Fonctions circulaires

I/ Un peu de trigonométrie

Exercice 1 : Calculer :

1. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\dfrac{121\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : Soit $a \in [\pi\,;2\pi]$ la mesure d'un angle tel que $\cos(a) = \dfrac{1}{5}$. Calculer $\sin(a)$.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$A = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ $B = \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$ $C = \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

Exercice 4 :

1. En remarquant que $\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$, montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ puis calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos(x) + (\sqrt{3}-1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Correction :

3. $(\sqrt{3}+1)\cos(x) + (\sqrt{3}-1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(x) + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin(x) + \sqrt{3} &= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Donc $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Exercice 5 : Calculer la valeur exacte de $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

Correction : $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}.$

Exercice 6 : Exprimer $\cos^2(x)-\cos(x)\sin(x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Correction : $\forall\, x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \cos^2(x)-\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\,(1-\tan(x)) = \dfrac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$

Exercice 7 : Sans se préoccuper des domaines de définition, simplifier les expressions suivantes :

1. $(\cos(x)+\sin(x))^2$
2. $\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)$.
3. $\sin(3x)\cos(2x)-\sin(2x)\cos(3x)$.
4. $\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
5. $\sin^6(x)+\cos^6(x)-2\sin^4(x)$
6. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)}+\dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)}$
7. $\sin(x)+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$
8. $\sin^4(x)-\cos^4(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)$
9. $\sin^4(x)\left(3-2\sin^2(x)\right)+\cos^4(x)\left(3-2\cos^2(x)\right)$
10. $\sin^6(x)+\cos^6(x)$ et résoudre $\sin^6(x)+\cos^6(x)=\dfrac{3}{8}$

Exercice 8 :

1. Simplifier l'expression $\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$.
2. Montrer que $\tan\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;

Correction :

1. $\forall\, x \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,
$$\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$
2. $7=4+3$...

Exercice 9 : Sachant que $\tan(x)=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$, où $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+\right)^2$, calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Correction : $\cos^2(x)=\dfrac{1}{1+\tan^2(x)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{a+b}{2a}$ et $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=\dfrac{a-b}{2a}$.

Comme $\tan(x) \geqslant 0$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont de même signe donc les couples solutions sont $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2a}}\,;\sqrt{\dfrac{a-b}{2a}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\dfrac{a+b}{2a}}\,;-\sqrt{\dfrac{a-b}{2a}}\right)$

Enfin, $0 < \dfrac{a-b}{a+b} < 1$, entraîne que $\sin(x) \leqslant \cos(x)$. Le seul couple possible est donc le premier *i.e.*

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{a+b}{2a}} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sqrt{\frac{a-b}{2a}}.$$

II/ Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$
2. $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\cos(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$
5. $\sin(3x) = \cos(2x)$
6. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
7. $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$
9. $\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6 = 0$
10. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
11. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
12. $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$
13. $4\cos^2(x) - 1 = 0$
14. $\sqrt{1-\sin^2(x)} + \sin(x) = \sqrt{2}$
15. $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$
16. $\sqrt{2}\sin(x) - \sqrt{6}\cos(x) = 2$

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$
3. $\cos(x) < 0$
4. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin(4x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \geqslant 0$
7. $2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 < 0$
8. $\cos^2(x) - \left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 0$
9. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{3} > 0$
10. $4\sin^2(x) - 3 \leqslant 0$
11. $\sin(2x) > \cos(x)$
12. $\sin(2x) + \cos(2x) > 0$

Exercice 12 : Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Correction : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ ...

Exercice 13 : Résoudre $\tan(x)\tan(4x) = -1$

Correction : Il est nécessaire que $4x \in \mathcal{D}_{tan}$ et $x \in \mathcal{D}_{tan}$ *i.e.* $x \not\equiv \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Enfin $\tan(x) \neq 0$ et $\tan(4x) \neq 0$ entraînent $x \not\equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$\begin{aligned}
\tan(x)\tan(4x) = -1 &\iff \tan(4x) = -\frac{1}{\tan(x)} \\
&\iff \tan(4x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
&\iff 4x \equiv \frac{\pi}{2} + x\ [\pi] \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

Faut-il retirer des solutions ?

Ce sera le cas si, et seulement si $\exists\ (k\,;k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k' \\
\frac{1}{4}k' - \frac{1}{3}k &= \frac{1}{24} \\
6k' - 8k &= 1.
\end{aligned}$$

Un nombre pair ne pouvant être égal à un nombre impair, cette équation n'a pas de solutions.

De même, $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k = \dfrac{\pi}{2} + k'\pi \iff 2k - 6k' = 2 \iff k = 1 + 3k' \iff k \equiv 1\ [3]$.

Enfin, $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k = k'\dfrac{\pi}{4} \iff 3k' - 4k = 2 \iff 3k' = 2(1+2k)$. Comme 3 ne divise pas 2, il divise $1+2k$ *i.e.* $\exists m \in \mathbb{Z}$, tel que $1 + 2k = 3m$ et $k' = 2m$ ce qui revient encore à $k \equiv 1\ [3]$.

Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k,\ k \not\equiv 1\ [3]\right\} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \ldots\right\}$.

III/ Fonctions trigonométriques

Exercice 14 : Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
f : x &\longmapsto \sin(x) - \cos(x) \\
g : x &\longmapsto \sin^2(x) - \sin(2x)\sin(3x) \\
h : x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
i : x &\longmapsto x\frac{\sin(x)}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j : x &\longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2. \\
k : x &\longmapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}
\end{aligned}$$

Exercice 15 : Vérifier que la fonction f est T-périodique.

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ avec } \mathrm{T} = \pi$$
$$f_2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ avec } \mathrm{T} = \pi$$
$$f_3(x) = \sin(10\pi x) \text{ avec } \mathrm{T} = 0,2.$$
$$f_4(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{\pi}{2}$$
$$f_5(x) = \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{3\pi}{5}$$
$$f_6(x) = \frac{2}{5}\cos(3\pi x) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{2}{3}$$
$$f_7(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 16 : Sans se préoccuper des domaines de définition, proposer un domaine d'étude minimal pour les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \sin(2x) \qquad h : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad j : x \longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2.$$
$$g : x \longmapsto \sin(x) - \cos(x) \qquad i : x \longmapsto \frac{x\sin(x)}{\cos(x)} \qquad k : x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x + 1}$$

Exercice 17 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(x)\sin(x)$$
$$f_2(x) = \sin(x^2)$$
$$f_3(x) = \cos^2(x)$$
$$f_4(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$f_5(x) = \frac{3}{2\cos(x)}$$
$$f_6(x) = \frac{\cos(x)}{x + \sin(x)}$$
$$f_7(x) = \frac{\cos(x) + 2}{\sin^2(x) + 2}$$
$$f_8(x) = \frac{2\cos(x) + 3}{2\cos(x) - 3}$$
$$f_9(x) = (5x-3)^3\cos(x)$$
$$f_{10}(x) = (3x^2 - 2)\sin^2(x)$$
$$f_{11}(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f_{12}(x) = \frac{2\cos(2x)}{3 - \sin(1-x)}$$

Exercice 18 : Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, montrer successivement que :

1. (a) $\sin(x) \leqslant x$.
   (b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.
   (c) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.
   (d) $\cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Correction : L'exercice est un peu répétitif mais s'enchaîne bien, résultat classique des propriétés des séries alternées que nous devons, pour l'instant, redémontrer à la main.

1. (a) Posons $\mu : x \longmapsto \mu(x) = \sin(x) - x$.

   La fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
   $$\mu'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0.$$

Fonctions circulaires

La fonction μ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mu(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \mu(x) \leqslant 0 \iff \boxed{\sin(x) \leqslant x.}$$

(b) Posons $\theta : x \longmapsto \theta(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\theta'(x) = -\sin(x) + x \geqslant 0.$$

La fonction θ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \theta(x) \geqslant 0 \iff \boxed{\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.}$$

(c) Posons $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant 0 \iff \boxed{\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.}$$

(d) Posons $\Psi : x \longmapsto \Psi(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!}$.

La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\Psi'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} \leqslant 0.$$

La fonction Ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Psi(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \Psi(x) \leqslant 0 \iff \boxed{\cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.}$$

2. En regroupant les résultats des questions précédentes, on obtient, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

- $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x.$
- $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}.$

On obtient alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} \leqslant \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Un petit argument de parité permettra alors de passer de la limite à droite à la limite tout court.

Exercice 19 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.

Établir une relation entre les fonctions f et f''.

Exercice 20 : Étudier la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x).$$

(Domaine de définition, périodicité, parité, domaine d'étude, variation, ...)

Exercice 21 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f ainsi qu'un domaine d'étude minimal.
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine d'étude.
3. Donner le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 22 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est périodique de période π.
3. Montrer que $A\left(\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

   En déduire un domaine d'étude minimal de I.
4. Étudier les variations de f sur I et donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A. Préciser les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec $(\mathrm{O}x)$.
5. Montrer que 5 admet un unique antécédent par f sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$.

   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 23 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\,(2\pi\,;2\pi)$.
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;\pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. En se servant des questions précédentes, représenter $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;5\pi]$.

Exercice 24 : Étudier les fonctions $f : x \longmapsto x - \tan(x)$ et $g : x \longmapsto \sqrt{\tan(2x)}$.

IV/ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 25 : Simplifier :

1. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\cos(4\pi)\right)$

Exercice 26 : Simplifier $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Correction : $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 27 : Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Correction : Posons $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

On sait que $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$.

Or, $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) \geqslant 0$ et $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D'où $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$.

Par imparité de $\arcsin$, $\sin(\theta) \geqslant 0$ puis $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ du même signe que $\sin(\theta)$ entraîne $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$.

Donc $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$.

Exercice 28 : Vérifier que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$

Correction :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) &= \frac{5}{13}\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) + \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right)\\
&= \frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\\
&= \frac{5}{13}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\frac{12}{13} = \frac{56}{65}.
\end{aligned}$$

On en conclut que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \equiv \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) \quad [2\pi]$

ou

$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \equiv \pi - \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) \quad [2\pi]$.

Or, $\frac{1}{2} < \frac{56}{65} < 1$ entraîne $0 < \frac{\pi}{4} < \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) < \frac{\pi}{2}$.

Et, $0 < \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ induit $0 < \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) < \frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2} < \left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ induit $\frac{\pi}{6} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$.

Finalement, $0 < \frac{\pi}{4} < \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Conclusion, $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$.

Exercice 29 : Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x) + \arcsin(y))$
2. $\tan(2\arctan(x))$.
3. $\cos(2\arccos(x))$.
4. $\tan(2\arcsin(x))$.
5. $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.
6. $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.
7. $\cos(\arctan(x))$. En déduire $\sin(\arctan(x))$.
8. $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Correction :

1. $\sin(\arcsin(x) + \arcsin(y)) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, $x, y \in [-1\,;1]$.
2. $\tan(2\arctan(x)) = \frac{2x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.
3. $\cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1\,;1]$.
4. On a $\tan(2x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-2\sin^2(x)}$.

   Donc, $\tan(2\arcsin(x)) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$, $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Fonctions circulaires

5. $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1\,;1]$.

   Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1\,;1[$.
6. $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1\,;1]$.

   On en déduit, $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in [-1\,;0[\cup]0\,;1]$.
7. $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Comme $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$, alors $\sin(\arctan(x)) = \sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
8. Nécessairement, $x \in [-1\,;1]$. Il existe donc un unique $u \in [0\,;\pi]$ tel que $x = \cos(u)$.

   On a alors $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin\left(2\cos(u)\sin(u)\right) = 2u = 2\arccos\left(x\right)$.

Exercice 30 : Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
2. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right)$.
3. $\arcsin(x) + \arccos\left(x\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \dfrac{\pi}{2}$.
6. $\arcsin(2x) - \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin(x)$.

Exercice 31 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos(x))$.

1. Donner l'expression de f_0, f_1 et f_2 en fonction de x.
2. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale.

Correction : Il est clair que $x \in [-1\,;1]$ dans tout cet exercice.

1. De $\cos(0) = 1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on en déduit aisément que :
$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = 2x^2 - 1.$$
2. Montrons par récurrence triple sur $n \in \mathbb{N}$ que f_n est une fonction polynomiale.

   La première question nous donne l'initialisation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

   Supposons qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$, telles que f_n, f_{n-1} et f_{n-2} soient polynomiales.

   On a :
$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) &= \cos\left((n+1)\arccos(x)\right)\\ &= \cos\left(n\arccos(x)\right)\cos\left(\arccos(x)\right) - \sin\left((n-1+1)\arccos(x)\right)\sin\left(\arccos(x)\right)\\ &= xf_n(x) - \sin\left((n-1)\arccos(x)\right)\cos\left(\arccos(x)\right)\sin\left(\arccos(x)\right)\\ &\qquad\qquad + \cos\left((n-1)\arccos(x)\right)\sin^2\left(\arccos(x)\right)\\ &= xf_n(x) + x\sin\left((n-1)\arccos(x)\right)\sin\left(\arccos(x)\right) + (1-x^2)f_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Fonctions circulaires

Enfin, $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$ donne

$$\begin{aligned} &= xf_n(x) + \frac{1}{2}x\left(\cos\left((n-2)\arccos(x)\right) - \cos\left(n\arccos(x)\right)\right) + (1-x^2)f_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{2}xf_n(x) + \frac{1}{2}xf_{n-2}(x) + (1-x^2)f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire et produit par des puissances de x, f_{n+1} est bien une fonction polynomiale et la propriété est héréditaire.

Initialisée de $n=0$ à 3, la propriété est vraie pour tout $n \in_{\mathrm{N}}$ d'après le principe de récurrence.

Remarque : On pouvait être plus efficace mais ce n'était pas le propos de l'exercice.

En effet, $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$ d'où

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x) \iff f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$

et une récurrence double suffisait à répondre à l'exercice.

Exercice 32 :

1. Résoudre l'équation : $\cos(4x) = -\sin(x)$.
2. Soit $x_0 = \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4x_0)$ à partir de $\cos(2x_0)$ et $\cos(x_0)$.
3. En déduire x_0.

Correction :

1. $$\begin{aligned} \cos(4x) = -\sin(x) &\iff \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\iff 4x \equiv \frac{\pi}{2} + x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad -4x \equiv \frac{\pi}{2} + x\ [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{3\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{aligned}$$

2. $\cos^2(x_0) = 1 - \sin^2(x_0) = 1 - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$.

   Comme $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x_0) \geqslant 0$ et $\cos(x_0) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

   Or $\cos(2x_0) = 2\cos^2(x_0) - 1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

   Et, $\cos(4x_0) = 2\cos^2(2x_0) - 1 = 2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} - 1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = -\sin(x_0)$.

3. D'après la question précédente, x_0 est donc une solution trouvée à la première question.

   Or, $\left\{-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{10}\right\}$ sont les seules solutions dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Fonctions circulaires

Comme $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \geqslant 0$, par imparité de $\arcsin$ cela ne peut être $-\dfrac{\pi}{10}$.

De même, $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$ par stricte croissance de $\arcsin$.

La seule solution possible est donc $x_0 = \dfrac{3\pi}{10}$.

Exercice 33 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

$f_1 : x \longmapsto \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$

$f_2 : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$f_3 : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$f_4 : x \longmapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$f_5 : x \longmapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Correction :

1. $\mathcal{D}_{f_1} = [-1\,;1] \cap \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\mathcal{D}_{f_1'} = \left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{f_1'},\ f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

2. $f_2'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. $f_3'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 34 : Étudier les fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$.

$f_2 : x \longmapsto \arccos(\cos(x)) + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

$f_3 : x \longmapsto \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(2x)}{2}}\right)$.

Exercice 35 : Montrer que le sinus et le cosinus d'angle α sont des nombres rationnels si, et seulement si $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ n'est pas défini ou est aussi rationnel.

Exercice 36 : Montrer que :

1. $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$
2. $\arctan\left(\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
3. $\arctan\left(2\sqrt{2}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \pi$
4. $\arctan\left(\dfrac{2013 - \frac{1}{2013}}{2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{2013}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ [Hutton, 1776]
6. $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ [Machin [1], 1706]

Correction : Tout repose sur la formule, dans ses conditions de validité, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

6. De même, $\tan\left(2\arctan\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$ puis

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \tan\left(2\times 2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Enfin, $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1} = \dfrac{1}{239}$.

On en déduit que :

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 37 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations :

1. $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $\arctan(3-x) + \arctan\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.
3. $\arctan\left(\dfrac{x}{2\left(1-x^2\right)}\right) = \arcsin(x)$
4. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Correction :

1. $$\begin{aligned}\arctan(2x)+\arctan(3x) = \frac{\pi}{4} &\iff \tan\Big(\arctan(2x)+\arctan(3x)\Big) = 1\\ &\quad\text{et } \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff \frac{5x}{1-6x^2} = 1 \text{ et } \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff x=-1 \text{ ou } x=\frac{1}{6} \text{ et } \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

[1]. La formule de Machin fut découverte en 1706 par John Machin et relie le nombre π à la fonction trigonométrique arctangente :

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}.$$

Cette formule permet de calculer une approximation du nombre π grâce au développement en série entière de la fonction arctangente. John Machin l'utilisa pour obtenir les cent premières décimales de π.

Or, -1 ne convient pas car $\arctan(-1) + \arctan(-3) < 0 \neq \frac{\pi}{4}$.

Mais, $0 = 0 + 0 < \arctan\left(\frac{2}{6}\right) + \arctan\left(\frac{3}{6}\right) < \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

Donc l'unique solution est $\frac{1}{6}$.

Exercice 38 :

1. Montrer que si $0 < ab < 1$, alors $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.
2. Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arctan(x) + \arctan(x+3) + \arctan(x-3) = \frac{\pi}{4}$.

Correction :

1. Soient a et b tels que $0 < ab < 1$.

   Dans son domaine de validité, on utilise simplement la formule $\tan(p+p) = \frac{\tan(p) + \tan(q)}{1 - \tan(p)\tan(q)}$.

   $$\tan(\arctan(a) + \arctan(b)) = \frac{a+b}{1-ab}$$

   Donc $\arctan(a) + \arctan(b) \equiv \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \ [\pi]$.

   Par définition, de $\arctan$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) < \frac{\pi}{2}$.

   Comme $ab > 0$, a et b sont de même signe. Supposons les positifs dans perdre de généralité. alors $0 < \arctan(a) < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \arctan(b) < \frac{\pi}{2}$ entraînent $0 < \tan(\arctan(a) + \arctan(b)) < \pi$ et

   $$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

2. Il suffit d'appliquer deux fois la formule précédente :

   $$\begin{aligned}\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) &= \arctan\left(\frac{2+5}{1-2\times 5}\right) + \arctan(8) = \arctan\left(-\frac{7}{9}\right) + \arctan(8)\\ &= \arctan\left(\frac{-\frac{7}{9}+8}{1+\frac{7}{9}\times 8}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{65}{9}}{\frac{65}{9}}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. Posons $\varphi : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan(x+3) + \arctan(x-3)$ qui est clairement strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions croissantes et continues. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image.

   D'après la question précédente, $\varphi(2) = \frac{\pi}{4}$.

   Par bijectivité de φ, 2 est donc l'unique solution.

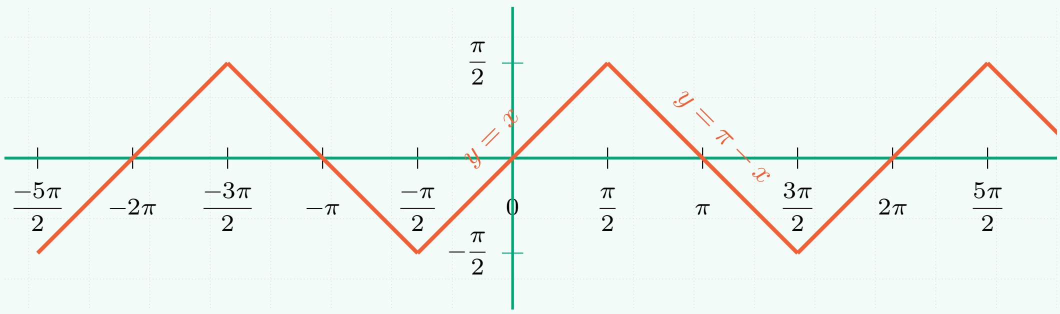
Exercice 39 : Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin(x))$.

Correction : $x \longmapsto \arcsin(\sin(x))$ est impaire par composition et 2π-périodique. On l'étudie donc sur $[0\,;\pi]$ avant de compléter la courbe par symétrie de centre O et par translations de vecteur $2\pi\vec{j}$.

Or, $\forall\, x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

De plus, $\forall\, x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\pi - x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

D'où, la courbe :



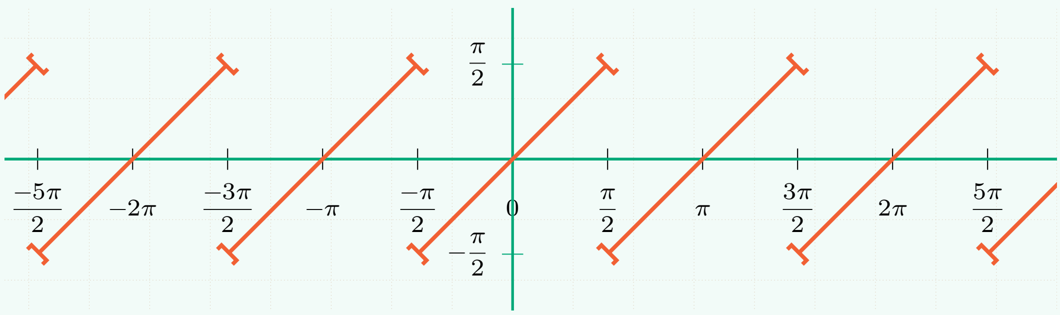
Exercice 40 : Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathcal{D}_{tan}$ où elle est impaire par composition et π-périodique. On l'étudie donc sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ avant de compléter la courbe par symétrie de centre O et par translations de vecteur $\pi\vec{j}$.

D'après les théorème sur les limites de composées, on trouve aisément $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan(x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

Or, $\forall\, x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

D'où, la courbe :



Exercice 41 :

1. Exprimer $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan y$.
2. En déduire que pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
3. Vérifier l'égalité $\dfrac{2}{k^2} = \dfrac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)}$.
4. Déduire des résultats précédents la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right).$$

Exercice 42 : Calculer et simplifier les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$
2. $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$

Correction :

1. Par composition et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle y est même strictement croissante) et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x+1)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{3x^4+6x^2+8}{(4+x^4)(1+x^2)} \end{aligned}$$

   Remarque : Inutile de factoriser plus avant car seul le signe nous intéressera et on l'a.

2. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)}\sin\left(\arctan(x)\right) \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Exercice 43 : Donner le domaine de définition, l'ensemble des points où elle est dérivable et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin(x).$$

Correction : La présence du $\arcsin$ impose déjà $x \in [-1\,;1]$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, dérivable et à valeurs strictement positive si, et seulement si $x \in \left]-1\,;1\right[$.

On étudiera donc f sur $\left]-1\,;1\right[$ où elle est dérivable par composition et on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ f'(x) &= 2\frac{\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= \frac{-\dfrac{2}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\dfrac{2}{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarque : On en déduit que $f(x) = \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donne :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On peut le démontrer directement. Comme $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\exists! u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \cos(u)$.

$$\begin{aligned}
2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin(x) &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(u}{1+\cos(u)}}\right) + \arcsin(x)\\
&= 2\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}\right) + \arcsin(x)\\
&= u + \arcsin(x)\\
&= \arccos(x) + \arcsin(x)\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 44 : Montrer que $\forall\, x > 0$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Correction : On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ et $g(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Par composition f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in \left]-1\,;1\right[$ il en est de même de g et on a :

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}}\frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

Or, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Donc, $f'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$ et $g'(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1} \times \text{ch}(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$.

Les deux fonctions f et g diffèrent donc d'une constante.

Comme $f(0) = \arctan(\text{sh}(0)) = \arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch}(0)}\right) = \arccos(1) = 0$, on en déduit $f(0) = g(0)$ puis $f = g$ sur $\mathbb{R}^+$.