Premières rencontres

Exercice 1 (Divergence de la série harmonique) – On note, pour tout entier $n > 0$:

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Quels sont alors les comportements asymptotiques possibles pour la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n = +\infty$.

Exercice 2 – n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. **Inégalité de Chebyshev**
   (a) Pour $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ réels, établir :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) = 2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

   (b) On suppose dans cette question que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

   Montrer l'inégalité de Chebyshev :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

2. **Applications**
   (a) Prouver que :

$$\sum_{i=1}^{n} i 2^i \geqslant (n+1)(2^n - 1).$$

   (b) Pour $a_1, a_2, \cdots, a_n$ réels, montrer que :

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2.$$

3. **Question subsidiaire :** Sauriez-vous simplifier l'expression $\sum\limits_{i=1}^{n} i 2^i$?

Premières rencontres