Première rencontre avec Chebyshev

Correction de l'exercice 1 –

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   D'après le théorème de la limite monotone (qu'on reverra), la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut être que convergente vers un réel ℓ ou divergente vers $+\infty$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{2n-(n+1)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2}$.

3. Si $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était convergente, mettons vers un réel ℓ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_{2n} = \ell$ et d'après le théorème sur les limites de sommes, par passage à la limite (les inégalités larges sont conservées) : $\ell - \ell = 0 \geqslant \dfrac{1}{2}$ qui n'est pas possible.

   Donc la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente, elle diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n = +\infty.$$

Correction de l'exercice 2 –

1. **Inégalité de Chebyshev**

   (a) Pour $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ réels, :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i - a_ib_j - a_jb_i + a_jb_j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(na_ib_i - a_i\sum_{j=1}^{n}b_j - b_i\sum_{j=1}^{n}a_j + \sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(na_ib_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{n}b_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(b_i\sum_{j=1}^{n}a_j\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\\
&= n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i - \left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\sum_{i=1}^{n}a_i - \left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\sum_{i=1}^{n}b_i + n\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\\
&= 2n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)
\end{aligned}$$

   On a bien $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\right) = 2n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$.

   (b) Dans ce cas,

   — lorsque $i < j$, on a $(a_i - a_j) \leqslant 0$ et $(b_i - b_j) \leqslant 0$ donc $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$;
   — lorsque $i = j$, on a $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$;
   — lorsque $i > j$, on a $(a_i - a_j) \geqslant 0$ et $(b_i - b_j) \geqslant 0$ donc $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$;

Finalement, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\right)$ est positive, comme somme de nombres positifs.

D'où, $2n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant 0$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right). \qquad \text{(Inégalité de Chebyshev.)}$$

2. **Application**

(a) On peut utiliser l'inégalité de Chebyshev en posant $a_i=i$ et $b_i=2^i$ qui sont bien des familles croissantes.

On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}i2^i=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i&\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\ \text{d'après l'inégalité de Chebyshev}\\&\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2^i\right)\\&\geqslant\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(2\frac{2^n-1}{2-1}\right)\\&\geqslant(n+1)(2^n-1)\end{aligned}$$

Conclusion, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i2^i\geqslant(n+1)(2^n-1)$.

(b) On considère $a_1,a_2,\cdots,a_n$ réels. On remarque qu'ils ne sont pas nécessairement rangés dans l'ordre croissant.

On les range donc en une famille $a'_1\leqslant a'_2\leqslant\cdots\leqslant a'_n$, et on applique l'inégalité de Chebychev en prenant les deux familles égales à cette dernière :

$$\sum_{i=1}^{n}a'_ia'_i\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a'_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a'_i\right)\iff n\sum_{i=1}^{n}{a'_i}^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a'_i\right)^2.$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a'_i}^2=\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a'_i=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Finalement, $n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$.

3. On va faire appel à une somme télescopique en symétrisant l'expression par rapport à l'indice i :

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)2^{i+1}-i2^i\right)=(n+1)2^{n+1}-2.$$

Mais aussi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)2^{i+1}-i2^{i}\right) &= \sum_{i=1}^{n}2^{i}\left(2(i+1)-i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}2^{i}\left(i+2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}i2^{i}+\sum_{i=1}^{n}2^{i+1}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}i2^{i} &= (n+1)2^{n+1}-2-4\sum_{i=0}^{n-1}2^{i}\\ &= (n+1)2^{n+1}-2-4\left(2^{n}-1\right)\\ &= (n-1)\,2^{n+1}+2.\end{aligned}$$