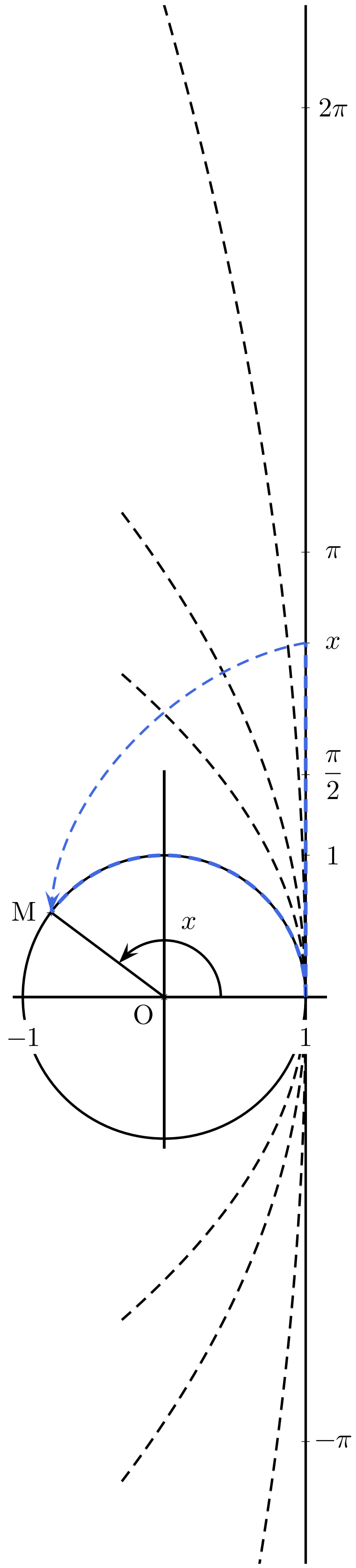
Chapitre

VII Fonctions circulaires

CONTENU

I/ Le cercle trigonométrique

I.1 Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un et un seul point M du cercle trigonométrique.

Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

On dit alors que « x_0 *et* x_1 *sont égaux modulo* 2π » et on note :

$$x_0 \equiv x_1 \ [2\pi]\,.$$

La relation d'égalité modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel x associé à M par ce procédé est, par définition, une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des réels égaux à x_0 modulo 2π.

On parlera plutôt de *classe d'équivalence* de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ dont x_0 est un *représentant*.

Lorsque $x_0 \in \,]-\pi\,;\pi]$, on parlera alors de *mesure principale* de l'angle.

Exemples 1 :

- 1 radian correspond à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 1.
- Par définition, 2π radian correspond donc à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 2π : le périmètre du cercle !
- La mesure d'un angle orienté en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

degrés	0	30	45	60	90	180	$x = \dfrac{180}{\pi} \times y$
radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$y = \dfrac{\pi}{180} \times x$

- $1\,\text{rad} \simeq 57,3^\circ$ et $1^\circ \simeq 0,0175\,\text{rad}$.

Exercice 1 : Donner la mesure qui appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ puis la mesure principale de l'angle dont une mesure vaut :

1. $-\dfrac{9\pi}{10}$
2. $\dfrac{95\pi}{7}$
3. $\dfrac{148\pi}{3}$
4. $3,15$

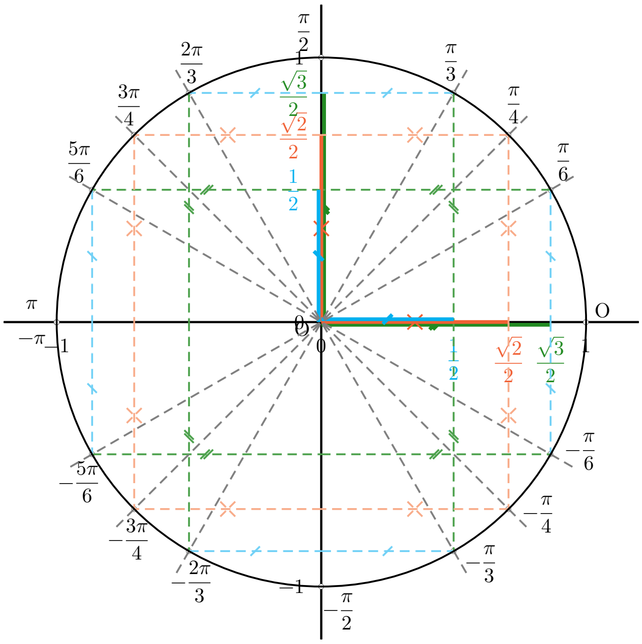


Figure VII.1 – Angles remarquables.

I.2 Autour du cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 1 : Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ ait pour mesure x radians.

— On appelle *cosinus de x*, noté $\cos(x)$, l'abscisse de M.
— On appelle *sinus de x*, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

On les appelle le cosinus et le sinus du nombre réel x.

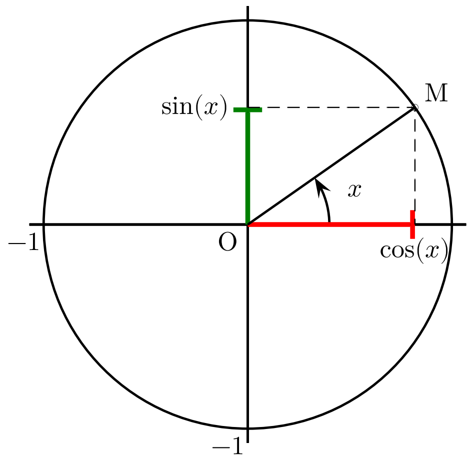


Figure VII.2 – Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ ait pour mesure x radians.

Triangle rectangle isocèle **Triangle équilatéral**

Figure VII.3 – Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.

Radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque : La ligne des sinus s'écrit $\dfrac{\sqrt{0}}{2}, \dfrac{\sqrt{1}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{4}}{2}$.

Figure VII.4 – Cosinus et sinus d'angles remarquables.

Exercice 2 : Calculer :

1. $\cos(3\pi)$
2. $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{64\pi}{3}\right)$

Théorème 1 :
Soit x un réel.

— $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

— $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \iff |\cos(x)| \leqslant 1$.

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff |\sin(x)| \leqslant 1$.

— Pour tout $x \in [-\pi\,;\pi]$,

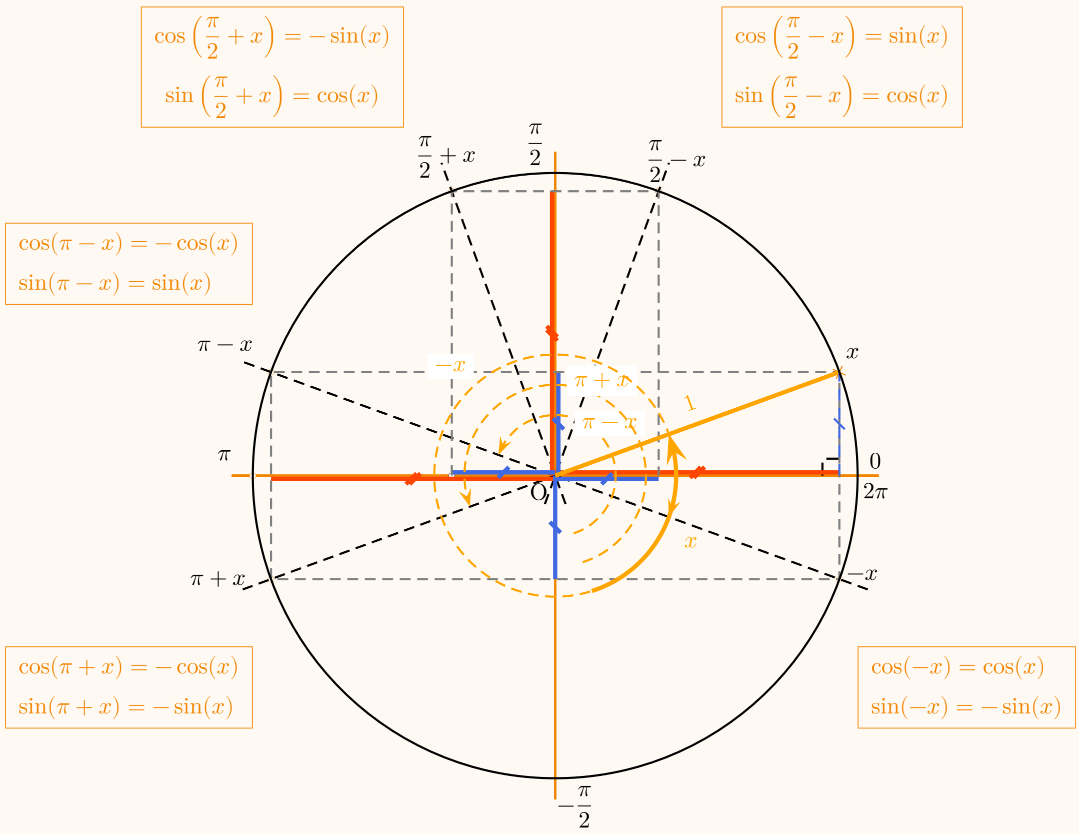
— $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

— $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

— $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Exercice 3 : À quelle condition peut-on écrire $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$?

Proposition 2 (Trigonométrie et Transformations du plan) :
Soit $x \in \mathbb{R}$.



Corollaire 2.1 :
Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin(x).$$

En particulier, $\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(k\pi)=(-1)^k \quad$ et $\quad \sin(k\pi)=0$.

Exercice 4 : Simplifier $-\cos(\pi-x)+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-7\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin(x+3\pi)+3\sin(-x)$.

I.3 Équations trigonométriques

Théorème 3 (Résolution d'équations trigonométriques élémentaires) :
Soient a et b deux réels.

$$\cos(a)=\cos(b) \iff a\equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a\equiv -b\ [2\pi]$$
$$\sin(a)=\sin(b) \iff a\equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a\equiv \pi-b\ [2\pi]$$

$$\big(\cos(a)=\cos(b) \text{ et } \sin(a)=\sin(b)\big) \iff a\equiv b\ [2\pi].$$

Figure VII.5 – Équations trigonométriques.

Exercice 5 : Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x) \quad \text{sur} \left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x) \quad \text{sur} \left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{7\pi}{3}\right]$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) = \cos(2x)$
3. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

II/ Trigonométrie

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{HM}}{\text{OM}}.$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}}.$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\text{HM}}{\text{OH}}.$$

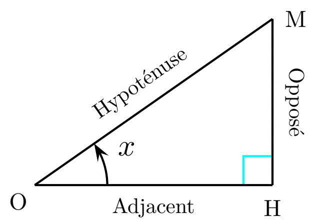
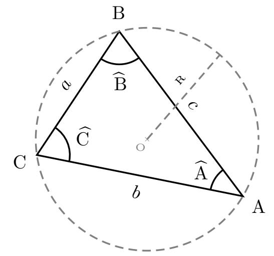


Figure VII.6 – Trigonométrie dans un triangle.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{C}}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{\mathrm{B}}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}.$$



$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \frac{1}{2\mathrm{R}} = \frac{2\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}}{abc}.$$

Avec $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, on a $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Figure VII.7 – Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.

II.1 Formules de duplication

Proposition 4 (Formule d'addition) :
Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Proposition 5 (Formule de duplication) :
Pour tout réel a, on a :

— $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

— $$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a).\end{aligned}$$

Exercice 7 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

II.2 Formules de linéarisation

Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) :
Soit $a \in \mathbb{R}$:

— $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

— $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Proposition 7 :
Soient a et b deux réels :

— $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\big]$.

— $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.
— $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

Exercice 8 :
1. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

III/ Fonctions circulaires

Définition 2 : La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos\ : x \longmapsto \cos(x) \qquad\qquad \sin\ : x \longmapsto \sin(x).$$

III.1 Domaine de définition, parité et périodicité

Proposition 8 (Cosinus et Sinus) :
— Les fonctions *cos* et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$.
— La fonction cos est *paire*. La fonction sin est *impaire*.

Définition 3 (Fonction périodique) : On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qu'elle est *périodique de période* T ou T-*périodique* s'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}_f, \quad \text{et} \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x). \tag{VII.1}$$

Corollaire 8.1 :
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

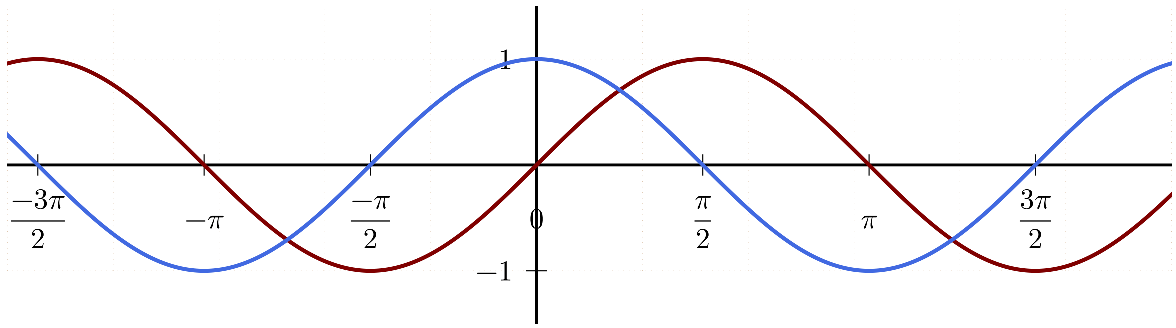


Figure VII.8 – $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.

Exercice 9 : Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \sin(6x-3)$ est $\dfrac{\pi}{3}$-périodique.

Compléments sur les fonctions périodiques :

— Une fonction T-périodique est aussi kT-périodique pour $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle *période de f*, le plus petit réels strictement positif T vérifiant (VII.1) :

$$\mathrm{T} = \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x+t \in \mathscr{D}_f \ \text{ et } \ f(x+t) = f(x)\right\}.$$

ATTENTION Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

— Alors qu'une fonction peut être paire ou impaire sur un intervalle borné à condition qu'il soit symétrique par rapport à O, l'invariance par translation du domaine de définition d'une fonction périodique lui impose d'être nécessairement infini.

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

Montrer que f est périodique de période 4.

Proposition 9 (Interprétation graphique) :
Une fonction f est T-périodique si, et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

Méthode 1 (Restriction du domaine d'étude) :
Si la fonction est T-périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T et on complète la courbe par translations de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

Exercice 11 : Proposer un domaine d'étude minimal pour $f : x \longmapsto \left(\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right) - \sin\left(\dfrac{1}{5}x\right)\right)^2$.

Proposition 10 (Opérations sur les fonctions périodiques) :
Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- Pour tout $a > 0$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est $\dfrac{\mathrm{T}}{a}$-périodique.

Exemple 2 : La fonction $x \longmapsto \cos(5x)$ est $\dfrac{2\pi}{5}$-périodique et un domaine d'étude sera $\left[0\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$ par périodicité et parité.

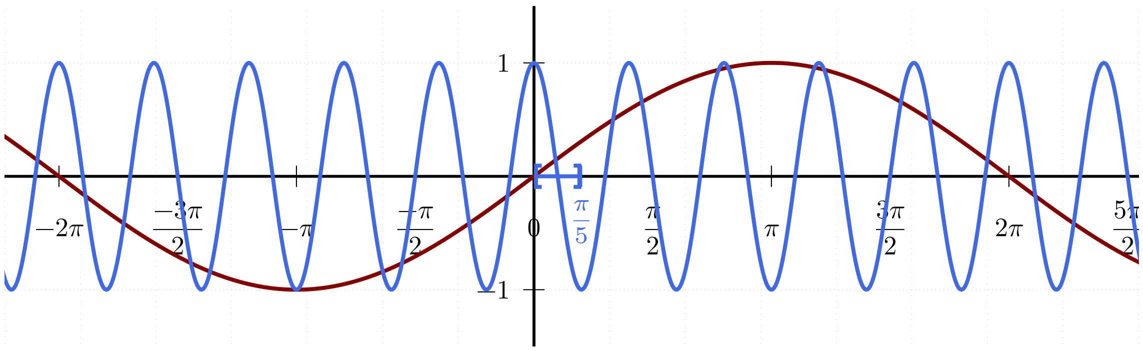


Figure VII.9 – $x \longmapsto \cos(5x)$ et $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
En physique, on parle de dilatation temporelle.

III.2 Continuité, dérivabilité

Théorème 11 (Continuité) :
Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Le théorème (12) permet surtout d'affirmer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0.

En effet, les taux d'accroissement en 0 de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(0+x)-\cos(0)}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

D'où, $\boxed{\big(\sin(x)\big)'(0) = 1}$ et $\boxed{\big(\cos(x)\big)'(0) = 0.}$

Remarque : Les courbes représentatives des fonctions cos et sin admettent ainsi, respectivement, comme tangente à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\cos}) : y = 1 \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\sin}) : y = x.$$

Exercice 12 :

1. Montrer que $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

Théorème 13 (Dérivabilité) :
Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Corollaire 13.1 (Fonctions composées) :
Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Big(\cos\big(u(x)\big)\Big)' = -u'(x) \times \sin\big(u(x)\big) \quad \text{et} \quad \Big(\sin\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \times \cos\big(u(x)\big).$$

Exercice 13 : Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}_f$ et calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)+2}{\sin^2(x)+2}$.

III.3 Variations et représentation graphique

Théorème 14 :
- La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
cos	-1 ↗	0 ↗	1	↘ 0	↘ -1

Figure VII.10 – Tableau de variations de $x \longmapsto \cos(x)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
sin	-1 ↗	0 ↗	1	↘ 0	↘ -1

Figure VII.11 – Tableau de variations de $x \longmapsto \sin(x)$

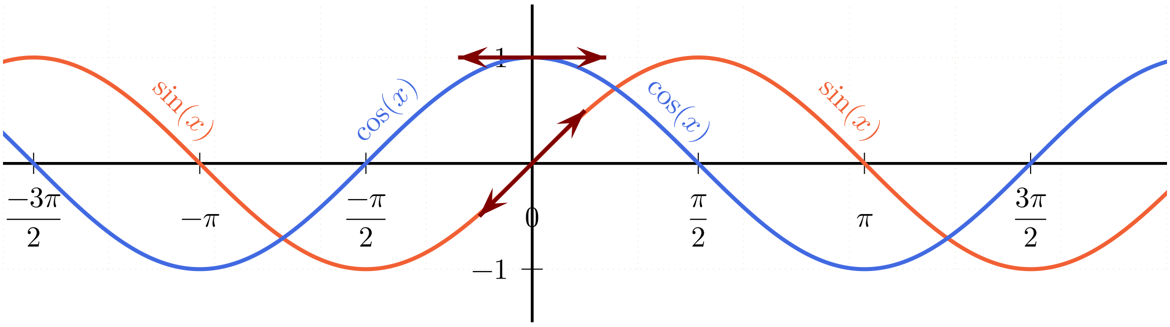


Figure VII.12 – Tableaux de variation et courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 : Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin^2(x) + \cos(x)$ et préciser les intersections de sa courbe représentative avec l'axe des abscisses.

IV/ Fonctions circulaires réciproques

IV.1 Arccosinus et Arcsinus

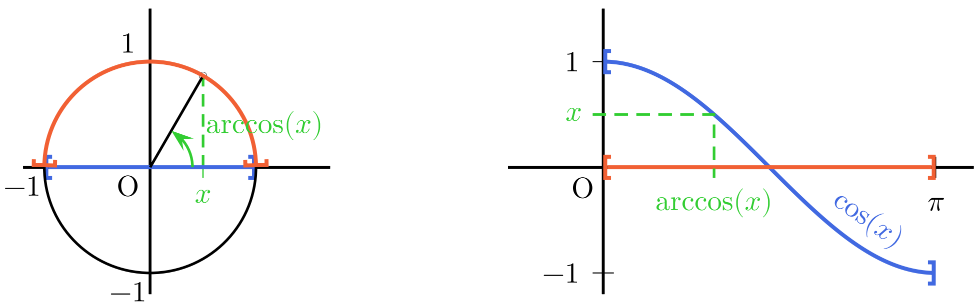


Figure VII.13 – La fonction cos est continue strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

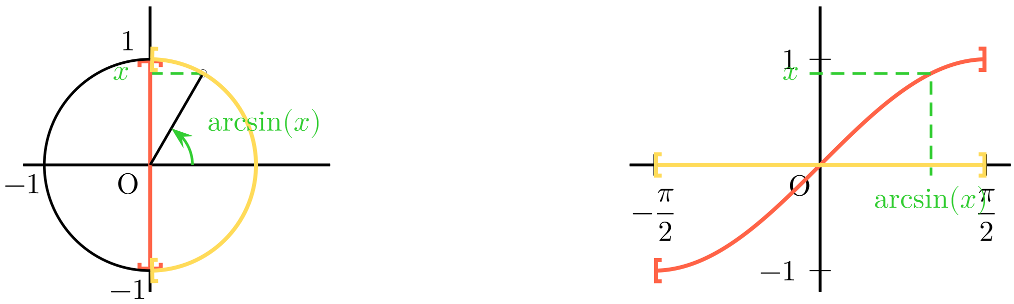


Figure VII.14 – La fonction sin est continue strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 4 (Arccosinus et Arcsinus) : On appelle :

— fonction *arccosinus*, notée arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

— fonction *arcsinus*, notée arcsin, la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

Pour x dans $[-1\,;1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut x. Même chose pour $\arcsin(x)$ avec le sinus dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Corollaire 14.1 (Formule de réciprocité) :
Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1\,;1]$ et on a :

— $\forall\, x \in [-1\,;1], \quad \cos\left(\arccos(x)\right) = x.$

— $\forall\, x \in [0\,;\pi], \quad \arccos\left(\cos(x)\right) = x.$

— $\forall\, x \in [-1\,;1], \quad \sin\left(\arcsin(x)\right) = x.$

— $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin\left(\sin(x)\right) = x.$

Exemples 3 (Arccosinus) :

— $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

— $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Mais **ATTENTION** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$.

Exemples 4 (Arcsinus) :

— $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

— $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Mais **ATTENTION** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 15 : Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$.

IV.2 Dérivabilité

Proposition 15 :

— Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1\,;1]$ et dérivables sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x).$$

En particulier,

— la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

— la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.

— La fonction arcsin est impaire.

Remarques :

— La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que la courbe de arccos admet le point $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

— En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\arccos}) : y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\arcsin}) : y = x.$$

— Les fonctions arccos et arcsin ne sont pas donc pas dérivables en 1 et -1 mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.

Exercice 16 : Montrer que, $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Corollaire 15.1 :
Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1\,;1[$, $\arccos(u)$ et $\arcsin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\quad \Big(\arcsin(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\Big(\arccos(u)\Big)'(x).$$

IV.3 Courbes représentatives

x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

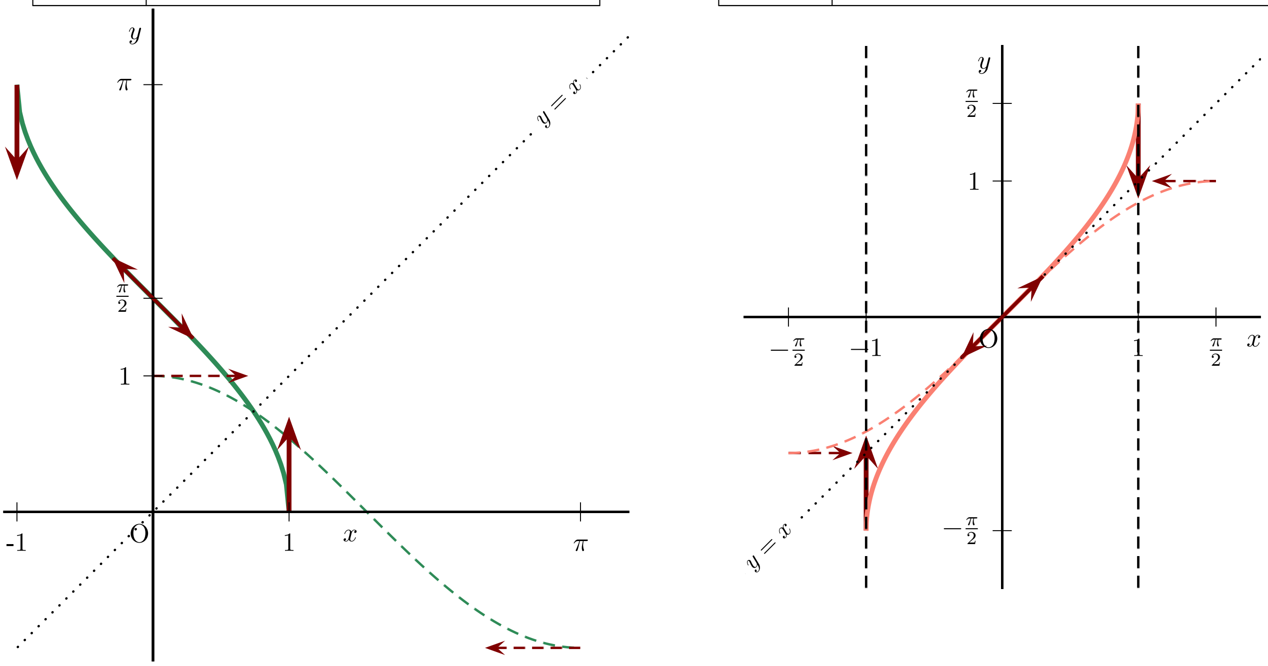
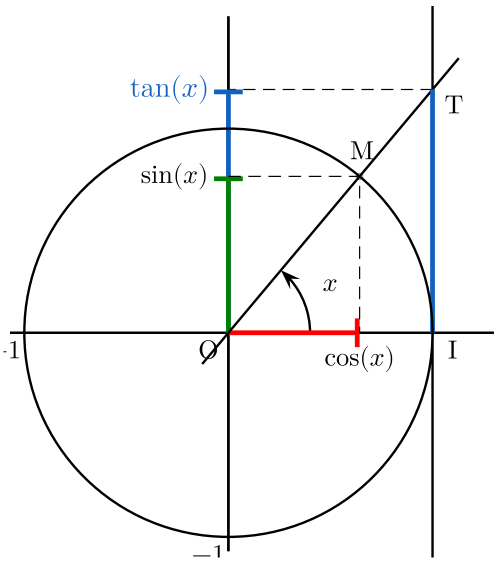


Figure VII.15 – Tableaux de variation et courbes représentatives de $x \longmapsto \arccos(x)$ et $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.
En dash, les courbes de cos et sin.

Remarque : Les courbes de sin et arcsin sont également tangentes à l'origine.

V/ Fonctions tangente et réciproque

V.1 Fonction tangente



Lorsque $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on note T l'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en $I(1, 0)$.

L'ordonnée de T est appelée **tangente de** x, notée $\tan(x)$.
En considérant des longueurs algébriques, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OIT, on a :

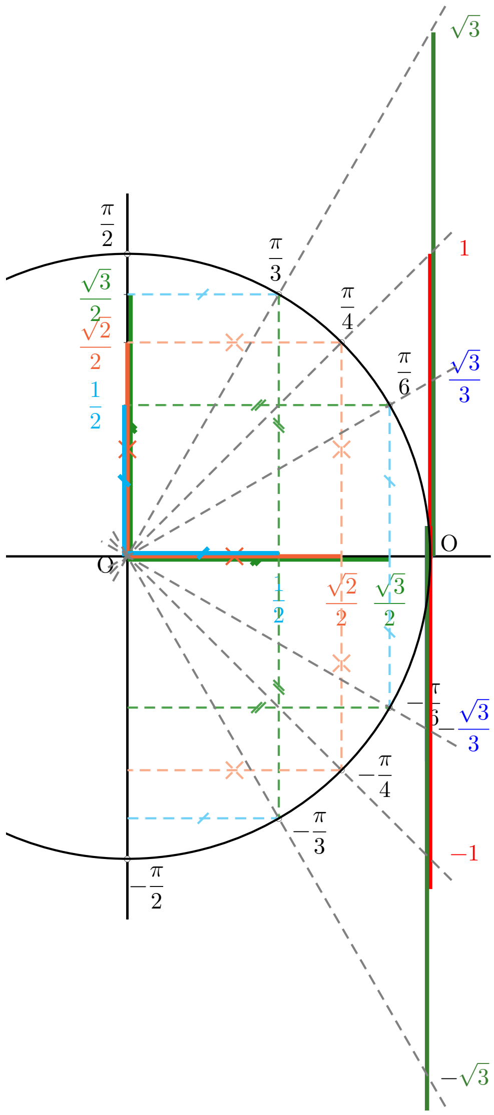
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Figure VII.16 – $\tan(x)$ pour $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Pour tout x réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Définition 5 (Tangente) : On appelle fonction *tangente*, notée tan, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0

Figure VII.17 – Tangente d'angles remarquables.

Proposition 16 (Domaine d'étude) :

1. La fonction tan est impaire.
2. La fonction tan est π-périodique.
3. La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

On étudiera donc la fonction tan sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on complètera la courbe représentative par symétrie centrale puis translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$.

Comme $\tan'(0) = 0$, la courbe représentative de tan admet comme tangente à l'origine la droite d'équation :

$$\boxed{(\mathrm{T}_{\tan}) : \; y = x.}$$

Remarque : Posons φ définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = \tan(x) - x$.

Comme somme de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\varphi'(x) = \tan^2(x) \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\varphi(0) = 0$, elle y est donc positive.

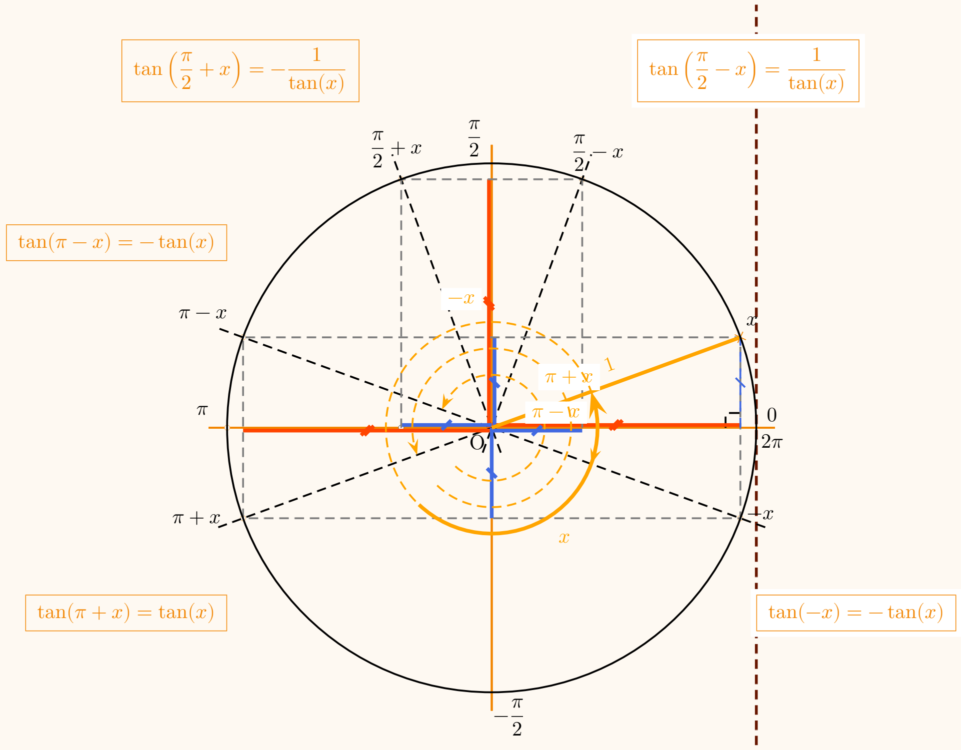
On en déduit que la courbe représentative de tan est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par symétrie de centre O, on en déduit aussi que la courbe traverse sa tangente en 0 *i.e.* la courbe admet un *point d'inflexion* en 0.

Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) :
Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

Suivant les conditions d'existence, on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



Un peu d'histoire : *De même que* $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$ *a donné à la deuxième fonction son nom de « co »sinus, le fait que* $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ *donne à la fonction inverse de* tan *le nom de « co »tangente.*

On retiendra que les cos *et* sin *de deux angles complémentaires sont égaux. Même chose pour* tan *et* cotan .

Exercice 17 : À quelle condition peut-on écrire $\cos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.

Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

La courbe représentative admet donc une asymptote d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis, par symétrie et translation, des asymptotes d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

De même que précédemment, la proposition (18) .3 signifie, que dans un voisinage de 0 :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Résultat qui justifie l'approximation des physiciens pour de petits angles $\tan(x) \simeq x$.

On obtient donc son tableau de variation et sa courbe représentative (VII.19).

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	‖	$+$	1	$+$	‖
$\tan$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖

Figure VII.18 – Tableau de variation $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

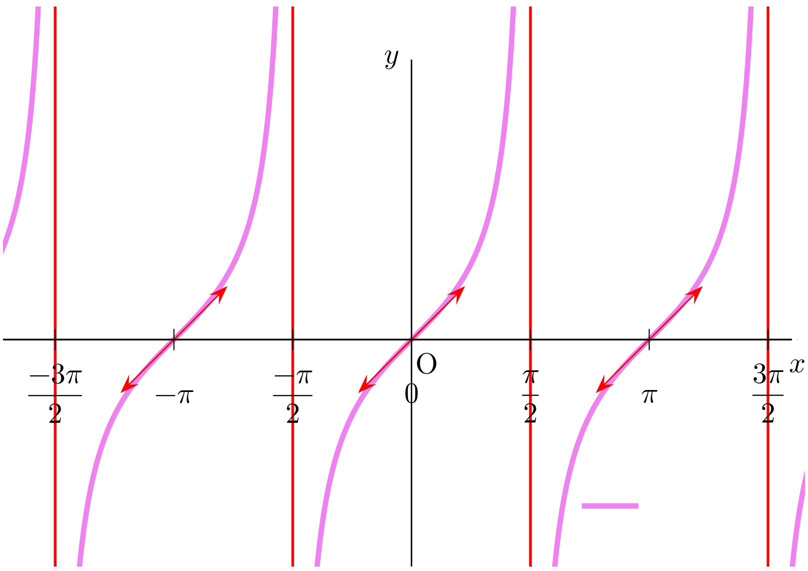


Figure VII.19 – Courbe représentative de $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Proposition 19 (Équations trigonométriques) :

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y \ [\pi].$$

Proposition 20 :

Formule d'addition : Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

— $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

— $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Formule de duplication : Pour tout $(a\,;\in)\,\mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan(2a)$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}. \tag{VII.2}$$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

— $\tan(p)+\tan(q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

— $\tan(p)-\tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

— $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

— $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

— $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 18 : Sans s'occuper du domaine de définition, exprimer $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

V.2 Fonction arctangente

La fonction $\tan : \mathcal{D}_{\tan} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$ s'entend).

La restriction de la fonction tan à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective. On la note $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$.

$$\begin{array}{rccl} \tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} : & \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

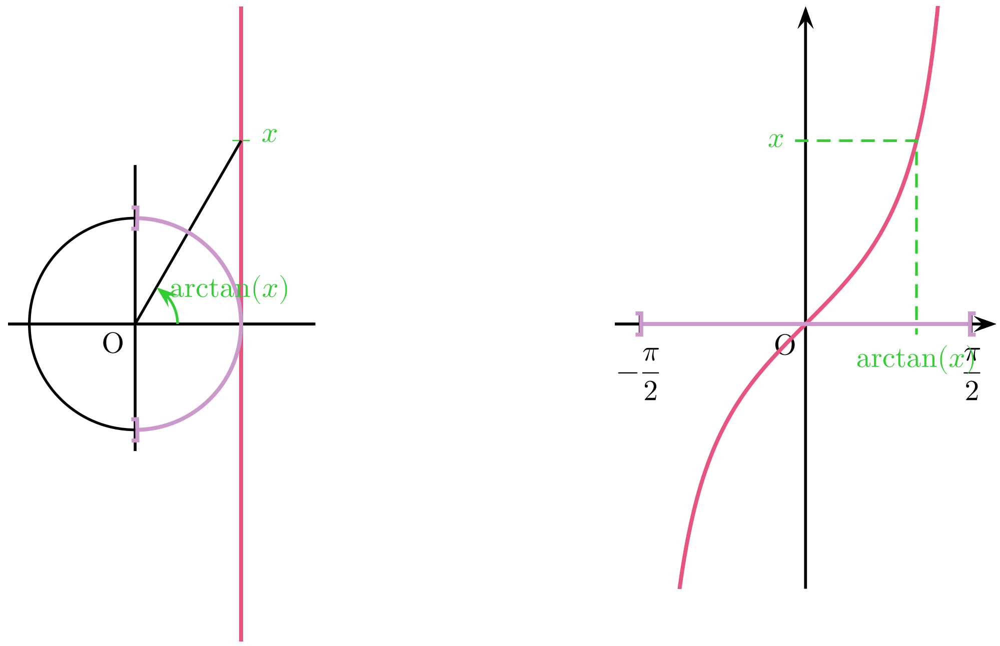


Figure VII.20 – La fonction tan est continue et strictement monotone de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 6 (Arctangente) : On appelle fonction *arctangente*, notée arctan, la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 20.1 (Formule de réciprocité) :
La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

— $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tan\left(\arctan(x)\right) = x$.

— $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\left(\tan(x)\right) = x$.

Exemples 5 :

— $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

— $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$.

— $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Mais **ATTENTION** $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

CHAPITRE VII. FONCTIONS CIRCULAIRES

Exercice 19 : Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Hutton, 1776)}$$

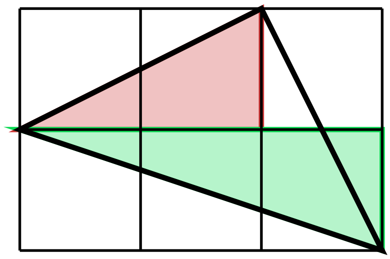


Figure VII.21 – $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 21 :

— La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

— La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— La fonction arctan est impaire.

En particulier, la courbe représentative de tan admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine.

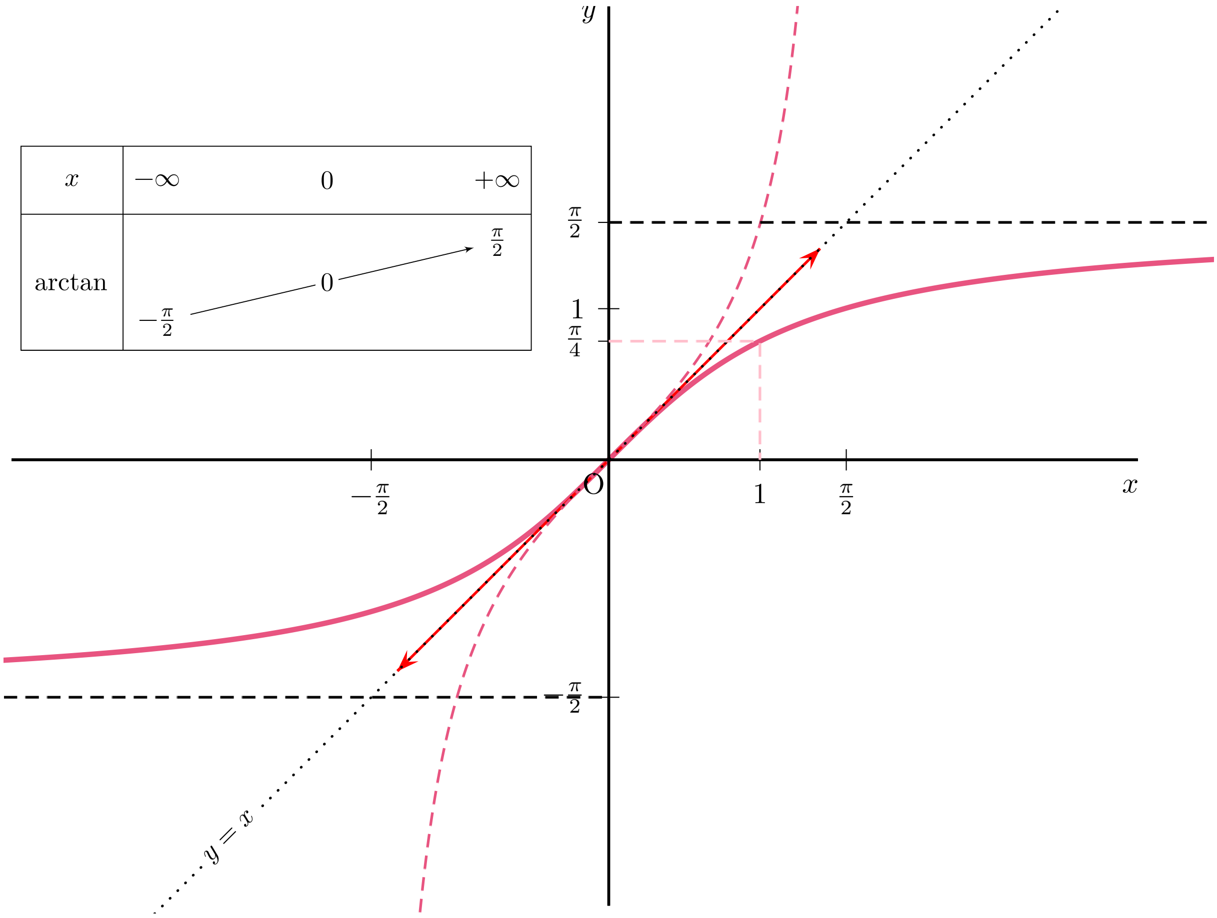


Figure VII.22 – Tableau de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de tan.

Remarque : Les courbes de tan et arctan sont tangentes à l'origine.

Corollaire 21.1 :
Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \Big(\arctan(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Exercice 20 : Étude et représentation graphique de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

Proposition 22 :
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 21 : Montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(a) > \dfrac{a}{1+a^2}$.

Exercice 22 : Étudier les asymptotes de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$

VI/ Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Domaine de définition</th><th>Domaine de dérivabilité</th><th>$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>$\cos(x)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$-\sin(x)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(x)$</td><td>$\cos(x)$</td></tr>
<tr><td>$\tan(x)$</td><td colspan="2">$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi\,;\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$</td><td>$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$</td></tr>
<tr><td>$\arccos(x)$</td><td rowspan="2">$[-1\,;1]$</td><td rowspan="2">$]-1\,;1[$</td><td>$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$\arcsin(x)$</td><td>$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$\arctan(x)$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$\dfrac{1}{1+x^2}$</td></tr>
</table>