

Fonctions circulaires

I/ Un peu de trigonométrie _____

Exercice 1 : Calculer :

$$1. \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad 2. \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \quad 3. \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \quad 4. \sin\left(\frac{121\pi}{6}\right)$$

Exercice 2 : Soit $a \in [\pi; 2\pi]$ la mesure d'un angle tel que $\cos(a) = \frac{1}{5}$. Calculer $\sin(a)$.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x) \quad C = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$$

Exercice 4 :

1. En remarquant que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ puis calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3} + 1)\cos(x) + (\sqrt{3} - 1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Exercice 5 : Calculer la valeur exacte de $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

Exercice 6 : Exprimer $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 7 : Sans se préoccuper des domaines de définition, simplifier les expressions suivantes :

1. $(\cos(x) + \sin(x))^2$
2. $\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$.
3. $\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$.
4. $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.
5. $\sin^6(x) + \cos^6(x) - 2\sin^4(x)$
6. $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} + \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$
7. $\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$
8. $\sin^4(x) - \cos^4(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$
9. $\sin^4(x)(3 - 2\sin^2(x)) + \cos^4(x)(3 - 2\cos^2(x))$

10. $\sin^6(x) + \cos^6(x)$ et résoudre $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{3}{8}$

Exercice 8 :

1. Simplifier l'expression $\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}$.
2. Montrer que $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$;

Exercice 9 : Sachant que $\tan(x) = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

II/ Équations et inéquations trigonométriques _____

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ | 6. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 11. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 2. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 7. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 12. $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}$ |
| 3. $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 8. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$ | 13. $4 \cos^2(x) - 1 = 0$ |
| 4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ | 9. $\sin^2(x) - 5 \sin(x) + 6 = 0$ | 14. $\sqrt{1 - \sin^2(x)} + \sin(x) = \sqrt{2}$ |
| 5. $\sin(3x) = \cos(2x)$ | 10. $\cos(x) + \sin(x) = 1$ | 15. $\cos^2(x) + 2 \cos(x) - 3 = 0$ |
| | | 16. $\sqrt{2} \sin(x) - \sqrt{6} \cos(x) = 2$ |

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

- | | |
|---|---|
| 1. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 6. $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 \geq 0$ |
| 2. $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$ | 7. $2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) + 2 < 0$ |
| 3. $\cos(x) < 0$ | 8. $\cos^2(x) - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq 0$ |
| 4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 9. $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) + \sqrt{3} > 0$ |
| 5. $\sin(4x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 10. $4 \sin^2(x) - 3 \leq 0$ |
| | 11. $\sin(2x) > \cos(x)$ |
| | 12. $\sin(2x) + \cos(2x) > 0$ |

Exercice 12 : Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Exercice 13 : Résoudre $\tan(x) \tan(4x) = -1$

III/ Fonctions trigonométriques _____

Exercice 14 : Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$$

$$g : x \mapsto \sin^2(x) - \sin(2x) \sin(3x)$$

$$h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$i : x \mapsto x \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$j : x \mapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \right)^2.$$

$$k : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}$$

Exercice 15 : Vérifier que la fonction f est T-périodique.

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ avec } T = \pi$$

$$f_2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ avec } T = \pi$$

$$f_3(x) = \sin(10\pi x) \text{ avec } T = 0, 2.$$

$$f_4(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ avec } T = \frac{\pi}{2}$$

$$f_5(x) = \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right) \text{ avec } T = \frac{3\pi}{5}$$

$$f_6(x) = \frac{2}{5} \cos(3\pi x) \text{ avec } T = \frac{2}{3}$$

$$f_7(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 16 : Sans se préoccuper des domaines de définition, proposer un domaine d'étude minimal pour les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin(2x)$$

$$h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$j : x \mapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \right)^2.$$

$$g : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$$

$$i : x \mapsto \frac{x \sin(x)}{\cos(x)}$$

$$k : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x + 1}$$

Exercice 17 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(x) \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(x^2)$$

$$f_3(x) = \cos^2(x)$$

$$f_4(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f_5(x) = \frac{3}{2 \cos(x)}$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(x)}{x + \sin(x)}$$

$$f_7(x) = \frac{\cos(x) + 2}{\sin^2(x) + 2}$$

$$f_8(x) = \frac{2 \cos(x) + 3}{2 \cos(x) - 3}$$

$$f_9(x) = (5x - 3)^3 \cos(x)$$

$$f_{10}(x) = (3x^2 - 2) \sin^2(x)$$

$$f_{11}(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_{12}(x) = \frac{2 \cos(2x)}{3 - \sin(1 - x)}$$

Exercice 18 : Pour tout $x \in [0; +\infty[$, montrer successivement que :

1. (a) $\sin(x) \leq x$.

(c) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.

(b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

(d) $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 19 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin(3x) - 5 \cos(3x)$.

Établir une relation entre les fonctions f et f'' .

Exercice 20 : Étudier la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x).$$

(Domaine de définition, périodicité, parité, domaine d'étude, variation, ...)

Exercice 21 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}.$$

- Déterminer le domaine de définition de f ainsi qu'un domaine d'étude minimal.
- Déterminer les limites aux bornes du domaine d'étude.
- Donner le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 22 : Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est périodique de période π .

3. Montrer que $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

En déduire un domaine d'étude minimal de I .

4. Étudier les variations de f sur I et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . Préciser les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox) .
5. Montrer que 5 admet un unique antécédent par f sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$.

En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 23 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + x$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

- Montrer que f est impaire.
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(2\pi; 2\pi)$.
- Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
- Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
- En se servant des questions précédentes, représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 5\pi]$.

Exercice 24 : Étudier les fonctions $f : x \mapsto x - \tan(x)$ et $g : x \mapsto \sqrt{\tan(2x)}$.

IV/ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 25 : Simplifier :

1. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ 2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ 3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ 4. $\arccos(\cos(4\pi))$

Exercice 26 : Simplifier $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 27 : Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Exercice 28 : Vérifier que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$

Exercice 29 : Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x) + \arcsin(y))$
2. $\tan(2 \arctan(x))$.
3. $\cos(2 \arccos(x))$.
4. $\tan(2 \arcsin(x))$.
5. $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.
6. $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.
7. $\cos(\arctan(x))$. En déduire $\sin(\arctan(x))$.
8. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

Exercice 30 : Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.
2. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.
3. $\arcsin(x) + \arccos(x\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$
5. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$.
6. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 31 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Donner l'expression de f_0 , f_1 et f_2 en fonction de x .
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale.

Exercice 32 :

1. Résoudre l'équation : $\cos(4x) = -\sin(x)$.
2. Soit $x_0 = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4x_0)$ à partir de $\cos(2x_0)$ et $\cos(x_0)$.
3. En déduire x_0 .

Exercice 33 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$$

$$f_3 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$f_2 : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$f_4 : x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$f_5 : x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

Exercice 34 : Étudier les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x)).$$

$$f_2 : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)).$$

$$f_3 : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right).$$

Exercice 35 : Montrer que le sinus et le cosinus d'angle α sont des nombres rationnels si, et seulement si $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ n'est pas défini ou est aussi rationnel.

Exercice 36 : Montrer que :

$$1. \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = 2 \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$3. \arctan(2\sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2}) = \pi$$

$$2. \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$4. \arctan\left(\frac{2013 - \frac{1}{2013}}{2}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{2013}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$5. \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

[Hutton, 1776]

$$6. 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

[Machin, 1706]

Exercice 37 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations :

$$1. \arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \arctan\left(\frac{x}{2(1-x^2)}\right) = \arcsin(x)$$

$$2. \arctan(3-x) + \arctan\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$4. \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 38 :

$$1. \text{ Montrer que si } 0 < ab < 1, \text{ alors } \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

$$2. \text{ Calculer } \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8).$$

$$3. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation : } \arctan(x) + \arctan(x+3) + \arctan(x-3) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 39 : Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

Exercice 40 : Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arctan(\tan(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 :

$$1. \text{ Exprimer } \tan(x-y) \text{ en fonction de } \tan(x) \text{ et } \tan y.$$

$$2. \text{ En déduire que pour tous réels } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0, \arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

$$3. \text{ Vérifier l'égalité } \frac{2}{k^2} = \frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k-1)(k+1)}.$$

$$4. \text{ Déduire des résultats précédents la convergence de la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ définie par}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right).$$

Exercice 42 : Calculer et simplifier les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$
2. $f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$

Exercice 43 : Donner le domaine de définition, l'ensemble des points où elle est dérivable et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin(x).$$

Exercice 44 : Montrer que $\forall x > 0, \arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.