

Fonctions de référence, sommes et produits

1. Fonctions usuelles

- Le logarithme népérien $\left(x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt\right)$.
 - Continuité, dérivation, monotonie, propriétés algébriques, limite aux bornes, graphe, croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La fonction exponentielle (comme réciproque de la fonction logarithme).
 - Continuité, dérivation, propriétés algébriques, graphe, limites aux bornes et croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
- Les fonctions exponentielle et logarithme en base a .
 - Dérivation, propriétés algébriques, graphes.
- Les fonctions puissances.
 - dérivation, propriétés algébriques, limites aux bornes, prolongement par continuité en 0, monotonie, graphes, croissances comparées.
- Les fonctions hyperboliques :
 - Définition, parité, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, limites aux bornes, variations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \frac{e^x}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

2. Sommes et Produits

- Notations \sum et \prod et manipulations.
- Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
- Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
- Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$.
- Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Sommes des termes.
- Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
- Définition de $n!$ et du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
- Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton et intégrité.
- Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle. Cas des variables séparées.
- Produit de sommes, carré d'une somme.

Questions de cours possibles^[1] :

1. La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...
2. Limites remarquables de la fonction \ln avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.
3. Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit.
4. (★) Croissances comparées asymptotiques : formules et démonstration.
5. Limites locales et asymptotiques remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites)
6. Valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.
7. (★) Formule du binôme de Newton.
8. Somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$: $\sum_{k=m}^n u_k = \dots$
9. Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = \dots$

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.