Sommes et Produits

Compléter :

1. Pour une somme télescopique :

$$\sum_{\triangle=\square}^{\heartsuit}(u_{\triangle+1}-u_{\triangle}) = u_{\heartsuit+1}-u_{\square}.$$

2. $$\mathrm{S}_2(\heartsuit) = \sum_{\triangle=1}^{\heartsuit}\triangle^2 = \frac{\heartsuit(\heartsuit+1)(2\heartsuit+1)}{6}.$$

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{\triangle=\square}^{\heartsuit}u_{\triangle} = \frac{u_{\square}+u_{\heartsuit}}{2}\times(\heartsuit-\square+1).$$

Théorème 8 (1 est racine de $\mathrm{X}^{\triangle}-1$) :
Soit $\triangle\in\mathbb{N}^*$, $\square$ et $\heartsuit$ deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned}\square^{\triangle}-\heartsuit^{\triangle} &= (\square-\heartsuit)\sum_{k=0}^{\triangle-1}\square^{\triangle-1-k}\heartsuit^k\\ &= (\square-\heartsuit)(\square^{\triangle-1}+\square^{\triangle-2}\heartsuit+\square^{\triangle-3}\heartsuit^2+\ldots+\square\heartsuit^{\triangle-2}+\heartsuit^{\triangle-1}).\end{aligned}$$

Exercice 1 : Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j}$
2. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}2^{i+j}$
3. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}.$

1. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}1 = n+1.$$
2. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}2^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^i = \sum_{j=0}^{n}6^j = \frac{1}{5}\left(6^{n+1}-1\right).$$
3. $$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j} &= \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}i^n\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{i^n}{n!}\\ &= \frac{1}{(n!)^n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}i\right)^n = \frac{(n!)^n}{(n!)^n} = 1.\end{aligned}$$

Sommes et Produits

Compléter :

1. Pour un produit télescopique :

$$\prod_{\triangle=\square}^{\varheartsuit} \frac{u_{\triangle+1}}{u_{\triangle}} = \frac{u_{\varheartsuit+1}}{u_{\square}}.$$

2. $S_1(\varheartsuit) = \displaystyle\sum_{\triangle=1}^{\varheartsuit} \triangle = \frac{\varheartsuit(\varheartsuit+1)}{2}.$

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\star$ et $\star \neq 1$, alors :

$$\sum_{\triangle=\square}^{\varheartsuit} u_{\triangle} = u_{\square} \times \frac{1-\star^{\varheartsuit-\square+1}}{1-\star}.$$

Théorème 11 (Formule du binôme de Newton) :
Soient $\square$ et $\heartsuit$ deux éléments d'un anneau commutatif [1] et $\triangle$ un entier naturel.

$$\begin{aligned}(\square+\heartsuit)^{\triangle} &= \sum_{k=0}^{\triangle} \binom{\triangle}{k} \square^k \heartsuit^{\triangle-k}.\\ &= \square^{\triangle} + \triangle\square^{\triangle-1}\heartsuit + \ldots + \binom{\triangle}{k} \square^k\heartsuit^{\triangle-k} + \ldots + \triangle\square\heartsuit^{\triangle-1} + \heartsuit^{\triangle}.\end{aligned}$$

Exercice 1 : Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$
2. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j} 2^{i+j}$
3. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}.$

1. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1.$
2. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{i}{j} 2^j = \sum_{i=0}^{n} 2^{2i} = \frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right).$
3. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j} 2^i\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(2^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n} 2^{\frac{(j+1)}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n} (\sqrt{2})^j = (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}$