Un peu de trigonométrie réelle et de calculs algébriques

Exercice 1 – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. À l'aide du changement de variable $\ell = n - k$, établir que $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
2. En déduire une expression très simple de $2\mathrm{S}_n$ en fonction de n, puis conclure quant à la valeur de S_n.

Exercice 2 – On définit les fonctions φ et ψ suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(\sin(2x)). \end{array}$$

1. *Préliminaires.*
   (a) Simplifier $\varphi(x)$ lorsque $x > 0$ et $x < 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x)$.

   Tracer l'allure de la courbe.

   (b) Montrer que ψ est π-périodique.

   Proposer un premier domaine d'étude de ψ et expliquer comment toute la courbe s'obtiendra sur $\mathbb{R}$.

   (c) Étudier la parité de ψ.

   Proposer un domaine d'étude minimal de ψ ? Comment obtiendra-t-on toute la courbe sur $\mathbb{R}$?

   (d) i. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler à quelle condition l'égalité $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ est vérifiée.

   ii. Simplifier $\psi(x)$ lorsque $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ en justifiant.

   iii. On suppose ici $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dans quel intervalle se situe $\pi - 2x$? En déduire une simplification de $\psi(x)$.

   (e) Tracer la courbe représentative de ψ sur $[-\pi\,;\pi]$.

Dans la suite, on pose $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ lorsque cela a un sens.

2. *Domaine d'étude de f.*
   (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leqslant \dfrac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$.
   (b) En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
   (c) Proposer un domaine d'étude minimal de f ? Comment obtiendra-t-on toute la courbe sur $\mathcal{D}_f$?

On se propose d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ de deux façons différentes.

3. *À l'aide de la fonction ψ.*
   (a) Soit $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Simplifier $\dfrac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$.
   (b) En déduire que, $\forall\, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan(t)) = \psi(t)$.
   (c) Si $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $f(x)$ à l'aide de ψ et de la fonction arctan.
   (d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

   Indication : les composées c'est mieux que la dérivée !
4. *À l'aide de sa dérivée.*
   (a) Résoudre les équations $\dfrac{2x}{1+x^2} = 1$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = -1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathcal{D}' = [0\,;1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.
   (c) Démontrer que $\forall\, x \in \mathcal{D}',\ \ f'(x) = \dfrac{2\varphi(1-x)}{1+x^2}$.
   (d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, que l'on récapitulera au sein d'un tableau.

   Placer également $f(0)$, $f(1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (existence et calcul à justifier).
5. *Tracé.*
   (a) Donner les pentes des tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f'(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f'(x)$. On admettra que ces valeurs sont les pentes des demi-tangentes à la courbe à gauche et à droite du point d'abscisse 1.
   (c) Tracer la courbe le plus précisément possible, en prenant pour échelle au moins 2 cm pour 1 unité.

   On pourra utiliser les approximations $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}58$, $\dfrac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ et $\dfrac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$.
6. **Question subsidiaire :** Simplifier l'expression de f.