin\left(\arcsin(x)\right) = \sin\left(-\arcsin(x)\right).$$

Il suffit alors de composer les deux membres extrêmes de cette équation par $\arcsin$ pour obtenir :

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x).$$

**Remarques :**

— La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que la courbe de arccos admet le point $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

— En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\arccos}) : \; y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\arcsin}) : \; y = x.$$

— Les fonctions arccos et arcsin ne sont pas donc pas dérivables en 1 et $-1$ mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.

— Dans la pratique, on préfère arcsin qui est impaire, nulle en 0, … à arccos.

Par exemple, on dira souvent qu'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $x \longmapsto -\arcsin(x) + \mathrm{K}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ au lieu de $x \longmapsto \arccos(x) + \mathrm{K}$.

**Exercice 16 :** Montrer que, $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

**Corollaire 15.1 :**
Pour toute fonction $u$ dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1\,;1[$, $\arccos(u)$ et $\arcsin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \Big(\arcsin(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\Big(\arccos(u)\Big)'(x).$$

## IV.3 Courbes représentatives

On en déduit le tableau de variation et la courbe représentative des fonctions arccos et arcsin en (VII.17).

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| arccos | $\pi$ | ↘ | $\frac{\pi}{2}$ | ↘ | $0$ |

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| arcsin | $-\frac{\pi}{2}$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ |

**Figure VII.16** – Tableaux de variation de $x \longmapsto \arccos(x)$ et $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.

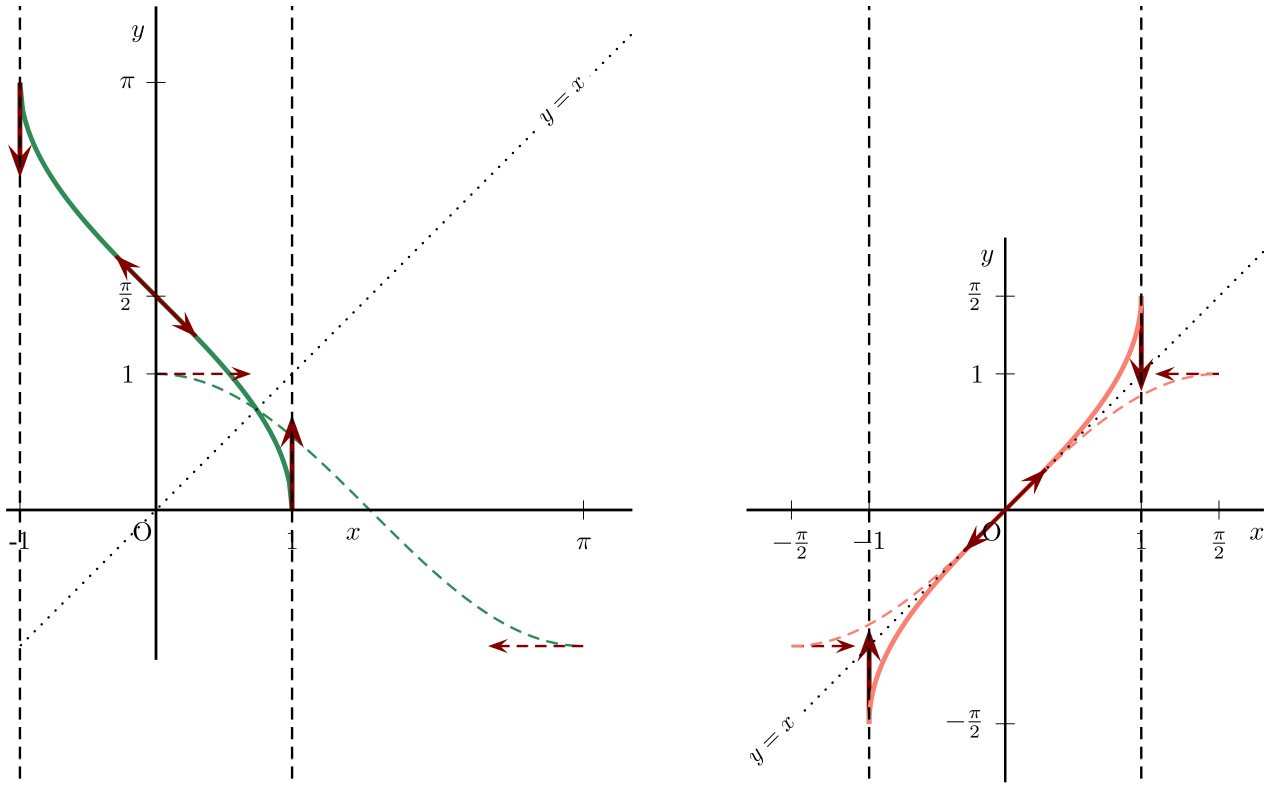
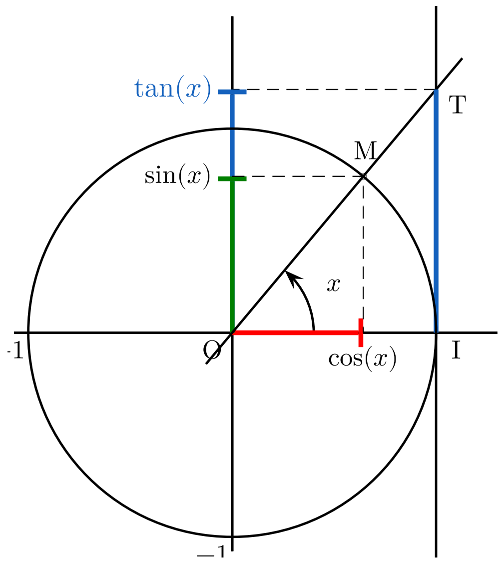



**Figure VII.17** – Courbes représentatives de $x \longmapsto \arccos(x)$ et $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.
En dash, les courbes de cos et sin.

**Remarque :** Les courbes de sin et arcsin sont également tangentes à l'origine.

## V/ Fonctions tangente et réciproque

### V.1 Fonction tangente




Lorsque $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on note T l'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en $\mathrm{I}(1, 0)$.

L'ordonnée de T est appelée **tangente de** $x$, notée $\tan(x)$.
En considérant des longueurs algébriques, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OIT, on a :

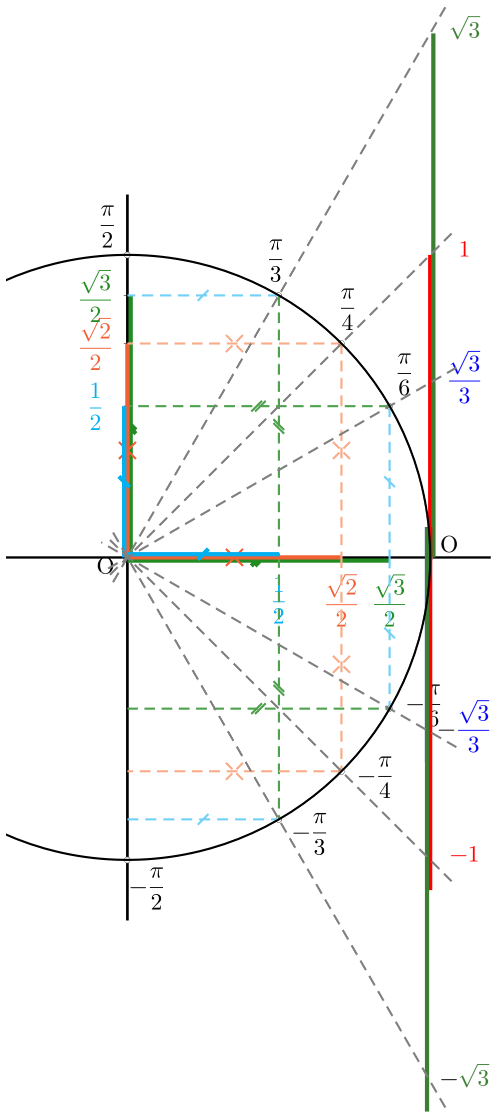
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

**Figure VII.18** – $\tan(x)$ pour $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Pour tout $x$ réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Définition 6 (Tangente) :** On appelle fonction *tangente*, notée tan, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$




| Radian | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | 0 |

**Figure VII.19** – Tangente d'angles remarquables.

**Proposition 16 (Domaine d'étude) :**
1. La fonction tan est impaire.
2. La fonction tan est $\pi$-périodique.
3. La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

On étudiera donc la fonction tan sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on complètera la courbe représentative par symétrie centrale puis translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$.

**Preuve :**
1. $\forall\, x\in\mathscr{D}_{\tan}$, $\tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\tan(x)$.
2. De plus, $\forall\, x\in\mathscr{D}_{\tan}$, $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$.

   La fonction tan est donc impaire.
3. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions sin et cos sont continues et cos ne s'annule pas.

   Comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul, la fonction tan est donc continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

   Par le même raisonnement, comme quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul, la fonction tan est donc dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\forall\ \in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ (\tan)'(x)=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}>0.$$

Comme $\tan'(0)=0$, la courbe représentative de tan admet comme tangente à l'origine la droite d'équation :

$$\boxed{(\mathrm{T}_{\tan}):\ y=x.}$$

**Remarque :** Posons $\varphi$ définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x)=\tan(x)-x$.

Comme somme de fonctions dérivables, $\varphi$ est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\varphi'(x)=\tan^2(x)\geqslant 0.$$

La fonction $\varphi$ est donc strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\varphi(0)=0$, elle y est donc positive.

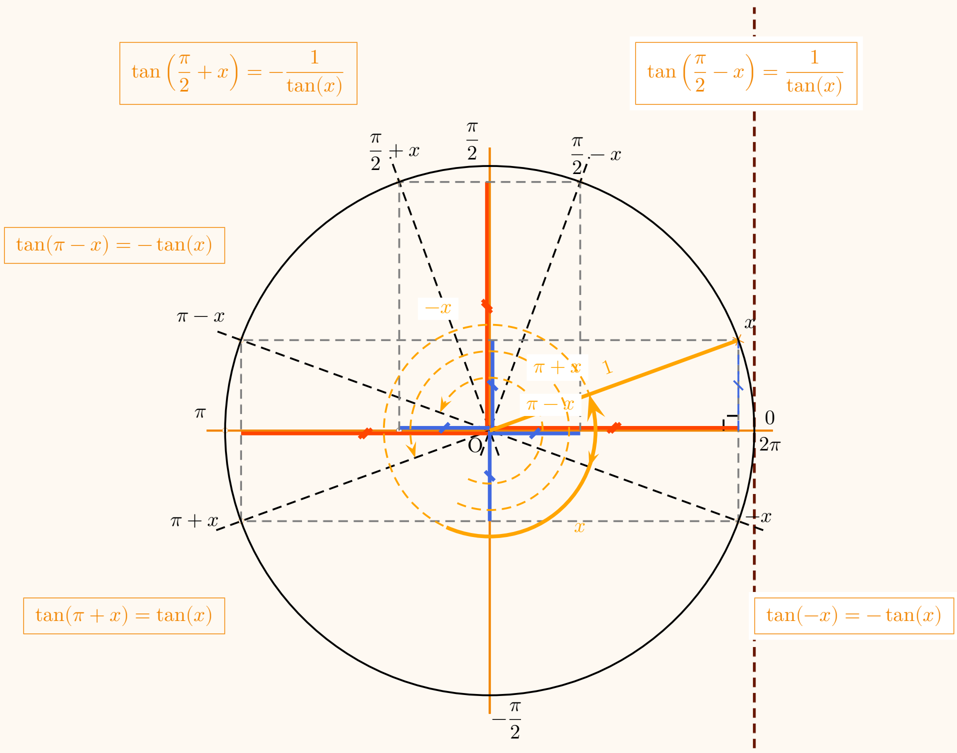
On en déduit que la courbe représentative de tan est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par symétrie de centre O, on en déduit aussi que la courbe traverse sa tangente en 0 *i.e.* la courbe admet un *point d'inflexion* en 0.

**Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) :**
Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

Suivant les conditions d'existence, on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$




**Un peu d'histoire :** *De même que* $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$ *a donné à la deuxième fonction son nom de « co »sinus, le fait que* $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ *donne à la fonction inverse de* tan *le nom de « co »tangente.*

*On retiendra que les* cos *et* sin *de deux angles complémentaires sont égaux. Même chose pour* tan *et* cotan .

**Exercice 17 :** À quelle condition peut-on écrire $\cos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.

**Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :**

1. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

**Preuve :**

1. Pour tout $x$ de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$.

   On a alors : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\cos(x)} = +\infty$.
2. Par symétrie centrale de centre O, ...
3. On reconnait la limite du taux d'accroissement en $0$ d'une fonction dérivable :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\tan(0)}{x} = \left(\tan\right)'(0) = 1.$$

La courbe représentative admet donc une asymptote d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis, par symétrie et translation, des asymptotes d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

De même que précédemment, la proposition (18) .3 signifie, que dans un voisinage de $0$ :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Résultat qui justifie l'approximation des physiciens pour de petits angles $\tan(x) \simeq x$.

On obtient donc son tableau de variation et sa courbe représentative (VII.21).

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tan'(x)$ | \|\| | $+$ | $1$ | $+$ | \|\| |
| $\tan$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| |

**Figure VII.20** – Tableau de variation $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

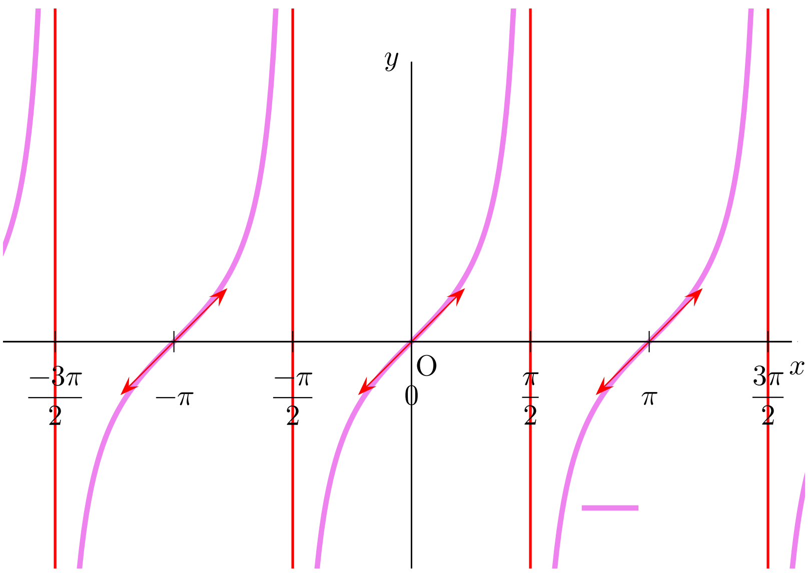



**Figure VII.21** – Courbe représentative de $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

**Proposition 19 (Équations trigonométriques) :**

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y \ [\pi].$$

**Preuve :** La fonction tan étant continue et strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliquées aux fonctions strictement monotones, pour tout réel $k$ l'équation $\tan(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, admet une unique solution dans chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Par translation de vecteur $\pi\vec{\imath}$, on obtient donc le résultat.

Enfin quelques formules utiles :

**Proposition 20 :**

**Formule d'addition :** Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

— $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

— $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

**Formule de duplication :** Pour tout $(a\,;\in)\,\mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan(2a)$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}. \tag{VII.2}$$

**Formule de factorisation :** Soient $p$ et $q$ deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

— $\tan(p)+\tan(q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

— $\tan(p)-\tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

**Formule de l'angle moitié :** Pour tout $x$ réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

— $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

— $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

— $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

**Preuve :**

— Soit $(a\,;b\,;a+b) \in (\mathscr{D}_{tan})^3$. En particulier, $\cos(a)\cos(b) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\cancel{\cos(a)\cos(b)}\left(\dfrac{\sin(a)\cancel{\cos(b)}}{\cos(a)\cancel{\cos(b)}} + \dfrac{\cancel{\cos(a)}\sin(b)}{\cancel{\cos(a)}\cos(b)}\right)}{\cancel{\cos(a)\cos(b)}\left(1-\dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\right)} \\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

Le raisonnement est identique pour $\tan(a-b)$ ou en remplaçant $b$ par $-b$.

— Il suffit d'appliquer la formule précédente pour $a = b \in \mathscr{D}_{tan}$.

— Soit $(p\,;q) \in (\mathscr{D}_{tan})^2$. En particulier, $\cos(p)\cos(q) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tan(p) + \tan(q) &= \frac{\sin(p)}{\cos(p)} + \frac{\sin(q)}{\cos(q)} = \frac{\sin(p)\cos(q) + \sin(q)\cos(p)}{\cos(p)\cos(q)} \\ &= \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}.\end{aligned}$$

On obtient la formule de $\tan(p) - \tan(q)$ en remplaçant $q$ par $-q$ et en utilisant l'imparité de $\tan$.

— Soit $x \in \mathscr{D}_{tan}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathscr{D}_{tan}$. En particulier $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.

En posant $x = 2a$ dans (VII.2), on a déjà :

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Enfin, les formules de duplication pour le $\cos$ et le $\sin$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ \sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

**Remarque :** Toutes ces formules reposent sur la relation $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

**Exercice 18 :** Sans s'occuper du domaine de définition, exprimer $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

## V.2 Fonction arctangente

La fonction $\tan : \mathcal{D}_{\tan} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$ s'entend).

La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ est bijective. On la note $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$.

$$\begin{array}{rccl}\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} : & \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x)\end{array}$$

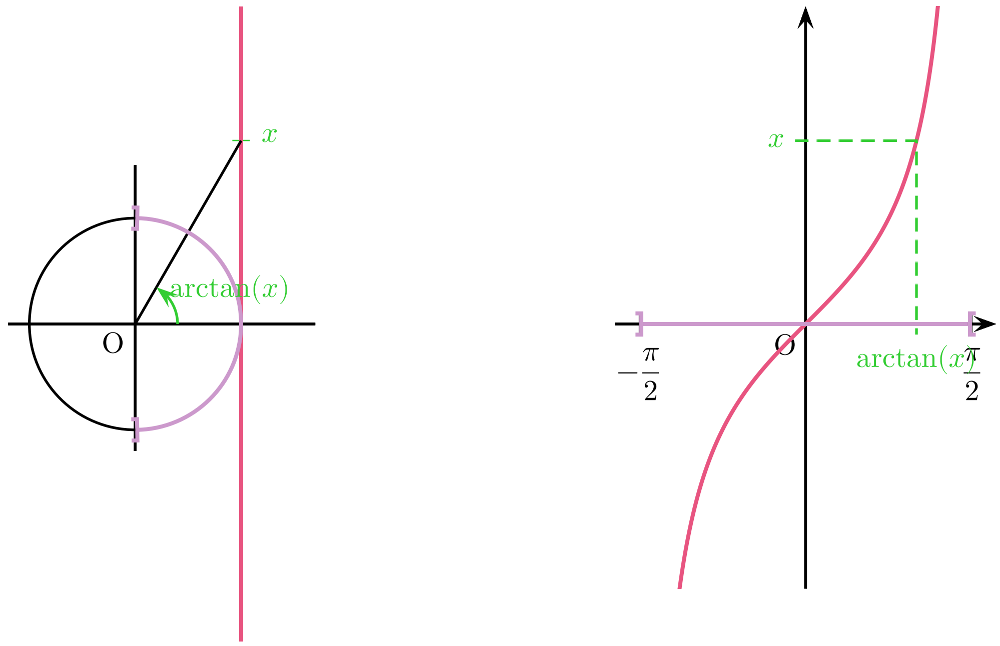



**Figure VII.22** – La fonction tan est continue et strictement monotone de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.

**Définition 7 (Arctangente) :** On appelle fonction *arctangente*, notée arctan, la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On en déduit immédiatement,

**Corollaire 20.1 (Formule de réciprocité) :**
La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

— $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tan\left(\arctan(x)\right) = x$.

— $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\left(\tan(x)\right) = x$.

**Exemples 5 :**

— $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

— $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$.

— $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Mais **ATTENTION** $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

**Exercice 19 :** Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Hutton, 1776)}$$

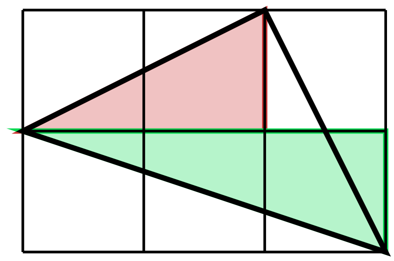


**Figure VII.23** – $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**Correction :** Tout repose sur la formule, dans ses conditions de validité, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

Donc, $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

Or, $0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$ entraînent $0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \pi$.

Donc $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**Proposition 21 :**

— La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

— La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— La fonction arctan est impaire.

En particulier, la courbe représentative de tan admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine.

CHAPITRE VII. FONCTIONS CIRCULAIRES

**Preuve :**

— La fonction $\arctan$ est la fonction réciproque d'une fonction continue de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$, d'où sa continuité sur $\mathbb{R}$ et ses limites aux bornes du domaine de définition.

— Pour les mêmes raisons, $\arctan$ est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $\tan$ est bijective et dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) \geqslant 1 > 0.$$

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $\arctan$ est dérivable et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

— Pour montrer l'imparité de $\arctan$, il suffit d'utiliser l'imparité de $\tan$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\tan\left(\arctan(-x)\right) = -x = -\tan\left(\arctan(x)\right) = \tan\left(-\arctan(x)\right).$$

Il suffit alors de composer les deux membres extrêmes de cette équation par $\arctan$ pour obtenir :

$$\arctan(-x) = -\arctan(x).$$

On en déduit le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction arctan en (VII.24).

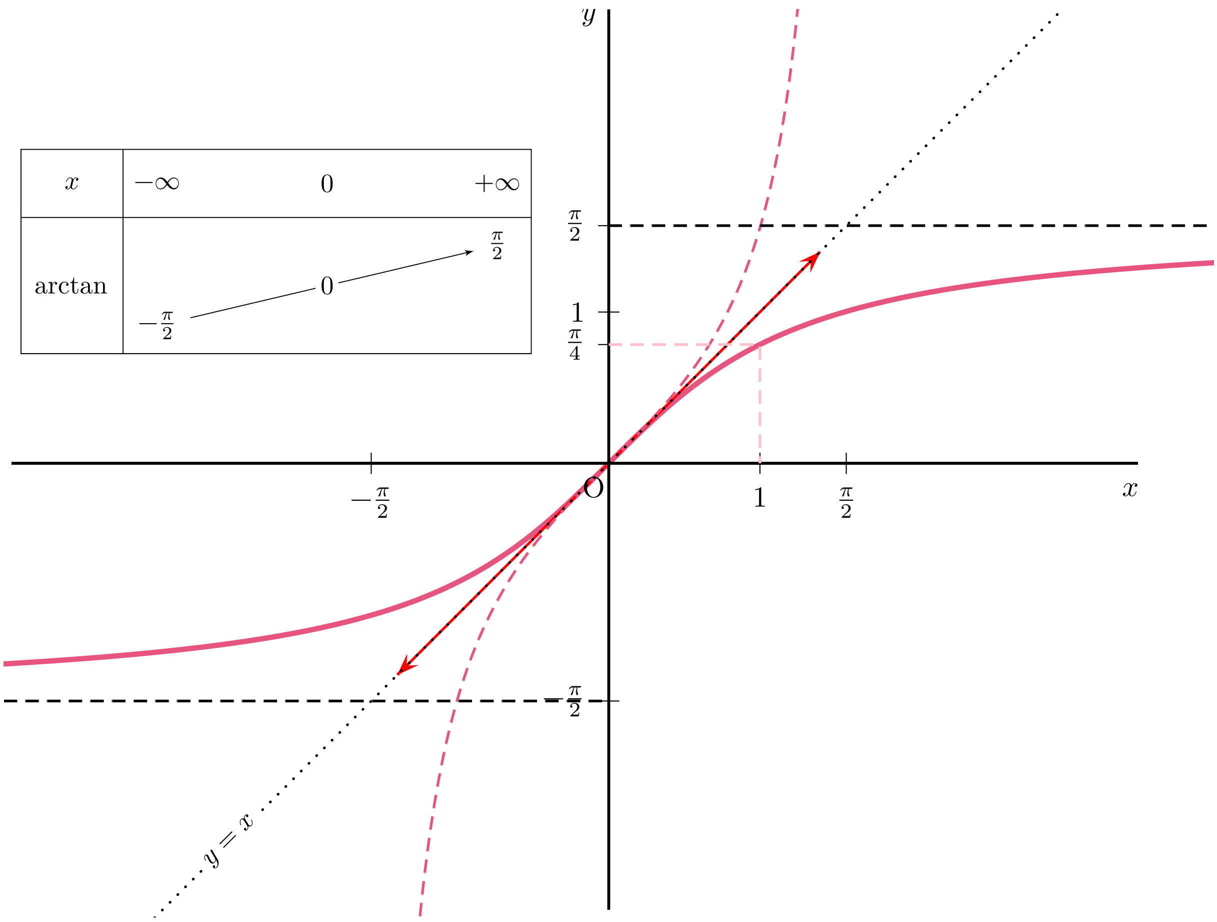



**Figure VII.24** – Tableau de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de tan.

**Remarque :** Les courbes de tan et arctan sont tangentes à l'origine.

**Corollaire 21.1 :**
Pour toute fonction $u$ dérivable sur un intervalle I, $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \Big(\arctan(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

**Exercice 20 :** Étude et représentation graphique de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

**Proposition 22 :**
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

**Preuve :** On utilise la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ :

$$\forall\, u \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{1}{\tan u}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = x = \tan\left(\arctan(x)\right).$$

Donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \arctan(x)\ \ [\pi]$.

Or, $\arctan(x) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ car $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$.

Donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et l'égalité.

Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on applique l'égalité obtenue à $-x > 0$.

**Exercice 21 :** Montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(a) > \frac{a}{1+a^2}$.

**Exercice 22 :** Étudier les asymptotes de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$

## VI/ Tableau récapitulatif

| $f(x)$ | Domaine de définition | Domaine de dérivabilité | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ | $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ | $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\arccos(x)$ | $[-1\,;1]$ | $]-1\,;1[$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arcsin(x)$ | $[-1\,;1]$ | $]-1\,;1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |