Un peu de trigonométrie réelle

Correction de l'exercice 1 –

1. Comme $0 \leqslant k \leqslant n$, alors en posant $\ell = n - k$, on aura aussi $0 \leqslant \ell \leqslant n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

2. On a alors :

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1. \end{aligned}$$

Conclusion, $S_n = \dfrac{n+1}{2}$.

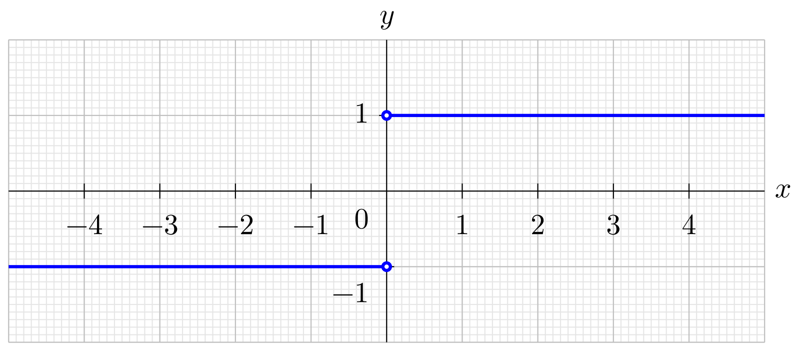
Correction de l'exercice 2 –

1. *Préliminaires.*

(a) Si $x > 0$, $|x| = x$ donc $\varphi(x) = 1$. Si $x < 0$, $|x| = -x$ donc $\varphi(x) = -1$.

$$\forall x \neq 0,\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En particulier, $\varphi(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 1$ et $\varphi(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} -1$.



Commentaires : *Cette fonction donne en fait le signe de x. On trouve souvent la notation sgn(x).*

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ invariant par translation.

Commentaires : *Pensez à l'invariance du domaine !!!!!*

$$\psi(x+\pi) = \arcsin(\sin(2(x+\pi))) = \arcsin(\sin(2x+2\pi)) = \arcsin(\sin(2x)) = \psi(x).$$

Donc, ψ est π-périodique.

Il suffit d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra toute la courbe sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$.

(c) Comme ψ est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0, on peut étudier sa parité.

Commentaires : *Pensez à l'invariance du domaine !!!!!*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions sin et arcsin étant impaires, on a :

$$\psi(-x) = \arcsin(\sin(-2x)) = \arcsin(-\sin(2x)) = -\arcsin(\sin(2x)) = -\psi(x).$$

Donc, ψ est impaire. Il suffit de l'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Toute la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ s'obtiendra par symétrie de centre O puis on complètera sur $\mathbb{R}$ avec les translations précédentes.

(d) i. $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ si, et seulement si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ alors $2x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et on en déduit :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right],\ \psi(x) = \arcsin(\sin(2x)) = 2x.$$

iii. Si $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant \pi$, d'où $-\pi \leqslant -2x \leqslant -\frac{\pi}{2}$ *i.e.* $x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right] \implies \pi-2x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

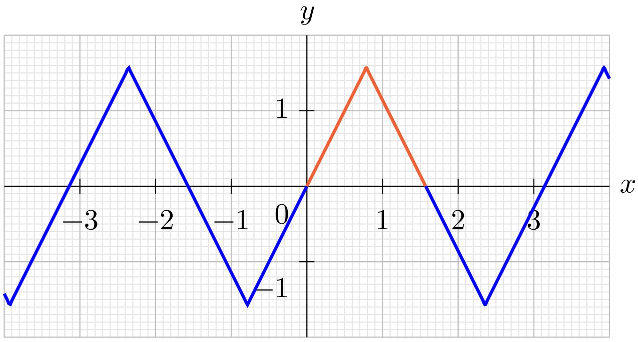
On en déduit :

$$\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right],\ \psi(x) = \arcsin(\sin(2x)) = \arcsin(\sin(\pi-2x)) = \pi - 2x.$$

(e) D'après la question précédente,

$$\varphi_{|[0;\frac{\pi}{2}]}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

On commence par tracer la restriction de ψ à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis on complète par symétrie puis translations.



2. *Domaine d'étude de f.*

(a) On pourrait étudier la fonction $x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$, mais c'est inutilement long... En effet, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant (1+x)^2 = 1 + x^2 + 2x \implies -(1+x^2) \leqslant 2x$$

et,

$$0 \leqslant (1-x)^2 = 1 + x^2 - 2x \implies 2x \leqslant 1 + x^2.$$

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1+x^2$ et, avec $0 < 1+x^2 \leqslant 1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Commentaires : *On pouvait aussi utiliser l'imparité de $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $[-1\,;1]$ et montrer seulement que $\dfrac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$ sur $[0\,;1]$ avant de conclure par symétrie.*

(b) D'après la question précédente, la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$ qui est le domaine de définition de arcsin donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(c) Par composée de fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, la fonction f est clairement impaire. On l'étudiera donc sur $\mathbb{R}_+$ et on complètera la courbe par symétrie de centre l'origine du repère.

3. *À l'aide de la fonction ψ.*

(a) Soit $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan(t)$ est définie, $\cos(t) \neq 0$ et on a :

$$\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = 2\,\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cos^2(t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t).$$

Commentaires : *Pensez à dire que $\tan(t)$ est définie pour ces choix de t !*

(b) Comme $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, d'après ce qui précède,

$$f(\tan(t)) = \arcsin\left(\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}\right) = \arcsin(\sin(2t)) = \psi(t).$$

(c) Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x = \tan(\arctan(x))$, alors, en posant $t = \arctan(x)$, on obtient :

$$f(x) = f(\tan(\arctan(x))) = \psi(\arctan(x)).$$

(d) La fonction arctan est (strictement) croissante sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$. La fonction f a donc la même monotonie que ψ.

On en déduit le tableau de variation de f ainsi que les valeurs aux bornes par composition :

x	0		1		$+\infty$
arctan	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Remarque : Par composition, et si nécessaire, les monotonies sont strictes.

4. *À l'aide de sa dérivée.*

(a) Avec $1+x^2 \neq 0$, rien de difficile. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = 1+x^2 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

L'équation $\dfrac{2x}{1+x^2} = -1$ n'a, quant à elle, pas de solution sur $\mathbb{R}_+$ car le membre de gauche est clairement positif.

(b) Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est dérivable et à valeurs dans le domaine de dérivabilité de arcsin $]-1\,;1[$ si, et seulement si $x \neq 1$ d'après la question précédente.

Donc, f est dérivable sur $\mathcal{D}' = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

(c) Soit $x \in \mathcal{D}'$. Avec $\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(2x)^2}} && ,\ 1+x^2>0 \\
&= \frac{2(1-x)(1+x)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1+2x+x^2)(1-2x+x^2)}} && ,\ a^2-b^2 = \ldots \\
&= \frac{2}{1+x^2} \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2}} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}} \\
&= \frac{2}{1+x^2} \frac{1+x}{1+x} \frac{1-x}{|1-x|} && ,\ 1+x>0 \text{ si } x \in \mathcal{D}' \\
&= \frac{2\varphi(1-x)}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Commentaires : *Pensez à justifier que* $1+x>0$.

(d) Soit $x \in \mathcal{D}'$. Comme $\dfrac{2}{1+x^2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(1-x)$.

Or, d'après l'étude de φ, on sait que $\varphi(t)$ est du même signe que t si $t \neq 0$. Par conséquent, $\varphi(1-x)$ est du signe de $1-x$ s'annulant pour $x=1$ et on a :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

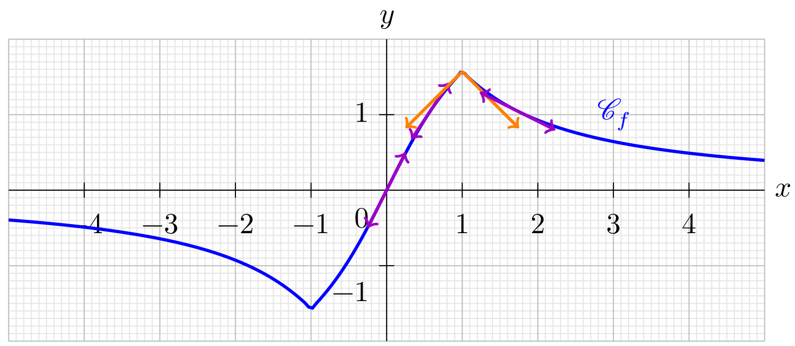
- $f(0) = \arcsin(0) = 0$.
- $f(1) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
- Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ d'après les théorèmes sur les sommes, quotients puis produits de limites.

  Par composition, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $+\infty$.

5. *Tracé.*
   (a) Après calcul, on obtient $f'(0) = 2$, $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Si $x \in \mathcal{D}'$ et $x < 1$ *i.e.* $1 - x > 0$ et $\varphi(1-x) = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les produits de limites,
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = 1.$$
   De même, si $x > 1$, $\varphi(1-x) = -1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = -1$.

   La fonction f n'est donc pas dérivable en 1 mais sa courbe admet deux demi-tangentes à gauche et à droite de coefficient directeur respectif 1 et -1.
   (c) En orange, les deux demi-tangentes et en violet, les trois tangentes particulières demandées. On complète la courbe par symétrie par rapport à l'origine. En particulier, f n'est pas dérivable non plus en -1.



6. On peut simplifier selon les intervalles :

$\forall x \in [0\,;1[$ **:** $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)}$.

On en déduit que sur l'intervalle $[0\,;1[$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2\arctan(x) + k$.

Or, $f(0) = 0$ et $f(0) = \arctan(0) + k$

Donc, $k = 0$ *i.e.* $\forall x \in [0\,;1[$, $f(x) = 2\arctan(x)$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[$ **:** $f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x^2)}$.

On en déduit que sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2\arctan x + \ell$.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-2\arctan(x) + \ell) = -\pi + \ell$.

Donc, $\ell = \pi$ et $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $f(x) = \pi - 2\arctan(x)$.

En $x = 1$: On peut remarquer que les deux expressions coïncident aussi lorsque $x = 1$ puisque $f(1) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et que, par ailleurs, $2\arctan(1) = \pi - 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

$\forall x \in]-\infty\,;0]$ **:** Par parité, on déduit que :

— Si $x \in [-1\,;0]$, $f(x) = -f(-x) = -2\arctan(-x) = 2\arctan(x)$.
— Si $x \in]-\infty\,;1]$, $f(x) = -f(-x) = -(\pi - 2\arctan(-x)) = -\pi - 2\arctan(x)$.

Au final,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi - 2\arctan(x) & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \\ 2\arctan(x) & \text{si } x \in [-1\,;1] \\ \pi - 2\arctan(x) & \text{si } x \in [1\,;+\infty[\,. \end{cases}$$