

Lycée Jules Garnier

Cours de
MATHÉMATIQUES
— Fabien PUCCI —

Classe de



(Illustration de Thomas PERRIER)

PTSI VINCI

2025

Table des matières

Page

Programme du chapitre	1
I Logique et Raisonnement	3
I Terminologie mathématique	5
II Notions de logique formelle	10
III Exemples de raisonnements	18
<i>Feuille d'exercices n° 1 : Logique & Raisonnement</i>	25
<i>Test n° 1 : Logique et Raisonnement</i>	28
<i>Devoir en temps libre n° 1 : Types de raisonnement</i>	32
<i>Correction.</i>	33
Programme du chapitre II.	37
II Ensembles	39
I Notions sur les ensembles.	41
II Ensembles et fonctions	48
III Opérations sur les ensembles	55
IV Famille d'ensembles	60
V Produit cartésien	64
<i>Feuille d'exercices n° 2 : Ensembles</i>	67
<i>Test n° 2 : Ensembles</i>	74
<i>Devoir en temps libre n° 2 : Ensembles</i>	78
<i>Correction.</i>	79
<i>Programme de Khôlle des semaines 1 et 2</i>	85
Programme du chapitre III	86
III Arithmétique, rudiments	87
I Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	88
II PGCD et PPCM	103
<i>Feuille d'exercices n° 3 : Arithmétique</i>	112
<i>Test n° 3 : Arithmétique</i>	123
<i>Correction.</i>	129
Programme du chapitre IV	133
IV Applications	135
I Le contexte	136
II Applications	141
III Aspects qualitatifs	150
IV Fonctions et relation d'ordre.	154
V Dérivation	157
VI Continuité.	161
VII Injection, Surjection et Bijection	165
VIII Réciproque	169
<i>Feuille d'exercices n° 4 : Applications</i>	176
<i>Test n° 4 : Applications</i>	185
<i>Devoir en temps libre n° 3 : Arithmétique et applications</i>	193
<i>Correction.</i>	194
<i>Devoir surveillé n° 1 : Raisonnement, Arithmétique et Applications.</i>	198

<i>Correction</i>	203
<i>Programme de Khôlle des semaines 3 et 4</i>	209
Programme du chapitre V	210
V Fonctions de référence	211
I Les fonctions polynomiales	212
II Les fonctions rationnelles	216
III La fonction logarithme népérien	218
IV La fonction exponentielle népérienne	225
V Les fonctions puissances	234
VI La fonction logarithme décimal	240
VII Les fonctions hyperboliques	242
VIII Tableau récapitulatif	246
<i>Feuille d'exercices n° 5 : Fonctions de référence</i>	247
<i>Test n° 5 : Fonctions de référence</i>	256
<i>Test n° 6 : Fonctions de référence 2</i>	264
<i>Devoir en temps libre n° 4 : Une fonction sympathique</i>	272
<i>Correction</i>	273
Programme du chapitre VI	278
VI Sommes et Produits	279
I Sommes et Produits	280
II Méthodes de calculs de sommes et de produits	284
III Coefficients binomiaux et formule du binôme	293
IV Sommes doubles	298
<i>Feuille d'exercices n° 6 : Sommes et Produits</i>	304
<i>Test n° 7 : Sommes et Produits</i>	319
<i>Devoir en temps libre n° 5 : Premières rencontres</i>	321
<i>Correction</i>	322
<i>Programme de Khôlle des semaines 5 et 6</i>	325
Programme du chapitre VII	326
VII Fonctions circulaires	327
I Le cercle trigonométrique	329
II Trigonométrie	334
III Fonctions circulaires	337
IV Fonctions circulaires réciproques	345
V Fonctions tangente et réciproque	350
VI Tableau récapitulatif	363
<i>Feuille d'exercices n° 7 : Fonctions circulaires</i>	364
<i>Test n° 8 : Fonctions circulaires</i>	382
<i>Devoir en temps libre n° 6 : Un peu de trigonométrie réelle et de calculs algébriques</i>	386
<i>Correction</i>	388
<i>Devoir surveillé n° 2 : Sommes & Fonctions trigonométriques</i>	394
<i>Correction</i>	399
Programme du chapitre VIII	411
VIII Les Nombres Complexes I	413
I L'ensemble des nombres complexes	415
II Nombres et Plan complexes	424
III L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$	430
IV Forme polaire	435
V Applications à la trigonométrie	444
VI Exponentielle complexe	451
<i>Feuille d'exercices n° 8 : Les Nombres Complexes I</i>	455
<i>Test n° 9 : Fonctions circulaires - Nombres complexes</i>	471
<i>Test n° 10 : Remédiation - Nombres complexes</i>	475
<i>Test n° 11 : Nombres complexes et trigonométrie</i>	477
<i>Test n° 12 : Nombres complexes et intégration</i>	481

<i>Devoir en temps libre n° 7 : Un peu de trigonométrie circulaire</i>	485
<i>Correction</i>	486
<i>Devoir en temps libre n° 8 : Un peu de géométrie</i>	490
<i>Correction</i>	492
Programme du chapitre IX	499
IX Primitives et calculs d'intégrales	501
I Primitives	503
II Intégrales	510
III Pratique élémentaire de l'intégration	519
IV Primitives de fonctions rationnelles	528
V Techniques à connaître	534
<i>Feuille d'exercices n° 9 : Primitives et calculs d'intégrales</i>	540
<i>Test n° 13 : Techniques d'intégration</i>	560
<i>Devoir en temps libre n° 9 : Une fonction définie par une intégrale</i>	564
<i>Correction</i>	565
<i>Devoir en temps libre n° 10 : Primitives</i>	571
<i>Correction</i>	572
<i>Programme de Khôlle des semaines 9 et 10</i>	576
Programme du chapitre X.	577
X Les Nombres complexes II	579
I Racines n -ièmes d'un nombre complexe	580
II Ensembles de points	590
III Transformations du plan (Hors-Programme)	601
IV Résumé de géométrie complexe	609
<i>Feuille d'exercices n° 10 : Nombres complexes II - équations et Géométrie</i>	610
<i>Test n° 14 : Nombres complexes II</i>	636
<i>Devoir en temps libre n° 11 : Solutions d'équation et géométrie.</i>	640
<i>Correction</i>	641
Programme du chapitre XI	646
XI Équations différentielles (linéaires)	647
I Équations et opérateurs linéaires	649
II Équations différentielles linéaires d'ordre 1	654
III Équations différentielles linéaires d'ordre 2	665
<i>Feuille d'exercices n° 11 : Équations différentielles (linéaires)</i>	685
<i>Feuille d'exercices n° 12 : Remédiation</i>	703
<i>Test n° 15 : Équations différentielles linéaires.</i>	707
<i>Test n° 16 : Équations différentielles linéaires 2</i>	709
<i>Devoir en temps libre n° 12 : Méthode de variation de la constante d'ordre 2</i>	711
<i>Correction</i>	712
<i>Devoir surveillé n° 3 : Nombres complexes et équations différentielles</i>	715
<i>Correction</i>	719
<i>Programme de Khôlle des semaines 11 et 12</i>	732
Programme du chapitre XII	733
XII Les nombres réels	735
I Nombres entiers, décimaux, rationnels	736
II Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$	739
III Topologie de $\mathbb{R}$	746
IV Opérateurs réels	753
V Notion de densité	763
<i>Feuille d'exercices n° 13 : Nombres réels</i>	768
<i>Devoir en temps libre n° 13 : Partie entière</i>	794
<i>Correction</i>	795

Programme du chapitre XIII	798
XIII Matrices	799
I L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	800
II Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	803
III L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	816
IV Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$	822
<i>Feuille d'exercices n° 14 : Matrices.</i>	831
<i>Test n° 17 : Matrices.</i>	843
<i>Devoir en temps libre n° 14 : Racines $p^{\text{èmes}}$ de l'identité.</i>	847
<i>Correction.</i>	848
Programme du chapitre XIV	852
XIV Suites réelles et complexes	853
I Suites numériques.	854
II Comportement asymptotique des suites	862
III Théorèmes d'existence de limites.	879
IV Suites adjacentes	887
XIV Suites de référence	891
I Suite arithmétique	891
II Suite géométrique.	893
III Suite aritmético-géométrique	894
IV Suite homographique.	895
<i>Feuille d'exercices n° 15 : Suites</i>	899
<i>Test n° 18 : Suites I.</i>	918
<i>Test n° 19 : Suites II.</i>	921
<i>Devoir en temps libre n° 15 : Suite et série d'intégrales</i>	925
<i>Correction.</i>	926
<i>Programme de Khôlle des semaines 13 et 14</i>	930
Programme du chapitre XV	931
XV Fonctions de la variable réelle - LIMITES	933
I Limites	934
II Stabilité algébrique.	953
III Propriétés de la limite	963
IV Extension aux fonctions complexes	968
<i>Feuille d'exercices n° 16 : Fonctions de la variable réelle - LIMITES</i>	970
<i>Test n° 20 : Limites I.</i>	979
<i>Test n° 21 : Limites II.</i>	983
<i>Devoir en temps libre n° 16 : Autour d'une fonction de Lambert.</i>	985
<i>Correction.</i>	987
Programme du chapitre XVI	993
XVI Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ	995
I Continuité.	997
II Théorèmes de continuité globale	1007
III Continuité des fonctions monotones	1016
IV Fonctions à valeurs complexes.	1022
<i>Feuille d'exercices n° 17 : Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ</i>	1024
<i>Devoir en temps libre n° 17 : De la continuité et des points fixes.</i>	1035
<i>Correction.</i>	1036
<i>Programme de Khôlle des semaines 15 et 16</i>	1039
<i>Devoir surveillé n° 4 : Matrices - Suites - Fonctions</i>	1041
<i>Correction.</i>	1045
Programme du chapitre XVII	1059
XVII Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ	1061

I	Dérivabilité	1062
II	Fonctions dérivables	1071
III	Théorème des accroissements finis	1081
IV	Applications	1089
V	Fonctions à valeurs complexes.	1095
	<i>Feuille d'exercices n° 18 : Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ</i>	1098
	III Prolongements	1106
	<i>Test n° 22 : Dérivabilité.</i>	1113
	Programme du chapitre XVIII.	1117
	XVIII Systèmes linéaires	1119
I	Systèmes linéaires et matrices.	1119
II	Résolution pratique.	1129
III	Ensemble des solutions	1138
IV	Systèmes linéaires et matrices inversibles	1145
	<i>Feuille d'exercices n° 19 : Systèmes linéaires</i>	1152
	<i>Test n° 23 : Dérivabilité et Systèmes linéaires</i>	1163
	<i>Test n° 24 : Systèmes linéaires.</i>	1166
	<i>Devoir en temps libre n° 18 : Quelques encadrements et un système</i>	1168
	<i>Correction.</i>	1169
	<i>Programme de Khôlle des semaines 17 et 18</i>	1173
	Programme du chapitre XIX	1174
	XIX Suites récurrentes	1175
I	Suites récurrentes	1176
II	Suites récurrentes linéaires	1187
	<i>Feuille d'exercices n° 20 : Suites récurrentes</i>	1193
	<i>Test n° 25 : Systèmes linéaires et Suites récurrentes</i>	1207
	Table des figures	1211
	Index	1216

Logique & Raisonnement

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de l'arithmétique est hors programme.

1. Rudiments de logique

- Quantificateurs.
- Implication, contraposition, équivalence.
- Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.

2. Modes de raisonnement

- par disjonction des cas,
- par contraposition,
- par l'absurde,
- par analyse-synthèse.

Vocabulaire : condition nécessaire et condition suffisante

3. Raisonnement par récurrence :

- simple,
- double,
- forte.

Logique et Raisonnement

Ce chapitre a pour but d'introduire les concepts fondamentaux des mathématiques, à savoir les bases même du raisonnement.

Le but n'est pas l'étude de la logique formelle, ni même la présentation rigoureuse de cette logique formelle, mais de voir comment des rudiments de la théorie de la logique permettent une mise en forme rigoureuse de la structure de la pensée et du cheminement logique.

*Il est certains esprits dont les sombres pensées
Sont d'un nuage épais toujours embarrassées ;
Le jour de la raison ne le saurait percer.
Avant donc que d'écrire, apprenez à penser.
Selon que notre idée est plus ou moins obscure,
L'expression la suit, ou moins nette, ou plus pure.
Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.
Surtout qu'en vos écrits la langue réverée
Dans vos plus grands excès vous soit toujours sacrée.
En vain, vous me frappez d'un son mélodieux,
Si le terme est impropre ou le tour vicieux :
Mon esprit n'admet point un pompeux barbarisme,
Ni d'un vers ampoulé l'orgueilleux solécisme.
Sans la langue, en un mot, l'auteur le plus divin
Est toujours, quoi qu'il fasse, un méchant écrivain.*

*Travaillez à loisir, quelque ordre qui vous presse,
Et ne vous piquez point d'une folle vitesse :
Un style si rapide, et qui court en rimant,
Marque moins trop d'esprit que peu de jugement.
J'aime mieux un ruisseau qui, sur la molle arène,
Dans un pré plein de fleurs lentement se promène,
Qu'un torrent débordé qui, d'un cours orageux,
Roule, plein de gravier, sur un terrain fangeux.
Hâtez-vous lentement, et, sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage :
Polissez-le sans cesse et le repolissez ;
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez. [...]*

Nicolas BOILEAU 1636 - 1711

À travers ce premier chapitre, nous en profiterons pour revoir quelques résultats importants des années précédentes. Cela permettra de dépoussiérer un peu vos connaissances et revenir sur des théorèmes et méthodes importants.

Dernier conseil avant de débiter : le travail en CPGE et la réussite qui en découle est essentiellement personnel par le fait qu'il demande d'acquiescer une certaine maturité mathématique ; ce qui demande

temps et persévérance. Absolument tous les résultats, méthodes, démonstrations ou autres exercices sont importants. Gardez confiance, insistez et demandez moi. La réussite est à ce prix mais comme dit l'adage :

« À vaincre sans périls, on triomphe sans gloire. »

Vous réussirez !

CONTENU

I	Terminologie mathématique	5
I.1	Énoncé.	5
I.2	Quantificateurs ou connecteurs logiques	6
I.3	Texte mathématique.	8
II	Notions de logique formelle.	10
II.1	Proposition contraire	10
II.2	Conjonction et Disjonction	11
II.3	Implications (Si ... alors ...)	12
II.4	Équivalence (...si, et seulement si ...).	15
II.5	Négation d'énoncés	16
III	Exemples de raisonnements	18
III.1	Démonstration d'une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	18
III.2	Démonstration d'une équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$	19
III.3	Démonstration d'une propriété	19
III.4	Raisonnement par Analyse-Synthèse	20
III.5	Raisonnement par récurrence.	20
	<i>Feuille d'exercices n°1 : Logique & Raisonnement.</i>	25
	<i>Test n°1 : Logique et Raisonnement.</i>	28
	<i>Devoir en temps libre n°1 : Types de raisonnement</i>	32
	<i>Correction</i>	33
	Programme du chapitre II.	37

I/ Terminologie mathématique

I.1 Énoncé

Définition 1 (Objets) : Les *objets* mathématiques sont les éléments des ensembles de base (nombres, vecteurs, points) et les diverses constructions faites à partir de ces objets, comme les ensembles, les listes, les relations, les fonctions, les opérations.

Un même objet mathématique peut avoir diverses expressions ou écritures, par exemple : 2 , $\sqrt{4}$, $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$, ... sont diverses écritures du même objet.

ATTENTION

N'oubliez jamais que le symbole « = » est un signe fort et qu'il ne doit être employé qu'entre deux objets rigoureusement identiques.

Définition 2 (Assertion) : On appelle *proposition* (ou assertion) toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Une proposition toujours vraie est appelée une *tautologie*^[1].

Un énoncé (autre nom d'assertion) fait toujours intervenir un verbe, souvent sous la forme d'un symbole de relation, comme $=$, $\leq$, $\subset$, $\perp$, ...

Exemples 1 :

- $3 + 5$ est un objet mathématique, $3 + 5 = 8$ est un énoncé mathématique.
- « 2 est pair », « 3 est pair » ou encore « π est un entier » sont des énoncés qu'ils soient vrais ou faux.
- Les phrases : « Bonjour ! », « $\cos x + x^2$ », « Cette assertion est fausse. », « Quel jour sommes-nous ? », ... ne sont pas des assertions.

En informatique, on parle d'expression booléenne^[2] : c'est une combinaison de symboles et d'opérations qui peut s'évaluer en 0, représentant Faux, ou en 1, représentant Vrai.

Vocabulaire : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E , on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$ et on parle alors plutôt de *prédicat*.

Exemples 2 :

- Si on pose $\mathcal{P}(x) : x > 1$, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.
- $\mathcal{P}(A, B, C) : \text{« le triangle ABC est rectangle en A »}$ est un prédicat sur l'ensemble des triplets (A, B, C) de points du plan.

[1]. du grec $\tauα\upsilon\tauολογία$, composé de $\tauα\upsilon\tauό$, « la même chose », et $λέγω$, « dire » : le fait de redire la même chose donc apparenté à la lapalissade en français courant.

[2]. référence au logicien **George Boole**, né le 2 novembre 1815 à Lincoln (Royaume-Uni) et mort le 8 décembre 1864 à Ballintemple (Irlande), est un logicien, mathématicien et philosophe britannique. Il est le créateur de la logique moderne, fondée sur une structure algébrique et sémantique, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur.

— Si on pose $\mathcal{P}(n)$: « n est un nombre premier », alors $\mathcal{P}(7)$ est vraie, $\mathcal{P}(8)$ est fausse.

Remarque : L'ensemble E sera, suivant les cas, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles ($\mathbb{N}^*$, $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 9\}$, $] - 3 ; 3[$, ...).

I.2 Quantificateurs ou connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de « fabriquer » des propositions plus complexes à partir de propositions élémentaires.

Savoir écrire une proposition complexe à l'aide de propositions plus simples et de connecteurs est fondamental.

Définition 3 (Le quantificateur universel $\forall$) : Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x ».

Ainsi la proposition « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E , $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\forall x, (x \in E \implies \mathcal{P}(x) \text{ est vraie})$ ».

Exemples 3 :

- L'énoncé mathématique « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$ » se lit « pour tout entier naturel n , ... »
- La commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x,$$

et se lit « pour tout couple de réels $(x; y)$, ... ».

- « f est positive sur l'intervalle I » se traduit par $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.

Définition 4 (Le quantificateur existentiel $\exists$) :

- Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».

La proposition « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

- Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie « il existe un unique x ».

La proposition « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\exists x, (x \in E \text{ et } \mathcal{P}(x) \text{ est vraie})$ ».

Exemples 4 :

- Tout nombre réel positif peut s'écrire comme le carré d'un nombre s'écrit en langage mathématique :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R} / x = y^2.$$

- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Pour exprimer le fait que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$, on écrit :

$$\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0.$$

Pour exprimer que f ne s'annule qu'une seule fois :

$$\exists ! x \in \mathbb{R} / f(x) = 0.$$

Remarque : L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+ / x^2 = y \gg \text{ et } \ll \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R} / x^2 = y \gg.$$

Proposition 1 (Inversion des quantificateurs) :

- $\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x, y)$ est équivalent à dire $\exists y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)$
 — $\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)$ est équivalent à dire $\forall y, \forall x, \mathcal{P}(x, y)$

On peut donc intervertir des symboles identiques.

Exemple 5 : Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0.$ — $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0.$

ATTENTION

En général, on ne peut intervertir les symboles $\forall$ et $\exists$ sans changer le sens de la formule.

Contre-Exemple 6 : Les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

- $\forall x \in \mathbb{I}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall y \in \mathbb{I}, |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
 — $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in \mathbb{I}, \forall y \in \mathbb{I}, |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Remarque : Dans la première assertion, on noterait plutôt $\alpha(\varepsilon; x)$ pour montrer la dépendance de α à ε ET x .

- Dans une assertion du type $\forall x \in E, \exists y \in F, \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x . On le note alors souvent $y(x)$.

Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,

1. pour n'importe quel élément fixé de E , appelé x
2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x, y)$ soit vrai.

- Dans une assertion du type $\exists y \in F, \forall x \in E, \mathcal{P}(x, y)$, y est **indépendant** de x .

Il faut comprendre que

1. un certain élément particulier, noté y , dans E
2. rend vraie la propriété $\mathcal{P}(x, y)$ pour tout x de E .

ATTENTION

Exercice 1 : Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).
4. Les courbes des fonctions f et g ont un unique point en commun.
5. La définition d'une fonction continue en un point a d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
6. La définition d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en $\ell \in \mathbb{R}$.

I.3 Texte mathématique

Un texte mathématique est constitué de :

1. **Définitions :** On appelle définition toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets.

Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes.

Si l'homonymie est tolérée dans le langage usuel, elle ne l'est pas en mathématiques, par souci de rigueur formelle.

Définition 5 (Fonction croissante) : Soient I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est *croissante* sur I si $\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

Remarque : L'équivalence est utilisée de façon plus ou moins implicite dans les définitions. Par exemple dans la phrase ci-dessus, il est sous-entendu que, réciproquement, si f est une fonction croissante sur I alors $\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

Le « si » d'une définition est donc à penser comme étant un « si, et seulement si ».

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.

On distingue :

les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

les propositions : des résultats de moindre envergure ;

les lemmes : des résultats à voir comme des étapes vers des résultats plus consistants (résultats préliminaires, mais pouvant avoir leur intérêt en soi)

les corollaires : des conséquences assez immédiates d'autres résultats, par exemple des cas particuliers intéressants ;

les caractérisations : On appelle caractérisation tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc, au fond, ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition » mais bien souvent plus pratique.

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I .

Remarque : Un énoncé s'exprime souvent sous la forme $A \Rightarrow B$.

La proposition A regroupe les hypothèses. La proposition B regroupe les conclusions.

Mathématiquement parlant, on parlera respectivement de « condition suffisante » et « condition nécessaire ». On revient sur ces notions un peu plus loin.

Ne pas oublier de bien apprendre, comprendre et citer toutes les hypothèses d'un résultat.

Par exemple, considérons le **théorème (2)** :

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

- (a) bien sûr, $f' \geq 0$, que personne n'oublie ;
- (b) mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),
- (c) et, plus souvent oubliée, le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux!).

3. **Démonstrations** : des justifications de la véracité des résultats.

4. **Conjectures** : des énoncés qu'on pense être vrais, mais qu'on n'a pas encore réussi à prouver.

II/ Notions de logique formelle

On souhaite construire de nouvelles assertions à partir d'assertions déjà existantes et de symboles appelés *connecteurs logiques*, qui traduisent les phrases du raisonnement usuel.

II.1 Proposition contraire

Dans de nombreuses occasions, par exemple pour mener des démonstrations par l'absurde ou par la contraposée, il est important de savoir nier une expression mathématique *i.e.* exprimer son contraire de façon efficace et rapide ^[3].

Cette négation peut se faire de façon purement formelle, en utilisant des règles simples.

Définition 6 (Négation) : La proposition *contraire* de $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$) ou $\neg \mathcal{P}$ et appelée « négation de $\mathcal{P}$ », est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Pour manipuler une assertion composée avec des connecteurs, on peut parcourir la liste complète des valeurs de vérité possibles des assertions qui ont servi à la construire, et créer un tableau appelé *table de vérité*.

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

Figure I.1 – Table de vérité de la négation.

Prouver qu'une proposition est vraie est donc équivalent à prouver que sa négation est fausse. C'est le principe du **raisonnement par l'absurde**.

Exemples 7 : Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x , $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall x, \mathcal{P}(x)$.
- Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists x, \neg \mathcal{P}(x)$.

D'une manière générale,

Méthode 1 (Négation d'une proposition) :

Pour nier une proposition, on échange les quantificateurs $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, puis on nie la conclusion.

Exercice 2 : Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y$.
3. $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M$.

[3]. et sans erreur !

Méthode 2 (Du bon usage du contre-exemple) :

Soit une proposition du type $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.

- Pour montrer que l’assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E .
- Pour montrer que l’assertion $\mathcal{P}$ est fausse, il suffit de trouver un x de E pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Un tel x est appelé *contre-exemple* à la proposition $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$.

Exercice 3 :

1. L’assertion « Tout entier positif est la somme de trois carrés (d’entiers) » est-elle vraie ?
2. Même question avec l’assertion « Toute suite croissante est divergente vers $+\infty$ ».

II.2 Conjonction et Disjonction

Définition 7 : Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, appelée *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, appelée *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l’une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Figure I.2 – Table de vérité des connecteurs logiques

- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que l’une des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie (ou que les deux le sont).

Remarque : On prendra garde au fait que le « ou » logique est un « ou » inclusif, contrairement au « ou » du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans « Fromage ou Dessert »).

Un peu d’humour : On demande à une logicienne qui vient d’accoucher si elle a eu un garçon ou une fille. Que répond-elle ? [4].

Exercice 4 : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x > 0$.

Vérifier que la proposition « $x > 1$ ou $-1 < x < 0$ » est vraie.

[4]. Oui!

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
- $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.
- $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$.

Conjonction et disjonction sont donc associatives, commutatives et distributives l'une sur l'autre.

Méthode 3 (Démonstration d'une conjonction ou d'une disjonction) :

- Pour prouver une conjonction $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, on prouve en deux temps : on prouve $\mathcal{P}$, puis on prouve $\mathcal{Q}$.
- Pour prouver une disjonction $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, on prouve que l'une ou l'autre des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.

II.3 Implications (Si ... alors ...)

On dit qu'une proposition $\mathcal{P}$ « implique » une proposition $\mathcal{Q}$ si, et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie chaque fois que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple 8 : Posons $\mathcal{P} : 1 = 2$ et $\mathcal{Q} : 2 = 3$.

Si $\mathcal{P}$ est vraie alors $1 + 1 = 2 + 1$ donc $\mathcal{Q}$.

Cela revient à dire qu'il est impossible qu'on ait $\mathcal{P}$ vraie sans avoir $\mathcal{Q}$ vraie également.

Autrement dit, $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$ est une contradiction i.e. $\neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})$ est une tautologie.

Mais en utilisant les équivalences usuelles, cela revient à $(\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$ tautologie ou finalement, ce qui est encore équivalent $\mathcal{Q} \vee \neg\mathcal{P}$ tautologie.

Cela nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 8 (Implication) : Soient deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

L'assertion $(\mathcal{Q} \vee \neg\mathcal{P})$ est notée $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et on dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

On dit alors que $\mathcal{P}$ est une condition *suffisante* de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition *nécessaire* de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure I.3 – Table de vérité de l’implication.

Remarques :

- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de supposer de $\mathcal{P}$ est vraie et montrer que, sous cette condition, $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.
- Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie mais ce n’est pas suffisant (troisième ligne de la table de vérité).

Exemple 9 : Soit $x \in \mathcal{R}$, si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ est une proposition vraie.

- Pour que $x^2 > 1$ soit vraie, il suffit que la condition $x > 1$ soit vérifiée mais elle n’est pas nécessaire :

$x = -2$ donne aussi $x^2 > 1$ et pourtant $x < 1$

- Pour que $x > 1$, il est nécessaire que la condition $x^2 > 1$ soit vérifiée.

En effet, si $x^2 \leq 1$ alors $-1 \leq x \leq 1$ mais la condition $x^2 > 1$ n’est pas suffisante ($x = -2$).

Exercice 5 : Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu’un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu’il ait 3 angles droits.
2. Pour qu’un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu’il ait 3 angles droits.
3. Une condition nécessaire pour qu’un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.
4. Une condition suffisante pour qu’un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la **figure (I.3)** : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- « **Faux $\implies$ Faux** » est vraie :

Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d’Angleterre est donc vraie »^[5].

- « **Faux $\implies$ Vrai** » est vraie : un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \implies 2 + 2 = 3 + 1 \implies 4 = 4.$$

L’affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

Une conséquence pratique de cette étude est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n’avez aucune idée en fin de raisonnement de

^[5]. sauf si tu es vraiment le pape et que je ne suis pas la reine d’Angleterre.

la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). On dit aussi qu'à partir du faux, on démontre n'importe quoi !

En plus clair, arriver à un résultat correct se basant sur une hypothèse fausse ne sera jamais compté comme juste...

ATTENTION

On verra plus loin que la négation d'une implication n'est pas une implication mais une conjonction *i.e.* un « et ».

Exercice 6 (Le missionnaire et les cannibales) : Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

Méthode 4 (Démonstration d'une disjonction) :

Pour prouver une disjonction $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ qui est donc équivalente à l'implication $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on pourra supposer que $\mathcal{P}$ n'est pas vraie, et montrer alors que $\mathcal{Q}$ est vraie.

Par commutativité de la disjonction, on peut, bien sûr, intervertir $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Remarque : Un bon choix de la propriété que l'on nie peut parfois simplifier la démonstration.

Exemple 10 : Soit x un réel.

Pour montrer que $x > 0$ ou $x^2 \geq 0$, il est plus facile de montrer que $x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$.

Proposition 4 (Transitivité) :

L'implication est *transitive i.e.*

Si $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$ sont vraies alors $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$ est vraie.

Définition 9 (Contraposée et réciproque) : Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- L'implication $(\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})$, notée $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$, est appelée la *contraposition* ou la *contraposée* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
- L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée l'implication *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

ATTENTION

Une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes, ou l'une être évidente et l'autre pas.

Exemple 11 :

- La contraposée de la proposition « la nuit, tous les chats sont gris » est « Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour ».

— Sa réciproque est « Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit ».

Exercice 7 : Citer des propositions dont la réciproque est fausse.

Théorème 5 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes^[6]. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ est équivalent à } (\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}).$$

Preuve : Comme $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est définie par $\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ par commutativité de $\vee$, c'est aussi $\mathcal{Q} \vee \neg \mathcal{P}$ qui s'écrit aussi $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$.

Cette propriété était particulièrement utilisée dans vos jeunes classes pour prouver qu'un triangle n'était pas rectangle ou que deux droites n'étaient pas parallèles à partir de la négation de l'égalité des carrés et des quotients respectivement.

Exercice 8 : Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x \neq -1 \text{ et } y \neq -1) \Rightarrow (x + xy + y \neq -1).$$

Correction : $x + xy + y = -1 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ OU } y = -1).$

II.4 Équivalence (...si, et seulement si ...)

Définition 10 (Équivalence) : Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsque les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité.

[6]. On parle de *modus tollens* du latin : « procédé qui nie en niant ».

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$	$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Figure I.4 – Table de vérité de l'équivalence.

En particulier, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

ATTENTION

Lorsque l'on écrit $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ cela sous-entend « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie » mais nullement que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ le soient. Les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ seront seulement vraies ou fausses en même temps.

Vocabulaire : Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie *si, et seulement si* $\mathcal{Q}$ est vraie.

On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition *nécessaire et suffisante* (CNS) de $\mathcal{Q}$ ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.

Exercice 9 : Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\iff$, $\impliedby$, $\implies$.

- $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \quad \dots \quad x = 2;$
- $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \quad \dots \quad z \in \mathbb{R};$
- $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \quad \dots \quad e^{2ix} = 1.$

Méthode 5 (Équivalence par implications tournantes) :

D'après la proposition (4) pour démontrer que n énoncés $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ sont équivalents, il suffit de démontrer les n implications :

$$\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2 \implies \dots \implies \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_1.$$

II.5 Négation d'énoncés

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff \mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$),
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$),
- non ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) $\iff \mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).
- non ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$) $\iff (\mathcal{P} \iff (\text{non } \mathcal{Q})) \iff ((\text{non } \mathcal{P}) \iff \mathcal{Q})$.

(Loi de Morgan^[7])
(Loi de Morgan)

[7]. **Auguste (ou Augustus) De Morgan** (27 juin 1806 à Madurai (Tamil Nadu) - 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge (\neg \mathcal{Q})$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F

Figure I.5 – Négation d'une implication.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg \mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F

Figure I.6 – Négation d'une équivalence.

Preuve :

5. Les tableaux de la figure (I.6) suffisent à la preuve mais on peut aussi le démontrer de manière purement formelle avec les propriétés des conjonctions et disjonctions.

Par soucis de lisibilité, on utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ pour signifier que les propositions sont équivalentes.

$$\begin{aligned}
 \neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) &\Leftrightarrow \neg((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})) \\
 &\Leftrightarrow (\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})) \vee (\neg(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})) \\
 &\Leftrightarrow (\neg(\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})) \vee (\neg(\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{P})) \\
 &\Leftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{P}) \\
 &\Leftrightarrow ((\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q}) \wedge ((\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}) \vee \neg \mathcal{P}) \\
 &\Leftrightarrow ((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{Q})) \wedge ((\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}))
 \end{aligned}$$

Comme $(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q} \vee \neg \mathcal{Q})$ sont toujours vraies, on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) \\
 &\Leftrightarrow (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}) \\
 &\Leftrightarrow \neg \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}.
 \end{aligned}$$

Par symétrie du rôle joué par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on a également l'équivalence avec $\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg \mathcal{Q}$.

Exemple 12 : La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris ».

Exercice 10 : Nier la proposition : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

III/ Exemples de raisonnements

III.1 Démonstration d'une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct** : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie ... »

2. **Raisonnement par contraposition** : $(\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})$.

La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... »

3. **Raisonnement par l'absurde** : $\mathcal{P}$ et $(\text{non } \mathcal{Q})$ conduisent à une contradiction.

La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... ».

Dans tous les cas, une bonne traduction des propriétés devrait conduire au résultat escompté.

ATTENTION

Même si cela est sous-entendu, pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie il faut, certes, que l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ soit vraie mais aussi vérifier que $\mathcal{P}$ le soit également.

On parle de *modus ponens*^[8], ou syllogisme :

Si $\mathcal{P}$ est vraie et $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie

$$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Exemple 13 : Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.^[9]

Exercice 11 :

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aide : On pourra utiliser le résultat de la question 2.

[8]. On pose $\mathcal{P}$ pour prouver $\mathcal{Q}$

[9]. Un sophisme est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité dont l'exemple classique est « Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat ».

Pour être complet, l'énigme « Dans une ville, le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? » qui conduit à une situation qui ne peut exister est appelée *paradoxe*.

III.2 Démonstration d'une équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}).$$

Dans les cas simples et en faisant attention qu'il y a équivalence à chaque étape, on pourra raisonner par équivalence comme pour les équations.

Exemple 14 : On a montré successivement que si n est un entier pair, alors n^2 est pair puis que si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc, n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair.

III.3 Démonstration d'une propriété

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\neg \mathcal{P}$ est fausse.
- Enfin, dans les cas plus complexes, on peut également raisonner par disjonction des cas en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x :

$$((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}) \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})).$$

Exemples 15 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ comme carré d'un nombre réel.

Par conséquent, $x^2 + 1 \geq 2x$, ce qu'il fallait établir.

2. Tout entier naturel supérieur à 2 est produit de nombres premiers.

Exercice 12 : Montrer, sans utiliser le fait qu'il s'agit d'une somme classique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par *analyse/synthèse* (cf. plus loin).
- On peut également montrer qu'il est absurde que $\mathcal{P}$ soit fausse pour tout x .

Exemples 16 :

1. Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = -f$.

En effet, posons $f : x \mapsto e^{-x}$. Alors, f est dérivable par composition et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} = -f(x).$$

Donc $f' = -f$.

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, positive et $f(0) = 0$, alors sa dérivée est négative en au moins un point.

III.4 Raisonement par Analyse-Synthèse

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse). À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments qui répondent au problème.

Ce type de raisonnement sera souvent pratiqué lorsqu'on demandera de prouver l'existence et l'unicité d'un certain x vérifiant une propriété $\mathcal{P}(x)$.

- Démontrant l'unicité d'un tel x hypothétique on procédera à l'analyse d'une telle solution tout en cherchant une caractérisation de celle-ci.
- Posant alors un tel x , on vérifiera qu'il répond au problème quitte à imposer de nouvelles contraintes.

Exercice 13 : Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque :

- La phase d'analyse est la recherche de conditions nécessaires.
- La phase de synthèse est la donnée de conditions suffisantes.

III.5 Raisonement par récurrence**Rappel 1 (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :**

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Preuve :

1. C'est un axiome de $\mathbb{N}$.
2. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble des majorants ENTIERS de A est non vide, donc possède un plus petit élément m d'après l'assertion précédente.
 - Supposons d'abord que $m = 0$. Dans ce cas $a \leq m = 0$ pour tout $a \in A$, donc $a = 0$. Puisque A est non vide, cela montre que $A = \{0\}$, et donc A admet 0 pour plus grand élément.
 - Supposons à présent que $m \neq 0$. Ainsi $m - 1 \in \mathbb{N}$, donc par minimalité de m , $m - 1$ ne majore donc pas A i.e. $m - 1 < a$ pour un certain $a \in A$.

Mais alors, entre entiers $m < a + 1$ est équivalent à $m \leq a$ ce qui, avec $a \leq m$ par définition de m entraîne $m = a \in A$.

Conclusion : m est un élément de A qui majore A i.e. c'est le plus grand élément de A .

Théorème 7 (Raisonnement par récurrence simple) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, (Initialisation)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie. (Principe d'hérédité)

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Considérons une propriété $\mathcal{P}(n)$ héréditaire dépendant d'un entier naturel n telle que $\mathcal{P}(0)$ soit vraie.

Posons $A = \{n \in \mathbb{N} / \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\}$. Pour montrer que $A = \mathbb{N}$, on raisonne par l'absurde.

Supposons donc que le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ soit non vide. Il admet donc un plus petit élément que l'on note p .

Comme $0 \in A$, nécessairement $p \geq 1$ et l'entier $p - 1 \geq 0$ ne peut donc appartenir au complémentaire de A i.e. $p - 1 \in A$. Ainsi $\mathcal{P}(p - 1)$ est vraie par définition de A , ce qui implique que $\mathcal{P}(p)$ est vraie par le principe d'hérédité i.e. p appartient à A .

En conséquence p appartient à A et à son complémentaire, ce qui est impossible. L'hypothèse comme quoi le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ était non vide n'est donc pas possible i.e. $A = \mathbb{N}$: la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11 (Suite de propositions vraie à partir d'un certain rang) : Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}_n$ par abus de langage) est vraie à partir d'un certain rang si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \mathcal{P}_n.$$

Si la propriété $\mathcal{P}$ n'est initialisée qu'à partir d'un certain rang n_0 , bien sûr, celle-ci ne sera alors vraie que pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice 14 : Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair.

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Les deux conditions du théorème (7) doivent être soigneusement vérifiées. Deux exemples pour le prouver :

— Montrer que la proposition $\mathcal{P}_n : \forall n \in \mathbb{N}$, 3 divise 2^n est héréditaire.

Est-elle vraie pour tout entier n ?

— Soit la propriété $\mathcal{P}_n : \forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier^[10].

Est-elle initialisable ?

ATTENTION

Plusieurs formes de récurrence, en apparence plus générales que la récurrence ordinaire, s'avèrent équivalentes.

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(k+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n , mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Corollaire 7.1 (Raisonnement par récurrence double) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Soit la propriété $\mathcal{P}$ vérifiant les hypothèse du corollaire (7.1), on considère la propriété

$$\mathcal{Q}(n) : \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraies.}$$

Montrons, par récurrence, que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Par hypothèse, $\mathcal{Q}(0)$ est vérifiée.
- Supposons qu'il existe un entier k tel que $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie.

Par définition de $\mathcal{P}$, comme $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies on en déduit que $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Comme $\mathcal{P}(k+1)$ et $\mathcal{P}(k+2)$ sont maintenant vraies on a $\mathcal{Q}(k+1)$ vraie et l'hérédité de $\mathcal{Q}$ s'en suit.

Initialisée à partir de $n=0$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{Q}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique, en particulier, que $\mathcal{P}(n)$ l'est également.

[10]. Le polynôme P défini par $P(X) = X^2 - X + 41$ est dû à **Leonhard Euler** (né le 15 avril 1707 à Bâle et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Petersbourg). Pour tout entier relatif n inférieur à 40, $P(n)$ est premier.

Exercice 15 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

Corollaire 7.2 (Raisonnement par récurrence forte) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \leq n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Soit la propriété $\mathcal{P}$ vérifiant les hypothèses du corollaire (7.2), on considère la propriété

$$\mathcal{Q}(n) : \forall k \leq n, \mathcal{P}(k) \text{ est vraie.}$$

Montrons, par récurrence, que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Par hypothèse, $\mathcal{Q}(0)$ est vérifiée.
- Supposons qu'il existe un entier m tel que $\mathcal{Q}(m)$ soit vraie.

Par définition de $\mathcal{P}$, comme $\forall k \leq m$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Comme $\forall k \leq m+1$, $\mathcal{P}(k)$ est maintenant vraie on a $\mathcal{Q}(m)$ vraie et l'hérédité de $\mathcal{Q}$ s'en suit.

Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{Q}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique, en particulier, que $\mathcal{P}(n)$ l'est également.

Exercice 16 (Théorème fondamental de l'arithmétique) : Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Correction : Pour tout entier $n \geq 2$, posons :

$$H(n) : \text{« L'entier } n \text{ admet un diviseur premier. »}$$

Comme 2 est premier, il admet bien un nombre premier comme diviseur et $H(2)$ est vérifiée.

Supposons alors que $H(k)$ soit vérifiée pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ et considérons l'entier $n+1$:

- Si $n+1$ est premier, $H(n+1)$ est vraie.
- Si $n+1$ n'est pas premier alors il peut s'écrire sous la forme $n+1 = p \times q$ où p et q sont deux entiers tels que $2 \leq p \leq n$ et $2 \leq q \leq n$.

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'un des deux entiers p ou q pour avoir la propriété $H(n+1)$.

En conclusion, la propriété $H(n)$ est donc héréditaire. Étant initialisée pour $n = 2$, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$ i.e.

Tout entier supérieur à deux admet un diviseur premier.

Logique & Raisonnement

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;	7. f est croissante ;
2. f est bornée ;	8. f est la fonction nulle ;
3. f est paire ;	9. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
4. f est impaire ;	10. f est inférieure à g ;
5. f ne s'annule jamais ;	11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
6. f est strictement décroissante ;	

Exercice 2 : En utilisant convenablement les quantificateurs, énoncer le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.

Exercice 3 : Soient les nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$. Traduire en langage formalisé les phrases suivantes :

1. Les x_i sont tous nuls	5. Les x_i sont égaux
2. L'un des x_i est nul	6. 2 au moins parmi les x_i sont égaux
3. Les x_i sont non tous nuls	7. 2 au moins parmi les x_i sont distincts
4. Les x_i sont tous non nuls	8. Les x_i sont tous distincts

Exercice 4 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
- L'application f est croissante.
- L'application f est croissante et positive.
- Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq 0$.
- Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 5 :

- Montrer que les assertions $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $(\neg \mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ sont équivalentes.
- Application :** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \max \{x^2, (x-2)^2\} \geq 1$.

Exercice 6 :

- Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x+6} = x$.

2. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $x(x+1)(2x+1) = 84$.

Exercice 7 : Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est majorée par 3.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
6. $\forall n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 3n(n+1)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 6.

Exercice 8 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Correction : On montre ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = 3^1 - 2^2$ donc la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $u_k = 3^k - 2^{k+1}$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+2}$ (et seulement pour ce k).

$$\begin{aligned} \text{Par définition de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad u_{k+2} &= 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+1} - 2^{k+2}) - 2 \times 3(3^k - 2^{k+1}) \\ &= 3^{k+1}(5 - 2) - 2^{k+2}(5 - 3) = 3^{k+2} - 2^{k+3}. \end{aligned}$$

La relation est donc vraie pour $k+2$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée à partir de $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Exercice 9 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.

Correction : Pour l'hérédité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = n^2 + 2(n-1)\frac{n-1}{n+1} \\ &\leq n^2 + 2(n-1) = n^2 + 2n + 1 - 3 \leq (n+1)^2. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}{n+1} \leq \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n+1} = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Exercice 10 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2).$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

Exercice 11 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n u_0$.

Exercice 12 : Soient $n \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $M \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > M \implies \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} > \frac{M}{n}.$$

Logique et Raisonnement

I/ Questions de cours _____

1. Quelle est la différence entre un raisonnement par l'absurde et un raisonnement par contraposition ?

Un raisonnement par l'absurde suppose la négation de l'énoncé à prouver et montre qu'on arrive à une contradiction. Un raisonnement par contraposition démontre $\neg Q \Rightarrow \neg P$ pour prouver $P \Rightarrow Q$.

2. Quels sont les deux principaux quantificateurs utilisés en logique et que signifient-ils ?

Les deux quantificateurs sont :

- (a) $\forall x$: signifie « pour tout x », c'est le quantificateur universel.
- (b) $\exists x$: signifie « il existe un x », c'est le quantificateur existentiel.

3. Quelle est la différence entre une implication et une équivalence logique ?

Une implication ($P \Rightarrow Q$) signifie que si P est vrai alors Q est vrai. Une équivalence ($P \Leftrightarrow Q$) signifie que P et Q sont toujours vrais ou faux en même temps.

4. Quelle est la négation d'une implication $P \Rightarrow Q$?

La négation d'une implication $P \Rightarrow Q$ s'écrit : $P \wedge \neg Q$.

5. Quelle est la définition d'une tautologie en logique ?

Une tautologie est une proposition toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la composent.

II/ QCM _____

- Quelle est la définition d'une assertion ?

(a) ☐ Une équation mathématique	(c) ☐ Un ensemble de nombres
(b) ☒ Une phrase dont on peut dire si elle est vraie ou fausse	(d) ☐ Une propriété non vérifiable
- Quelle notation représente le quantificateur universel ?

(a) ☐ $\exists$	(b) ☒ $\forall$	(c) ☐ $\wedge$	(d) ☐ $\vee$
- Quelle est la négation de « Tous les chats sont gris » ?

(a) ☐ Aucun chat n'est gris
(b) ☒ Il existe au moins un chat qui n'est pas gris
(c) ☐ Tous les chats sont noirs
(d) ☐ Les chats ne sont jamais gris
- Quelle est la définition d'une tautologie ?

(a) ☒ Une proposition toujours vraie
(b) ☐ Une proposition toujours fausse
(c) ☐ Une implication fausse
(d) ☐ Une équivalence fausse
- Quelle est la notation d'une conjonction logique ?

(a) ☒ $\wedge$	(b) ☐ $\vee$	(c) ☐ $\Rightarrow$	(d) ☐ $\neg$
- Quelle est la signification de l'implication $P \Rightarrow Q$?

(a) ☐ P est nécessaire pour Q	(c) ☒ Si P est vrai alors Q est vrai
(b) ☐ Q est suffisant pour P	(d) ☐ P et Q sont équivalents
- Quelle est la contraposée de « Si P alors Q » ?

(a) ☐ Si Q alors P	(c) ☐ P ou Q
(b) ☒ Si non Q alors non P	(d) ☐ P et non Q
- Quelle est la table de vérité d'une disjonction logique ($P \vee Q$) quand P est faux et Q est vrai ?

(a) ☒ Vrai	(c) ☐ Indéterminé
(b) ☐ Faux	(d) ☐ Impossible à déterminer
- Comment exprimer « Il existe un unique x tel que $P(x)$ est vrai » ?

(a) ☐ $\exists x, P(x)$	(b) ☐ $\forall x, P(x)$	(c) ☒ $\exists !x, P(x)$	(d) ☐ $\exists x, \forall y, P(x, y)$
- Quelle propriété est utilisée dans une démonstration par récurrence ?

(a) ☐ Unicité	(b) ☒ Hérité	(c) ☐ Contradiction	(d) ☐ Tautologie

Logique et Raisonnement

I/ Questions de cours _____

1. Qu'est-ce qu'une assertion en logique mathématique ?

Une assertion est une proposition dont on peut dire si elle est vraie ou fausse.

2. Quelles sont les lois de De Morgan en logique ?

Les lois de De Morgan sont :

- (a) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
- (b) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

3. Quelle est la définition d'une contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$?

La contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$, et elle est logiquement équivalente à l'implication originale.

4. Qu'est-ce qu'un raisonnement par récurrence et quelles sont ses étapes ?

Un raisonnement par récurrence suit ces étapes :

- (a) **Initialisation** : Vérifier la propriété pour une valeur de départ (souvent $n = 0$ ou $n = 1$).
- (b) **Hérédité** : Supposer qu'elle est vraie pour un entier n et démontrer qu'elle l'est aussi pour $n + 1$.
- (c) **Conclusion** : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n .

5. Quelle est la différence entre une conjonction et une disjonction logique ?

Une conjonction ($P \wedge Q$) est vraie seulement si P et Q sont tous deux vrais. Une disjonction ($P \vee Q$) est vraie si au moins l'un des deux est vrai.

II/ QCM _____

1. Qu'est-ce qu'une proposition en logique ?

- (a) ☒ Une affirmation qui peut être vraie ou fausse
- (b) ☐ Une phrase sans signification logique
- (c) ☐ Un ensemble de théorèmes
- (d) ☐ Un axiome mathématique

2. Quelle notation représente le quantificateur existentiel ?

- (a) ☐ $\forall$
- (b) ☒ $\exists$
- (c) ☐ $\wedge$
- (d) ☐ $\vee$

3. Quelle est la négation de « Certains oiseaux ne volent pas » ?

- (a) ☒ Tous les oiseaux volent (c) ☐ Certains oiseaux volent
 (b) ☐ Aucun oiseau ne vole (d) ☐ Tous les oiseaux ne volent pas
4. Quelle est la définition d'un paradoxe logique ?
 (a) ☒ Une contradiction apparente dans un raisonnement
 (b) ☐ Une vérité mathématique incontestable
 (c) ☐ Une simple erreur de raisonnement
 (d) ☐ Une équation complexe
5. Quelle est la notation d'une disjonction logique ?
 (a) ☐ $\wedge$ (b) ☒ $\vee$ (c) ☐ $\Rightarrow$ (d) ☐ $\neg$
6. Que signifie l'implication $P \Rightarrow Q$?
 (a) ☐ Si P est vrai alors Q est faux (c) ☐ Q est une condition suffisante pour P
 (b) ☐ P et Q sont toujours vrais ensemble (d) ☒ P est une condition suffisante pour Q
7. Quelle est la réciproque de « Si P alors Q » ?
 (a) ☒ Si Q alors P (c) ☐ P et Q
 (b) ☐ Si non Q alors non P (d) ☐ P ou Q
8. Quelle est la table de vérité d'une conjonction logique ($P \wedge Q$) quand P est faux et Q est vrai ?
 (a) ☐ Vrai (b) ☒ Faux (c) ☐ Indéterminé (d) ☐ Impossible à déterminer
9. Comment exprimer « Il n'existe pas de x tel que $P(x)$ est vrai » ?
 (a) ☒ $\forall x, \neg P(x)$ (b) ☐ $\exists x, P(x)$ (c) ☐ $\neg \forall x, P(x)$ (d) ☐ $\exists !x, \neg P(x)$
10. Quel principe est essentiel dans un raisonnement par l'absurde ?
 (a) ☒ Montrer que la négation de l'énoncé conduit à une contradiction
 (b) ☐ Vérifier chaque possibilité indépendamment
 (c) ☐ Utiliser des axiomes évidents
 (d) ☐ Appliquer une démonstration directe

Types de raisonnement

Exercice 1 – Donner le tableau des valeurs de vérité des assertions suivantes, puis conclure :

1. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \vee ((\neg \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{Q})$.
2. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge ((\neg \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 2 (Une inégalité sur des réels) –

1. Montrer que $\forall x, y \in [1; +\infty[, x + y \leq 1 + xy$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in [1, +\infty[$. En déduire que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \leq 2^{n-1} \left(1 + \prod_{i=1}^n a_i \right).$$

Exercice 3 (Une version des tiroirs de Dirichlet) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n + 1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ éléments de $[0; 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.

On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

$\mathcal{P}$: « Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$. »

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $(x_i - x_{i-1})$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 4 –

1. Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[, \ln(1 + t) \leq t$.
2. Soit $\varphi : t \mapsto \frac{(1 + t) \ln(1 + t)}{t}$.

Préciser l'ensemble de définition de φ et vérifiez que φ est strictement monotone sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

3. Soit a, b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

On pose $g : x \mapsto \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (a) Justifier soigneusement que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) Pour $x > 0$, exprimez $g'(x)$ à l'aide de $\varphi(bx) - \varphi(ax)$.

En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. En évaluant g en $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, montrer que :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \leq (\ln 2)^2.$$

Types de raisonnement

Commentaires :

- Une erreur récurrente et persistante est de croire que le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable. Ceci est faux si le dénominateur s'annule !
- Pensez à mettre des phrases pour expliquer succinctement votre démarche.
- Le temps où l'on avait besoin de u , v , u' et v' est révolu. Vous êtes assez grand pour dériver sans cette béquille.
- Trop nombreux sont ceux qui confondent implication directe et leur réciproque. Réfléchissez bien à quelle propriété vous avez besoin.
- On peut conserver les inégalités en multipliant par un réel non nul positif a car la fonction $x \mapsto ax$ est alors croissante pas parce que a est croissant ou je ne sais quoi. Relisez-vous !
- Chaque fois que vous vous sentirez obligés de vous justifier par un « forcément », vous verrez que ce sera « forcément » faux.
- Attention, c'est la fonction g qui est définie ou dérivable et non $g(x)$ qui l'est aussi mais qui donnera toujours 0.

Correction de l'exercice 1 –

1.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

On en déduit que l'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est une tautologie.

2.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

On en déduit que l'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est équivalente à $\mathcal{Q}$.

Commentaires : Pour certains, vous avez vraiment pensé que l'exercice consistait simplement à me faire deux tableaux avec des V et des F sans me mettre une seule phrase ?

Correction de l'exercice 2 –

1. Pour tout $x, y \in [1; +\infty[$, $(1 + xy) - (x + y) = (x - 1)(y - 1) \geq 0$ i.e. $x + y \leq 1 + xy$.

Commentaires : Évitez le plus possible de faire des successions d'équivalences. C'est moche !

De plus, commencer par écrire « On a $x + y \leq \dots$ » est faux.

2. Par récurrence sur n :

- L'inégalité est évidente pour $n = 1$ (il y a même égalité).

— Supposons l'inégalité vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in [1; +\infty[$. Comme $1 + a_{n+1} > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) &= \left(\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \right) (1 + a_{n+1}) \\ &\leq 2^{n-1} \left(1 + \prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + a_{n+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= 2^{n-1} \left(1 + \underbrace{a_{n+1} + \prod_{i=1}^n a_i}_{x+y} + \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} \right) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} &\leq 2^{n-1} \left(1 + \underbrace{1 + \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1}}_{1+xy} + \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} \right) \\ &= 2^n \left(1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i \right). \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Commentaires : *Je redis que montrer une hérédité ne consiste pas à juste changer n en $n+1$, ce serait bien trop simple.*

— Initialisée pour $n = 1$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 3 –

1. 1/ La traduction immédiate de la propriété est :

$$\mathcal{P} : \exists i, j \in \{0, \dots, n\}, (i \neq j) \text{ et } \left(x_j - x_i \leq \frac{1}{n} \right).$$

Quitte à réordonner la liste des x_i , on peut très bien supposer qu'il existe deux réels consécutifs vérifiant cette propriété. Ce qui s'écrit :

$$\mathcal{P} : \exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Commentaires : *La « réordonnation » devait être expliquée.*

2. La négation de cette assertion est donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

Commentaires : *Attention ! si les x_i n'avaient pas été ordonnés, la distance entre deux d'entre eux aurait du s'écrire avec des valeurs absolues.*

3. Supposons que la propriété $\mathcal{P}$ est fausse, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

En écrivant :

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \\ &> n \times \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité contredit la définition des x_i . Elle est donc fausse. On conclut que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

Correction de l'exercice 4 –

1. Soit $F : t \mapsto t - \ln(1+t)$. F est définie et dérivable sur $] -1; +\infty[$.

Commentaires : *On ne dérive plus sans montrer que la fonction est dérivable et dire où.*

Pour tout $t > -1$, $F'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$. On en déduit que F est décroissante sur $] -1; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, donc elle possède une valeur minimale en 0, qui est 0.

Conclusion, pour tout $t > -1$, $F(t) \geq 0 \iff \ln(1+t) \leq t$.

Commentaires : *La démonstration est bien plus jolie en utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$: sa courbe est donc sous ses tangentes. En particulier celle en 0 d'équation $y = x$.*

2. Il est presque évident que $\mathcal{D}_\varphi =] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$.

Sur $\mathcal{D}_\varphi$, φ est un quotient de fonctions dérivables **dont le dénominateur ne s'annule pas**, elle y est dérivable et on a :

$$\forall t \in \mathcal{D}_\varphi, \varphi'(t) = -\frac{\ln(1+t) - t}{t^2} > 0.$$

La fonction φ est donc strictement monotone sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Commentaires : *Attention ! Personne n'a jamais dit qu'elle était strictement monotone sur $\mathcal{D}_\varphi$ mais sur tout intervalle inclus dans celui-ci.*

3. (a) La fonction $x \mapsto 1+ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est à valeurs dans $]1; +\infty[$, donc dans $]0; +\infty[$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

D'après le théorème de composition des fonctions dérivables, $x \mapsto \ln(1+ax)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, la fonction $x \mapsto \ln(1+bx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction g , quotient de fonctions dérivables **dont le dénominateur ne s'annule pas**, est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (b) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{a(1+bx) \ln(1+bx) - b(1+ax) \ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{abx(\varphi(bx) - \varphi(ax))}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \quad \text{du signe de } (\varphi(bx) - \varphi(ax)). \end{aligned}$$

Comme $0 < a \leq b$ et $x > 0$ alors $0 < ax \leq bx$, et $\varphi(bx) - \varphi(ax) \geq 0$ par croissance de φ .

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \geq 0$: la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Par croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$, si $a \leq b$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ et $g\left(\frac{1}{b}\right) \leq g\left(\frac{1}{a}\right)$. Ce qui se traduit par :

$$(0 <) \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln 2} \leq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)} \iff \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Commentaires : *On fera bien attention au fait que l'on multiplie les inégalités par des nombres positifs.*

Par symétrie du rôle joué par a et b et par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, ce résultat est encore vrai pour $a \geq b$.

Conclusion,

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \leq (\ln 2)^2.$$

Ensembles

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique est hors programme.

1. Ensembles

- Ensemble, appartenance.
- Ensemble vide.
- Partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble. Inclusion
- Ensembles images directe et réciproque par une application.
- Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.
- Famille d'éléments d'un ensemble.
- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble.
- Recouvrement disjoint, partition.

2. Ensembles de nombres usuels :

- Entiers naturels.
- Entiers relatifs, nombres décimaux.
- Nombres rationnels, réels, irrationnels.



Ensembles

La notion d'ensembles semble, à première vue, une notion intuitive évidente ne nécessitant pas de précautions particulières. Cette notion intuitive est à la base de toutes les mathématiques, depuis leur origine, que ce soit :

- l'arithmétique élémentaire : ensemble d'entiers, puis de divers autres types de nombres, utilisés depuis qu'on sait compter,
- la géométrie d'Euclide à nos jours : une figure est un sous-ensemble du plan,
- l'analyse : on étudie des fonctions définies sur des ensembles,
- ou l'algèbre moderne : étude des structures algébriques, définies comme des ensembles munis d'un certain nombre de lois supplémentaires.

Longtemps, les mathématiciens se sont contentés de ce point de vue intuitif, sans chercher à formaliser cette notion. Ce n'est qu'à l'aube du XX^{ème} siècle qu'on s'est penché sur cette formalisation, qui a bien failli faire vaciller l'édifice mathématique sur ses fondations.

En effet, Cantor, puis Russell au travers de son célèbre paradoxe, ont montré qu'on ne pouvait pas se contenter de cette approche intuitive, et que celle-ci amenait des contradictions si on admettait que toute collection pouvait être un ensemble : ainsi, le paradoxe de Russell^[1] montre qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles. Les mathématiciens pensèrent même un moment qu'il n'était pas possible de donner une formalisation correcte de la notion d'ensembles ; cela aurait signifié ni plus ni moins la faillite des mathématiques.

Heureusement, au prix d'une axiomatique assez lourde, les mathématiciens logiciens de l'époque ont réussi à mettre en place cette formalisation. On peut dire que cette « crise des fondements » a marqué la naissance des mathématiques et de la logique moderne, par une formalisation systématique de toutes les notions utilisées. Logique dont nous avons eu un échantillon au chapitre précédent.

Depuis, l'édifice mathématique a des fondements solides et ne s'assoit plus sur des sables mouvants.

[1]. En 1901, le logicien et philosophe anglais Bertrand Russell exprime le premier paradoxe simple prouvant que toute collection ne peut pas être un ensemble. En effet, en définissant $E = \{\text{ensembles } F \text{ qui ne se contiennent pas eux-mêmes}\}$, si E était un ensemble :

- si $E \notin E$, alors par définition de E , E est élément de E , d'où une contradiction ;
- si $E \in E$, alors, par définition de E , E n'est pas élément de E , d'où une contradiction.

Cet argument très simple montre que E ne peut pas être un ensemble.

Ce paradoxe est connu sous le nom de « paradoxe de Russell » ou parfois « paradoxe du barbier ». En effet, la situation s'apparente à celle d'un barbier qui rase tout homme qui ne se rase pas lui-même. Ce barbier peut-il être un homme ?

CONTENU

I	Notions sur les ensembles	41
I.1	Généralités	41
I.2	Inclusion d'ensembles	43
I.3	Égalité d'ensembles	44
I.4	Ensemble des parties d'un ensemble	47
II	Ensembles et fonctions	48
II.1	Vocabulaire usuel	48
II.2	Image directe par une application	48
II.3	Image réciproque par une application	53
III	Opérations sur les ensembles	55
III.1	Complémentarisation	55
III.2	Intersection	56
III.3	Réunion	58
III.4	Différence	59
IV	Famille d'ensembles	60
IV.1	Réunion et intersection	60
IV.2	Notion de partition	62
V	Produit cartésien	64
	<i>Feuille d'exercices n° 2 : Ensembles</i>	67
	<i>Test n° 2 : Ensembles</i>	74
	<i>Devoir en temps libre n° 2 : Ensembles</i>	78
	<i>Correction</i>	79
	<i>Programme de Khôlle des semaines 1 et 2</i>	85
	<i>Programme du chapitre III</i>	86

I/ Notions sur les ensembles

I.1 Généralités

Conformément au préambule, nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive et nous nous contenterons de la définition suivante :

Définition 1 : On appelle *ensemble* toute collection d'objets, appelés ses *éléments*, considérés sans ordre, ni répétition possible.

— « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x appartient à E » et se note $x \in E$.^[2]

Dans le cas contraire, on écrira $x \notin E$ et on lira « x n'appartient pas à E ».

— Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera $\emptyset$.^[3]

Les ensembles, ainsi définis, permettent alors de définir à leur tour tous les objets mathématiques.

Un ensemble à un seul élément est appelé un *singleton*, noté avec des $\{ \}$, un ensemble à deux éléments, une *paire*. Il n'y a pas d'ordre dans l'écriture.

ATTENTION

L'ensemble $\{\emptyset\}$ N'EST PAS VIDE ! il a un élément qui est l'ensemble vide contrairement à l'ensemble $\emptyset$ qui n'a pas d'éléments.

Exemples 1 :

- Les faces d'un dé : $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.
- Les couleurs d'un jeu de 32 cartes : $\mathcal{C} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

Remarque : La définition donnée est insuffisante : on ne peut pas prendre pour E n'importe quelle collection d'objets, sinon la théorie devient contradictoire (cf. paradoxe de Russell). Pour éviter cela, on peut imposer que E ne se contienne pas lui-même.

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des *entiers naturels*, l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$

- On appelle ensemble des *entiers relatifs*, l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leur opposé :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{ -n / n \in \mathbb{N} \}.$$

- On appelle *nombre décimal*, un nombre admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, i.e. un nombre de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} / a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

[3]. Le symbole $\in$ vient de la lettre epsilon ϵ , première lettre du verbe *être* en grec).

[3]. Le symbole représente un cercle pour le tout, barré ($\emptyset$) et non un zéro barré ($\cancel{0}$).

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

- On appelle *nombre rationnel* un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des *nombre réels*, l'ensemble $\mathbb{R}$ dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.
- On appelle ensemble des *nombre complexes*, l'ensemble $\mathbb{C}$ des couples de réels muni d'une multiplication particulière :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + i b / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}.$$

Remarque : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{2^p 5^q} / a \in \mathbb{Z}, (p; q) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$

On peut définir des ensembles par :

1. Extension :

$E = \{1; 8; 6; 2\} = \{1; 1; 1; 8; 6; 6; 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).

$I = \{1; 3; 5; 7; 9\}$: l'ensemble des dix premiers nombres impairs.

$B = \{\text{valet}; \text{dame}; \text{roi}\}$: l'ensemble des figures d'une jeu de cartes.

$D = \{1; 2; 8; 16, \dots\} = \{2^i\}_{i \in \mathbb{N}}$: l'ensemble des puissances de 2.

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.

2. Compréhension :

$I = \{p \in \mathbb{N} / p \text{ est impair}\} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$ i.e. la donnée d'une propriété $\mathcal{P}$ caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros, ici $\mathbb{N}$).

Étant donné un ensemble E et une propriété $\mathcal{P}$, on définit F comme sous-ensemble de E :

$$F = \{x \in E / \mathcal{P}(x)\}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in E, x \in F \iff \mathcal{P}(x).$$

Exemple 2 : L'ensemble des naturels pairs peut être défini par extension $\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8, \dots\}$ et par compréhension $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$.

Exercice 1 : Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

1. l'ensemble des naturels impairs,

2. la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x; y)$ du plan $(\mathcal{P})$ vérifiant $y = f(x)$),
3. la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.

3. Induction structurelle :

C'est se donner un certain nombre d'éléments de E , et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 : L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E , pq est dans E .

4. **Construction :** Unions, intersections d'ensembles. Nous reverrons ce principe.

Exemple 4 : Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{D}_a$ l'ensemble des diviseurs de a .

Alors, pour tous entiers a et b , $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b .

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 3 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Un ensemble A est dit *inclus* dans un ensemble B , noté $A \subset B$, si tout élément de A est aussi un élément de B .

On dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B ou une *partie* de B .

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

Exemple 5 : $\{-2, 5\} \subset \mathbb{Z}$ et $\{1, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$.

Remarque : La notion de singleton nous donne un lien entre appartenance et inclusion :

Soit E un ensemble et a un objet. Alors :

$$a \in E \iff \{a\} \subset E.$$

Au bon usage des symboles $\in$ et $\subset$:

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $F \subset E$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $F \notin E$.
- ET un élément n'est pas inclus dans un ensemble : $x \not\subset E$.

ATTENTION

Remarques : Pour tous ensembles A , B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A$!).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

On dit que l'inclusion est *transitive*.

Exercice 2 : Compléter les propositions suivantes avec le symbole $\in$ ou $\subset$.

1. $\emptyset \dots \{1, 2, 3, 4\}$

2. $1 \dots \{1, 2, 3, 4\}$

3. $\{1\} \dots \{1, 2, 3, 4\}$

Proposition 1 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$$A \subset B \iff (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)).$$

Méthode 1 (Montrer $A \subset B$) :

- On considère un élément quelconque de A , par exemple, vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}$ et on montre qu'il appartient à B , par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété $\mathcal{Q}$.

ou

- Par la contraposée, on considère un élément n'appartenant pas à B et on montre qu'il ne peut appartenir à A .

Exercice 3 : Montrer que $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\} \subset [-2; 2]^2$.

I.3 Égalité d'ensembles

Définition 4 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

On dit que les ensembles A et B sont *égaux*, noté $A = B$, s'ils ont exactement les mêmes éléments.

L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$\begin{aligned} A = B &\iff A \subset B && \text{et} && B \subset A \\ &\iff (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in A) && \text{et} && (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in B). \end{aligned}$$

Dans le cas d'ensembles A et B respectivement définis par deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'égalité des ensembles équivaut à l'équivalence des propriétés :

$$A = B \iff \forall x \in E, \mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x).$$

Méthode 2 (Égalité de deux ensembles) :

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procèdera donc par double inclusion ou directement par équivalence.

Exercice 4 : Soient $a \leq b$ deux réels. Montrer que $[a; b] = \{(1-t)a + tb / t \in [0; 1]\}$.

Correction : Soit $t \in [0; 1]$ et $x = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$.

Comme $0 \leq t \leq 1$ alors $0 \leq t(b-a) \leq b-a$ puis $a \leq a + t(b-a) \leq b$ i.e. $x \in [a; b]$.

Réciproquement, soit $x \in [a; b]$ et posons $t = \frac{x-a}{b-a}$.

Comme $a \leq x \leq b$, alors $0 = \frac{a-a}{b-a} \leq t = \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{b-a}{b-a} = 1$ et on a :

$$t = \frac{x-a}{b-a} \iff t(b-a) = x-a \iff x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb.$$

Donc $x \in \{(1-t)a + tb / t \in [0; 1]\}$.

Remarque : On dit que le segment $[a; b]$ est l'enveloppe convexe des points a et b dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $A \not\subset B \iff \exists x \in A / x \notin B \iff \exists x \in A / x \in \overline{B}$.
- $A \neq B \iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \iff \exists x \in A / x \notin B \text{ ou } \exists x \in B / x \notin A$.

Exemple 6 : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Proposition 3 :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Preuve :

— Par construction, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

D'autre part $-3 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$ car négatif donc $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$.

— $\forall a \in \mathbb{Z}, a = \frac{a}{10^0} \in \mathbb{D}$.

Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

D'autre part, montrons que $\frac{1}{10} \in \mathbb{D}$ en supposant le contraire i.e. $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{10} = m \Leftrightarrow 1 = 10m$.

m serait alors inversible dans $\mathbb{Z}$ donc égal à ± 1 ce qui n'est pas.

Conclusion, $\frac{1}{10} \notin \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \neq \mathbb{D}$.

— Il est assez clair que tout nombre de la forme $\frac{a}{10^n} \in \mathbb{Q}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

De plus, $\frac{1}{3}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$. Si c'était le cas, on aurait $3p = 10^n \Leftrightarrow 3|10^n$, ce qui est absurde.

Donc $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$.

— $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par construction.

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ que l'on peut supposer premiers entre eux.

On aurait $2b^2 = a^2$, et donc a serait pair.

En posant $a = 2a'$, on a $b^2 = 2a'^2$, donc b est également pair ce qui contredit l'hypothèse de primalité.

Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

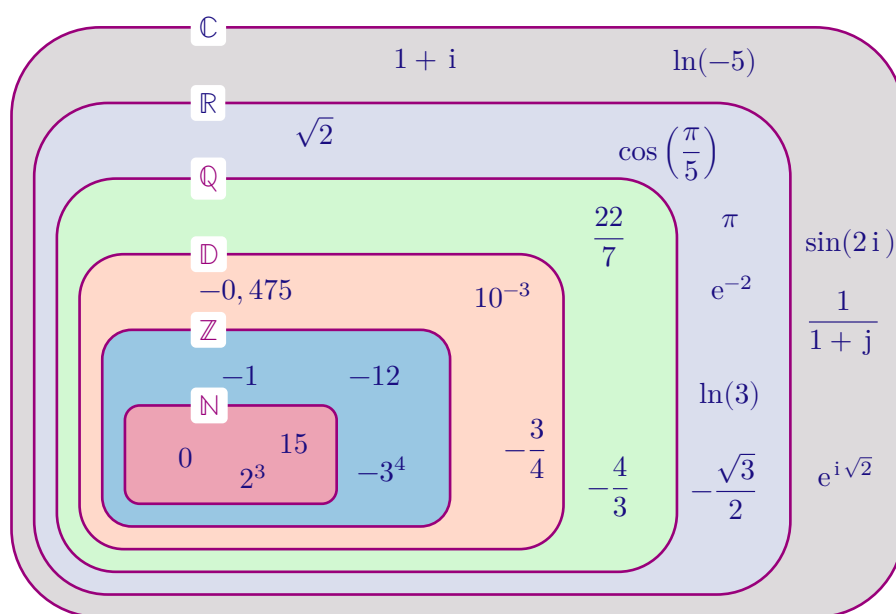


Figure II.1 – Les ensembles de nombres usuels

Remarque : Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés *irrationnels*. Leur ensemble est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (« $\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$ »).

Exercice 5 (Vrai ou Faux ?) :

1. La somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Le produit de deux rationnels est un rationnel.
3. La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
4. Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
5. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 : Si A est inclus dans un ensemble E , on dit que A est une partie de E .

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie *pleine* E donc $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites *propres* ou *strictes*.

Remarque : Ainsi que nous l'avons évoqué en début de section, toute collection d'éléments ne peut pas nécessairement être considérée comme un ensemble.

Par exemple, on ne peut pas parler de l'ensemble des ensembles^[4]. Il n'est donc, a priori, pas évident que $\mathcal{P}(E)$ soit toujours un ensemble. En fait, cela fait partie des axiomes que l'on pose pour définir la théorie des ensembles mais, conformément au programme, je n'en dirai pas plus sur ce point.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

ATTENTION

Si A est un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dont l'appartenance est notée avec le symbole $\in$, A est un sous-ensemble de E marqué par le symbole $\subset$.

Exemples 7 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Exercice 6 : Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathcal{P}([a; b])$.

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E , on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E , notés par des petites lettres $x, y, a, \dots$
- celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(E)$, notées par des majuscules droites : $A = \{x, y\}, \dots$

[4]. Pour bien comprendre cela je vous renvoie au problème du barbier qui rase toutes les personnes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui le rase ?

- celui des ensembles de parties de E , inclus dans $\mathcal{P}(E)$ *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, notés par des majuscules cursives : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, ...

II/ Ensembles et fonctions

Les applications seront définies de manière rigoureuse au chapitre suivant. On se contente ici de la notion intuitive dégagée en terminale.

II.1 Vocabulaire usuel

Définition 6 (Ensemble de définition, image et antécédents) : Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition* de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in E$ est appelé une valeur de f .

Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, si $y = f(x)$, on dit que y est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de y par f .

On dira souvent que $f : E \mapsto F$ est à valeurs dans F mais sans suggérer que tous les éléments de F sont atteints.

II.2 Image directe par une application

Définition 7 : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E .

On appelle *image* (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x_y \in A, f(x_y) = y\} \subset F.$$

Si $f(A) \subset A$, on dit que A est *stable* par f .

Vocabulaire : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On appelle *ensemble image* de f , noté $im f$ ou $f(E)$, l'ensemble de toutes les images de E par f .

C'est donc une partie de F et plus précisément c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E *i.e.*

$$im f = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On fera attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image $f(E) \subset F$.

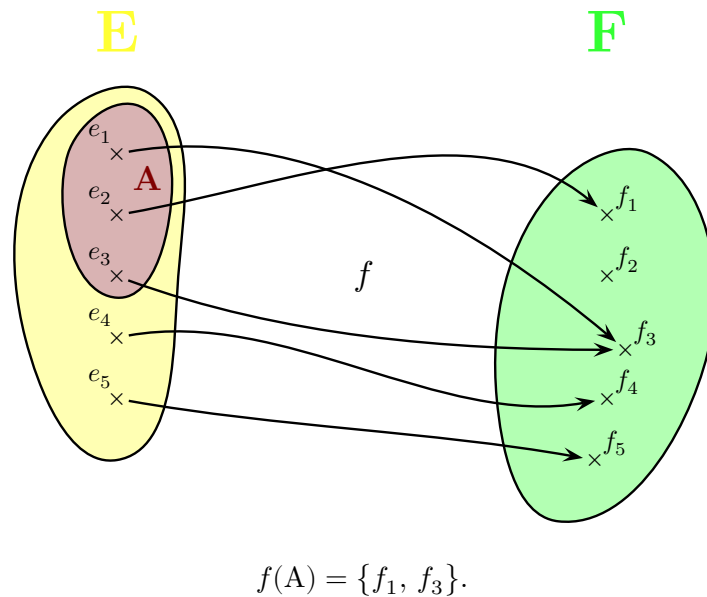


Figure II.2 – Image directe d’une partie par une application.
On parle ici de *diagramme sagittal*.

Exemples 8 :

- L’ensemble image de la fonction $\cos$ est $[-1; 1]$.
- L’image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de $\mathbb{R}_-$ est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f([-3; 2]) = [0; 9]$. L’intervalle $[-1; 1]$ est stable par f . $[-1; 0]$ ne l’est pas.
 $x \mapsto x^2$
- Par la fonction $\sin$:
 - l’image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l’image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,
 - et l’image de $[0; 2\pi]$ est aussi $[-1; 1]$.
 - l’image de $\pi\mathbb{Z}$ est $\{0\}$.
- Plus généralement, pour déterminer l’ensemble image d’une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on étudie les variations de f .
- L’ensemble image de la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = z^2$ est $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. On le démontrera plus tard mais, intrinsèquement, ceci signifie que tout nombre complexe possède, au moins, une racine carrée.

ATTENTION

$\sin$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1] \neq \mathbb{R}$.

L’exponentielle est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}$ voire $\mathbb{R}_+$ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.

D’une manière générale, $f(E) \neq F$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Déterminer :
 $x \mapsto \cos x$

1. $f(\mathbb{R})$.

2. $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

3. $f([0; \pi])$.

Définition 8 (Surjection) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une *surjection* ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

La définition (8) revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E , ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$$

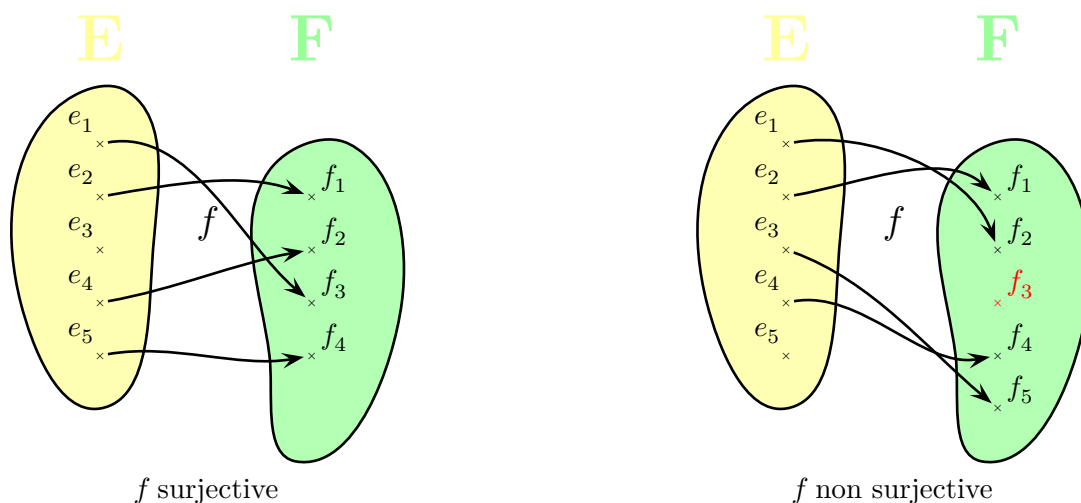


Figure II.3 – Diagramme sagittal d'une fonction surjective.

Et d'une manière générale très importante :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ dans } F \iff \text{im} f = F \iff f(E) = F.$$

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E .
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.
- Si $f : E \mapsto F$ est une application, alors f induit une surjection entre E et $\text{im} f$ qui est l'application :

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow \text{im} f \\ x &\mapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Toute « corestriction » d'une application à son ensemble image est donc surjective.

— La projection $p_E : E \times F \rightarrow E$ est surjective.

$$(x; y) \mapsto x$$

Les relèvements (antécédents) de tout élément x de E sont de la forme $\{x\} \times F$.

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction est surjective) :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 : Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^2$$

3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x$$

4. $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto 2n$$

Définition 9 (Injection) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une *injection* (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.

La définition (9) revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E .

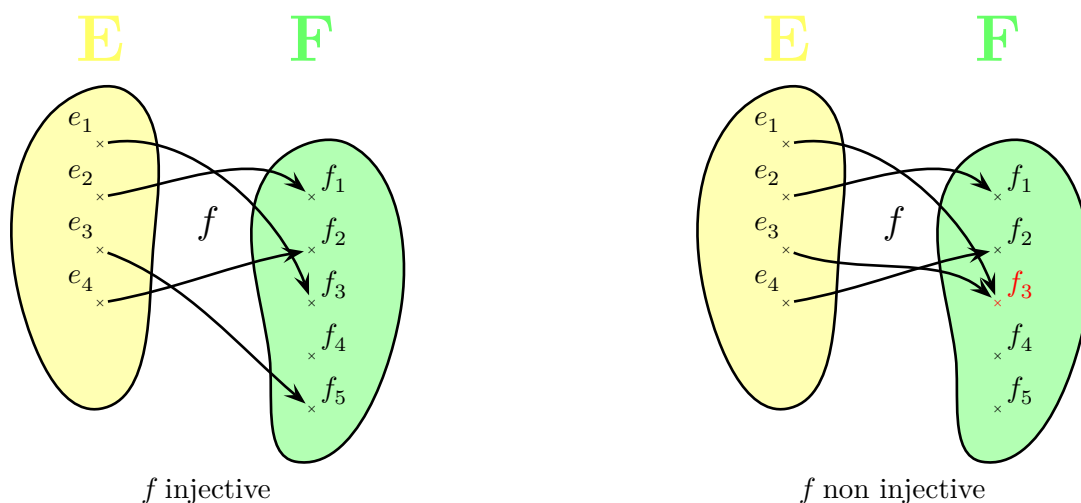


Figure II.4 – Diagramme sagittal d'une fonction injective.

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.
- Soit A une partie non vide de E , l'application $i : A \rightarrow E$ est injective d'où son nom

$$x \mapsto x$$
d'injection canonique de A dans E .
- La fonction $\ln$ est une injection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de même que sa fonction réciproque $\exp$ qui l'est de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas une injection de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 :

$f : E \mapsto F$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall (x; y) \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Preuve : Si f est injective sur E , par définition, les antécédents sont uniques donc $\forall (x; y) \in E^2$, $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$.

Réciproquement, soit f vérifiant la propriété $\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y$ et soit $z \in F$ ayant deux antécédents distincts x et y dans E i.e. $z = f(x) = f(y)$.

La propriété vérifiée par f entraîne immédiatement $x = y$ ce qui contredit l'hypothèse sur z qui ne peut donc avoir qu'un unique antécédent i.e. f est injective.

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier » en cours de calcul i.e. si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ après « simplification ».

La fonction f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents et, en particulier,

Corollaire 4.1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

Exemple 11 : La fonction $x \mapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Méthode 4 (Montrer qu'une fonction est injective) :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est injective sur E , on considère deux éléments x et y de E tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

Exercice 9 : Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$1. \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

$$2. \begin{aligned} g : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

$$3. \begin{aligned} k :]-\pi; 0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

II.3 Image réciproque par une application

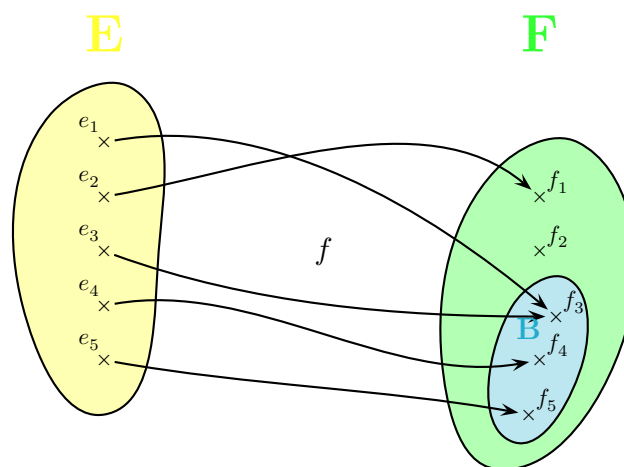
Définition 10 : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F . On appelle image *réciproque* de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 12 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$.

$$1. f^{-1}(]1; 3]) = [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}].$$

$$2. f^{-1}(]-1; 4]) =]-2; 0] \cup [0; 2[.$$



$$f^{-1}(B) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}.$$

Figure II.5 – Image réciproque d'une partie par une application.

ATTENTION

La notation f^{-1} peut porter à confusion avec la fonction réciproque d'une fonction bijective f .

On ne suppose nullement ici que f est bijective dans la définition de $f^{-1}(B)$ mais lorsque f le sera on pourra ultérieurement vérifier que l'image réciproque de B par f correspond à l'image directe de B par f^{-1} .

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Déterminer :
 $x \longmapsto \cos x$

1. $f(\mathbb{R})$.	4. $f^{-1}(\{1\})$.	7. $f(f^{-1}([0; 1]))$.
2. $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.	5. $f^{-1}([-1; 2])$.	8. $f^{-1}\left(f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$.
3. $f^{-1}(\mathbb{R})$.	6. $f^{-1}([0; \pi])$.	

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

1. $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.	2. $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Preuve :

1. Soit $A \subset B$. Si $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Or, $x \in B$.

Donc, $y \in f(B)$ par définition de $f(B)$.

2. Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ i.e. $x \in f^{-1}(f(A))$ par définition.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :

Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de F , on a :

1. $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.	2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Preuve :

1. Soit $A \subset B$. Si $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A \subset B$ donc $f(x) \in B$ i.e. $x \in f^{-1}(B)$.

2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x) \in B$ par définition de $f^{-1}(B)$.

III/ Opérations sur les ensembles

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E.

III.1 Complémentarisation

Définition 11 : Le *complémentaire* d'un ensemble A (dans E), noté $C_E A$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

$$C_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$

En théorie des ensembles, on utilisera souvent les diagrammes de Venn ^[5] pour illustrer les relations entre eux.

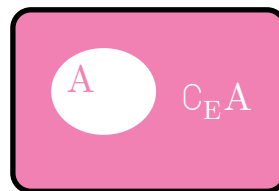


Figure II.6 – Complémentaire d'une partie.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in C_E A \iff x \notin A.$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

Remarque : La notion de complémentarité dépend de l'ensemble de référence E donc attention aux velléités trop hâtives de remplacer la notation $C_E A$ par $\bar{A}$.

Exercice 11 : Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

On considère $A = \{1, 2\}$. Déterminer $C_E A$ et $C_F A$.

Proposition 7 :

- $C_E E = \emptyset.$
- $C_E \emptyset = E.$
- $\forall A \subset E, C_E (C_E A) = A.$

La dernière propriété se dit, que la complémentarisation est une opération involutive ^[6]

[5]. John Venn (1834-1923) est un mathématicien et logicien britannique, renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn qui sont employés dans beaucoup de domaines, notamment en théorie des ensembles, en probabilité, en logique, en statistique et en informatique.

John Venn a présenté les diagrammes portant son nom en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

[6]. Comme la conjugaison dans C, la symétrie axiale dans le plan ou l'inversion sur les réels non nuls.

III.2 Intersection

Définition 12 : L'*intersection* de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

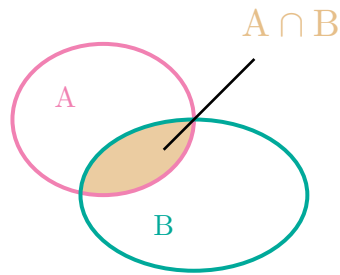


Figure II.7 – Intersection d'ensembles.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).$

L'intersection est aux ensembles ce que la *conjonction* est aux propriétés.

Exemples 13 : $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\}$ et $[1; 3] \cap]2; 4] =]2; 3].$

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap E = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

($\emptyset$ est absorbant pour $\cap$)
(E est élément neutre pour $\cap$)
(A et $\overline{A}$ sont disjoints dans E)

Définition 13 (Ensembles disjoints) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On dit que A et B sont *disjoints* ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont *distincts* lorsqu'ils ne sont pas égaux.

Comme on l'a vu, un sous-ensemble et son complémentaire dans E sont toujours disjoints.

Remarque : $\emptyset$ est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! À part ça, disjoint implique distinct.



A et B sont distincts.

Figure II.8 – Ensembles disjoints et distincts.

Proposition 9 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E.

$$A \text{ et } B \text{ sont disjoints} \iff A \cap B = \emptyset \iff A \subset \complement_E B \iff B \subset \complement_E A.$$

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont distincts} &\iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \\ &\iff \text{il existe un élément appartenant à l'un des} \\ &\quad \text{ensembles et pas à l'autre.} \end{aligned}$$

Théorème 10 (Stabilité par intersection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

1. Pour toute parties A et B de E, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Pour toute parties A et B de F, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Preuve :

1. Si $x \in A \cap B$ alors $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. On en déduit $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

On n'a pas l'inclusion réciproque en général. Il suffit pour cela de considérer la fonction $\cos$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les ensembles $A = \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$ et $B = [0; \pi]$ pour lesquels $f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. $x \in f^{-1}(A \cap B) \iff f(x) \in A \cap B \iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Contre-Exemple 14 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2$$

Alors $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \neq f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.

III.3 Réunion

Définition 14 : La *réunion* de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

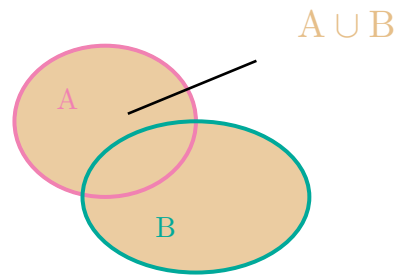


Figure II.9 – Réunion d'ensembles.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B).$

La réunion est aux ensembles ce que la *disjonction* est aux propriétés.

Proposition 11 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

— $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

— $A \cup \emptyset = A$.

— $A \cup E = E$.

— $A \cup \bar{A} = E$.

($\emptyset$ est neutre pour $\cup$)

(E est élément absorbant pour $\cup$)

(A et $\bar{A}$ recouvrent E)

Exercice 12 :

1. Simplifier $[1; 3] \cup]2; 4]$.

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$.

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E, on a :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Preuve :

1. Si $x \in A$ ou $x \in B$ alors $f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B)$ i.e. $f(x) \in f(A) \cup f(A)$.

Réciproquement, comme $A \subset A \cup B$, on a d'après, le premier point, $f(A) \subset f(A \cup B)$ et, de la même manière, $f(B) \subset f(A \cup B)$. On en déduit $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ puis l'égalité par double inclusion.

$$2. x \in f^{-1}(A \cup B) \iff f(x) \in A \cup B \iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Proposition 13 (Propriétés algébriques de $\cap$ et $\cup$) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Associativité

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sous-ensemble

- $\complement_E(E) = \emptyset$ et $\complement_E(\emptyset) = E$
- $\complement_E \complement_E A = A$ et $A \cup \complement_E A = E$.
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \complement_E B \subset \complement_E A$.

L'équivalence $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ est aux ensembles ce qu'est aux propriétés l'équivalence entre une propriété et sa contraposée.

III.4 Différence

Définition 15 : La *différence* des ensembles A et B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B .

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B.$$

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes non réels. Cet ensemble contient strictement l'ensemble des imaginaires purs non nuls $i\mathbb{R}^*$.^[7]

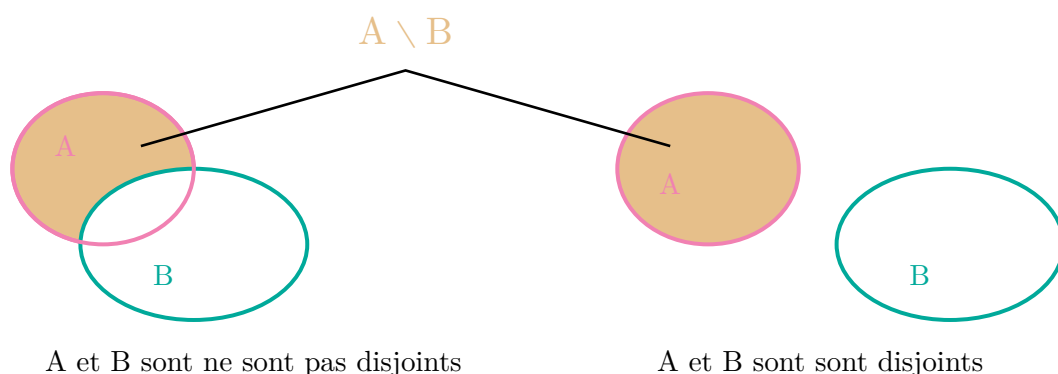


Figure II.10 – Différence de deux ensembles.

Il faut bien garder en tête la correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques :

Résumé et analogie :

$\cup \equiv \vee$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$
$\cap \equiv \wedge$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$
$\subset \equiv \Rightarrow$	$x \in \complement B \Leftrightarrow \neg(x \in B)$
$= \equiv \Leftrightarrow$	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

IV/ Famille d'ensembles

IV.1 Réunion et intersection

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque.

- La *réunion* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i_x \in I, x \in A_{i_x}\}.$$

- L'*intersection* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Remarque : L'existence de tels ensembles est un axiome de la théorie des ensembles.

[7]. De la même manière que 0 est l'unique réel à être positif et négatif, c'est le seul nombre complexe à être réel et imaginaire pur.

Exemples 16 :

- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; (2n+1)\pi].$

On montrera plus tard que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right] = [0; 1].$
- $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0; 1].$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 \right] = \{1\}.$

Un certain nombre de propriétés vues dans les paragraphes précédents se généralisent aux unions et intersections quelconques :

Proposition 14 :

Étant donné $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E .

Distributivité :

- $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$
- $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$

Lois de Morgan :

- $c_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (c_E A_i).$
- $c_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (c_E A_i).$

Exercice 13 : Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$
2. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$
3. $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$
4. $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.

Moralité : Les assertions du **théorème (12)** et du **théorème (10)** se généralisent à une famille quelconques de parties de E .

Proposition 15 :

Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Pour tout y de F , les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints et

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}).$$

Preuve : Par définition de f , il est déjà clair que $\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) \subset E$.

Réciproquement, soit $x \in E$. Alors $x \in f^{-1}(f(x))$. Avec $y = f(x) \in F$, $x \in \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$ et l'inclusion réciproque.

IV.2 Notion de partition

Définition 17 : Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

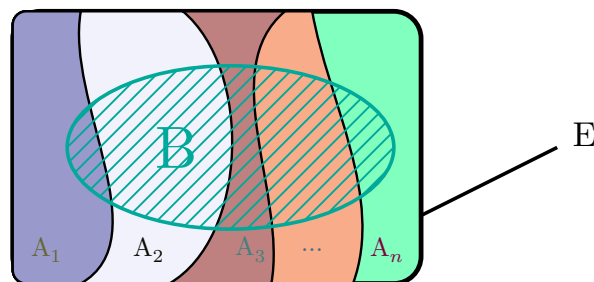
On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$,
- et $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Les sous-ensembles A_i s'appellent les *composantes* de la partition.

Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $I \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.

On note $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ pour signifier une réunion disjointe.



$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \dots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure II.11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.

Remarque : Des ensembles d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ tels que $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ sont dits *deux à deux disjoints*.

On a alors $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ mais la réciproque est fausse.

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le **théorème (8)** et le **théorème (11)**, on a $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Donc, A et $\overline{A}$ forment une *partition* de E .

- Soit $f : E \mapsto F$ une application.

D'après la **proposition (15)**, si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y \in F}$ forme une partition de E .

- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_- \sqcup \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de $\mathbb{R}$.
- Si $E \neq \emptyset$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.
- La famille d'intervalles $\{[n; n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.
- La famille des $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv k [3]\}$ pour $k = 0, 1, 2$ forme une partition infinie de $\mathbb{N}$.

Exercice 14 : Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

1. $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$
2. $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$
3. $\{\{a\}, \{c\}\}$
4. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

Exercice 15 : Quelles partitions pourrait-on envisager pour l'ensemble $E = [a; b]$?

V/ Produit cartésien

Une *liste*, ou *suite finie*, ou encore *famille finie* est une collection finie d'objets, appelés ses *éléments*, considérés avec ordre, et répétitions possibles.

- Le nombre d'éléments de la liste s'appelle sa *taille* ou son *ordre* ou encore, sa *longueur* ;
- Les listes de taille 2, 3, 4, 5, ..., n sont, respectivement, des couples, triplets, quadruplets, quintuplets, ..., n -uplets.
- On peut définir les listes à partir de la notion d'ensembles de la façon suivante :

1)	$(x) = \{x\}$
2)	$(x; y) = (\{x\}; \{y\})$
3)	$(x; y; z) = ((x; y); z)$
...	
n)	$(x_1; \dots; x_n) = ((x_1; \dots; x_{n-1}); x_n)$

- L'écriture de la liste $(a_1, \dots, a_n)$ est parfois abrégée en $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$; a_i est appelé la i -ème *coordonnée* de la liste.
- L'égalité de deux n -uplets se traduit comme suit :

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = y_i.$$

Plus généralement, on a la définition :

Définition 18 (Produit cartésien) : Étant donnés n ensembles $E_1, \dots, E_n$.

On appelle *produit cartésien*^[8] des ensembles $E_1, \dots, E_n$, noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ (ou $\prod_{i=1}^n E_i$), l'ensemble de tous les n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ dont la i -ème coordonnée est un élément de E_i .

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in E_i \}.$$

On pourrait également définir des produits cartésiens infinis comme les réunions et intersections, mais cela nécessite un peu plus de technique, et c'est hors-programme.

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 : $\mathbb{R}^n = \{ (x_1; \dots; x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R} \}.$

[8]. en l'honneur de Descartes qui a, le premier, dégagé la notion de coordonnées.

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n)$ et $\{x_1, \dots, x_n\}$.

- $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille ordonnée d'éléments :
$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$
- $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel
 - l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :
$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_n, \dots, x_1\},$$
 - le nombre d'apparitions des éléments n'a pas d'importance :
$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1, x_1, \dots, x_n\}.$$

ATTENTION

Exemples 19 :

- $(1; 2)$ est un couple différent de $(2; 1)$. L'ensemble $\{1, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2, 1\}$.
- $(1; 1)$ est un couple et $\{1, 1\} = \{1\}$ un singleton.
- Pour $A = \{a; b\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$, on a :

$$A \times B = \{ (a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3) \}.$$

$A \times B$	1	2	3
a	$(a; 1)$	$(a; 2)$	$(a; 3)$
b	$(b; 1)$	$(b; 2)$	$(b; 3)$

Remarque : Dans le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B , pour chaque élément a de A , on dispose d'une copie complète de B , identifiée au produit $\{a\} \times B$, c'est-à-dire à l'ensemble des couples $(a; b)$, pour b parcourant B .

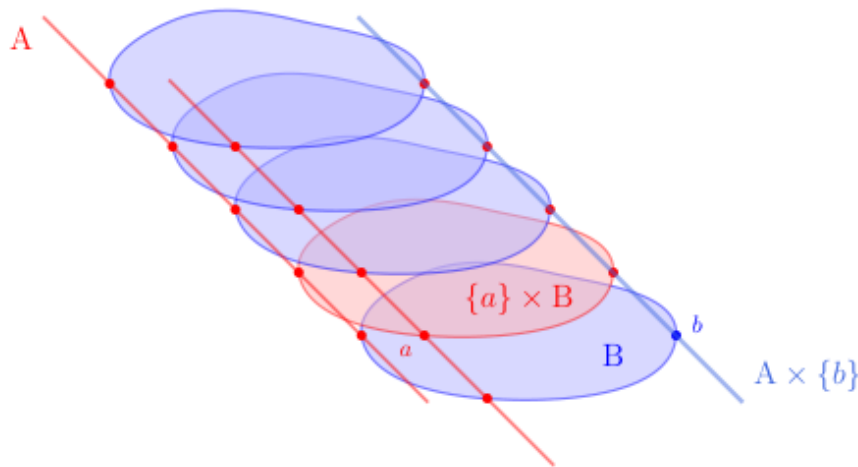


Figure II.12 – Sections de $A \times B$.

Remarque : D'un point de vue formel, on a donc l'équivalence :

$$\forall x \in E, \forall y \in F \iff \forall (x; y) \in E \times F.$$

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x; y)$ est noté $\mathbb{R}^2$. On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x; y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x; y)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p; q)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- Le cercle trigonométrique $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un produit cartésien. Il ne peut pas s'écrire sous la forme $A \times B$ où A, B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Proposition 16 :

Soit E, E' et F des ensembles.

Alors :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \vee (F = \emptyset)$
- $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$.
- $(E \cap E') \times F = (E \times F) \cap (E' \times F)$.

En général, $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

ATTENTION

Dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, $([0; 1] \times [0; 1]) \cup ([-1; 0] \times [-1; 0])$ est différent de l'ensemble $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

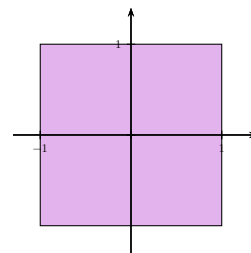
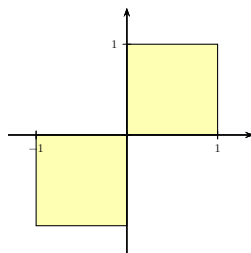


Figure II.13 – $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Exemples 21 :

- $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3); \\ (1; 2; 1); (1; 2; 2); (1; 2; 3) \end{array} \right\}$.
- Hachurer dans le plan $([0, 1] \cup [2, 3]) \times [0, 3]$.

Ensembles

Soit A une partie d'un ensemble E , on notera $\overline{A}$, le complémentaire de A dans E .

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que $\{x^2 + x + 1 / x \in \mathbb{R}\} \subset \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 2 : On considère les ensembles A et B définis respectivement par les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ci dessous. Quelles sont les inclusions possibles ?

1. $\mathcal{P} : y = x^2$ et $\mathcal{Q} : y^2 = x^4$.
2. $\mathcal{R} : 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ et $\mathcal{S} : y^2 \leq 1-x^2$.

Exercice 3 : Montrer que les ensembles $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}_+, y \geq x\}$ sont égaux.

Exercice 4 : Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

1. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
2. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.
3. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
4. $(A \cap B = A \cap C) \text{ et } (A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$.

Correction :

1. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$: Supposons $A \subset B$.

Soit $x \notin B$. Alors x ne peut appartenir à A i.e. $x \in \overline{A}$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$.

$\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$: Supposons $\overline{B} \subset \overline{A}$. En passant au complémentaire, l'implication précédente s'écrit :

$$\overline{\overline{B} \subset \overline{A}} \Leftrightarrow A \subset B.$$

Donc,

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$: Supposons $A \subset B$.

Par définition, $B \subset A \cup B$. Pour l'inclusion contraire, si $A \subset B$, tout élément de $A \cup B$ est élément de B donc $A \cup B \subset B$ et l'égalité.

$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$: Supposons que $A \cup B = B$.

Il est toujours vraie que $A \cap B \subset A$. De même, $A \subset A \cup B = B$ entraîne $A \subset A \cap B$ et l'égalité.
 $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$: Supposons $A \cap B = A$.

Par définition de l'intersection, $A \cap B \subset B$ donc $A \subset B$.

Donc,

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \cup B = E$: Supposons $A \subset B$. Il est déjà clair que $\overline{A} \cup B \subset E$.

Remarque : Comme $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ alors $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\neg \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Soit $x \in E$. Pour montrer que $x \in \overline{A} \cup B$, il suffit de montrer que si $x \notin \overline{A}$ alors $x \in B$.

Par hypothèse, $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in A \subset B$ et le résultat.

$\overline{A} \cup B = E \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$: Si $\overline{A} \cup B = E$ alors, en passant au complémentaire,

$$\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{E} \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

$A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow A \subset B$: Supposons $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et soit $x \in A$.

Alors $x \notin \overline{B}$ i.e. $x \in B$ et $A \subset B$. Donc,

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

On conclut avec la transitivité de l'équivalence.

2. Supposons $A \cup B = A \cap C$. Alors $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ puis $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$. On conclut par transitivité de l'inclusion.

La réciproque est claire.

3. Montrons la contraposée en supposant A et B distincts. Il existe alors $a \in A \setminus B$.

Il en vient que $a \in A \cup B$ et $a \notin A \cap B$. Ces deux ensembles sont distincts.

Commentaires : De manière directe, $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ et l'inclusion contraire par symétrie des rôles de A et B .

4. De la même manière, soit $B \neq C$ et $b \in B \setminus C$.

Par disjonction de cas, si $b \in A$ alors $b \in A \cap B$ mais $b \notin A \cap C$ i.e. $A \cap B \neq A \cap C$.

Si $b \notin A$ alors $b \in A \cup B$ mais $b \notin A \cup C$ i.e. $A \cup B \neq A \cup C$.

On vient bien de montrer que :

$$B \neq C \Rightarrow (A \cap B \neq A \cap C) \text{ ou } (A \cup B \neq A \cup C).$$

Exercice 5 : Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

1. Montrer que $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \Rightarrow A = B = C$

2. Montrer que : $\left\{ \begin{array}{l} (B \setminus C) \subset A \\ (C \setminus D) \subset A \end{array} \right. \Rightarrow (B \setminus D) \subset A$

Correction :

1. (a) Soit $x \in A$.

Alors $x \in A \cup C = C \cap B \subset B$ donc $A \subset B$.

(b) Soit $x \in B$.

Alors $x \in B \cup A = A \cap C \subset C$ donc $B \subset C$.

(c) Soit $x \in C$.

Alors $x \in B \cup C = B \cap A \subset A$ donc $C \subset A$.

On a donc montré successivement $A \subset B \subset C \subset A$ i.e. $A = B = C$ par transitivité et double inclusion.

2. Par la contraposée, supposons qu'il existe $x \in B \setminus D$ et $x \notin A$. En particulier $x \in B$.

(a) Si $x \notin C$ alors $x \in B \setminus C$ et $(B \setminus C) \not\subset A$.

(b) Si $x \in C$ alors $x \in C \setminus D$ et $(C \setminus D) \not\subset A$.

On a donc prouvé que $B \setminus D \not\subset A \Rightarrow (B \setminus C) \not\subset A$ ou $(C \setminus D) \not\subset A$. C'est bien la contraposée de ce qui était demandé.

Exercice 6 : Soient $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E et $B \subset E$ un sous-ensemble non-vidé de E .

Montrer que $(B \cap A_i)_{i \in I}$ forme une partition de B .

Exercice 7 : Soient E un ensemble, $n \geq 1$ un entier et $A_1, \dots, A_n$ des parties de E telles que :

- $A_1 = \emptyset$
- $A_n = E$.
- $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$.

On pose, $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$.

Montrer que $(B_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ forme une partition de E .

Correction : Par construction, $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $B_k \neq \emptyset$. Pour montrer que $(B_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ forme une partition de E , il suffit donc de vérifier deux conditions : l'union des B_k est égale à E , et les B_k sont deux à deux sont disjoints.

Montrons d'abord que $\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = E$:

Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, et tout $x \in B_k$, $x \in A_k \subset A_n = E$ donc l'inclusion $\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \subset E$ est claire.

Réciproquement soit $x \in E$ et posons $K_x = \{k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, x \in A_{k+1}\}$.

Comme $A_n = E$, $x \in A_n$ i.e. $n \in K_x$ qui est donc une partie non vide et majorée (par $n-1$) de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément k_0 .

Par définition, $x \in A_{k_0+1}$ et $x \notin A_{k_0}$ i.e. $x \in B_{k_0}$. L'inclusion réciproque est donc prouvée d'où l'égalité.

Remarque : Comme $A_1 = \emptyset$ et $A_n = E$, une autre méthode serait de montrer, par récurrence (itération ici plutôt), que

$$E = A_n \setminus A_1 = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_1) = \dots = \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} \setminus A_k) = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k.$$

Ensuite, montrons que les B_k sont disjoints deux à deux :

Supposons qu'il existe $i, j \in 1, 2, \dots, n-1$ tels que $i \neq j$ et $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Cela signifie que B_i et B_j partagent au moins un élément x .

Sans perte de généralité, supposons que $i < j \iff i+1 \leq j$.

Comme $x \in B_i$ alors $x \in A_{i+1} \subset A_j$. Mais $x \in B_j \implies x \notin A_j$.

D'où la contradiction si les B_k ne sont pas disjoints deux à deux.

La famille $(B_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ forme donc une partition de E .

Exercice 8 (Algèbre de parties) : Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de parties* de E si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\mathcal{A}$ n'est pas vide.
- (ii) Si $X \in \mathcal{A}$, alors $E \setminus X$ aussi.
- (iii) $\mathcal{A}$ est stable par union finie, autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $U_1, \dots, U_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de parties de E .
2. Montrer qu'une algèbre de parties de E est stable par intersection finie.
3. Combien d'algèbres de parties y a-t-il si E a exactement trois éléments ?

Correction :

1. (i) $\mathcal{P}(E)$ contient toujours E donc $\mathcal{P}(E)$ est non vide.
 (ii) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ i.e. $A \subset E$. Il est clair que $E \setminus A \subset E$ donc $E \setminus A \in \mathcal{P}(E)$.
 (iii) Soit $U_1, \dots, U_n$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, il est clair que $\bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathcal{P}(E)$.

Donc $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de parties de E .

2. Soit $U_1, \dots, U_n$ une famille finie d'éléments d'une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de E .

Par définition, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $E \setminus U_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{i=1}^n (E \setminus U_i) \in \mathcal{A}$.

D'après les lois de Morgan et les propriétés d'une algèbre de parties :

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = E \setminus \bigcup_{i=1}^n (E \setminus U_i) \in \mathcal{A}.$$

Une algèbre de parties de E est donc stable par intersection finie.

3. Si $\text{card}(E) = 3$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$ et en particulier, avec $E = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \right\}.$$

On en déduit 5 algèbres de parties de E :

- (a) L'algèbre triviale engendrée par $\{\emptyset, E\}$.
- (b) Les trois algèbres engendrées par $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ ou $\{\{c\}, \{a, b\}\}$.
- (c) L'algèbre maximale engendrée par $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ i.e. $\mathcal{P}(E)$.

II/ Applications

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1. $g_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

2. $g_2 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(x)$$

3. $g_3 : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos(x)$$

4. $g_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 3x + 5$$

5. $g_5 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$$

6. $g_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

7. $g_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x+1|$$

8. $g_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x+2| + |x-3|$$

9. $g_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x+2| - |x-3|$$

10. $g_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \cos x$$

Exercice 10 : Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exprimer celui de e^f , $\cos(f)$, $\sqrt{f}$, $\ln(f)$ et $\frac{1}{1-f}$ en fonction de $\mathcal{D}_f$.

Correction :

f	e^f	$\cos(f)$	$\sqrt{f}$	$\ln(f)$	$\frac{1}{1-f}$
$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathbb{R}_+)$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\{1\})$

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Déterminer les images directe et réciproque des parties suivantes :

1. $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}_+$.
3. $\{3\}$.

4. $\{-7\}$.
5. $[-2; 0[$.

6. $[-1; 4]$.
7. $] - 4; -2[\cup [1; 3]$.

Correction :

D	$f(D)$	$f^{-1}(D)$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$
$\{3\}$	9	$\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$
$\{-7\}$	49	$\emptyset$
$[-2; 0[$	$]0; 4]$	$\emptyset$
$[-1; 4]$	$[0; 16]$	$[-2; 2]$
$] - 4; -2[\cup [1; 3]$	$[1; 16[$	$[-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$

Exercice 12 :

1. $f : x \mapsto x e^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Déterminer son image $f(\mathbb{R})$.

2. Déterminer $\text{Im } g$ pour $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^2 \ln x$$

Exercice 13 : Soient f une application de E dans F ainsi que deux parties A, B telles que $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Montrer que :

1. $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

2. $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

Correction : Par équivalence, on a :

1.

$$y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \iff \exists x \in A \cap f^{-1}(B), y = f(x)$$
$$\iff x \in A \text{ et } f(x) \in B, y = f(x)$$
$$\iff y \in f(A) \cap B.$$

2.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\iff f(x) \in F \setminus A \iff f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin A \\ &\iff x \in f^{-1}(F) = E \text{ et } x \notin f^{-1}(A) \iff x \in E \setminus f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Exercice 14 : Montrer que l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est une égalité si, et seulement si f est injective.

Exercice 15 : Soit f une application sur un ensemble E .

1. Montrer que f est injective si, et seulement si pour toute partie A de E , $f(E \setminus A) \subset E \setminus f(A)$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si pour toute partie A de E , $E \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.
3. Cas d'égalité ?

Correction :

1. Pour le sens direct, supposons f injective sur E et considérons une partie A quelconque de E .

Pour tout $y \in f(E \setminus A)$ i.e. $\exists x \notin A, y = f(x)$.

Si $y \in f(A)$ alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$.

L'injectivité de f entraînerait alors que $x = x'$ et la contradiction.

Donc $y \notin f(A)$ et $f(E \setminus A) \subset E \setminus f(A)$.

Réciproquement, considérons deux éléments x, x' de E distincts i.e. $x' \notin \{x\}$.

Par hypothèse, $f(x') \notin f(\{x\}) \iff f(x) \neq f(x')$ et l'injectivité de f sur E

2. De la même manière, supposons f surjective sur E et considérons une partie A quelconque de E .

Soit $y \notin f(A)$. Comme f est surjective, y admet un antécédent $x \in E$ par f .

Comme $y \notin f(A)$, x ne peut appartenir à A i.e. $y \in f(E \setminus A)$ et le résultat.

Réciproquement, si f n'est pas surjective sur E , $E \setminus f(E) \neq \emptyset$ et $f(E \setminus E)$ qui le contient non plus. Ce qui est impossible.

Donc f est surjective sur E .

3. D'après les questions précédentes, f est bijective sur E si, et seulement si $E \setminus f(A) = f(E \setminus A)$.

Ensembles

1. Compléter :

Définition 7 : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E .

On appelle *image* (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x_y \in A, f(x_y) = y\} \subset F.$$

$$y \in f(A) \iff y \in F \text{ et } \exists x_y \in A, f(x_y) = y.$$

$$f \text{ est surjective sur } F \iff f(E) = F.$$

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

$$(a) \ A \subset f^{-1}(f(A)). \qquad (b) \ A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

2. Démontrer le **théorème (6)**.

- (a) Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ i.e. $x \in f^{-1}(f(A))$ par définition.
 (b) Soit $A \subset B$. Si $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A \subset B$ donc $f(x) \in B$ i.e. $x \in f^{-1}(B)$.

3. Démontrer le **théorème (10)**

Théorème 10 (Stabilité par intersection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

- (a) Pour toute parties A et B de E , $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 (b)

- (a) Si $x \in A \cap B$ alors $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. On en déduit $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

- (a) On n'a pas l'inclusion réciproque en général.

Il suffit pour cela de considérer la fonction $\cos$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les ensembles $A = \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$ et $B = [0; \pi]$ pour lesquels $f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ensembles

1. Compléter :

Définition 10 : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F .

On appelle image *reciproque* de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$

$$x \in f^{-1}(B) \iff x \in E \text{ et } f(x) \in B.$$

$$f \text{ est injective sur } E \iff \forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de F , on a :

$$(a) \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

$$(b) \quad A \subset B \implies f(A) \subset f(B).$$

2. Démontrer le **théorème (5)**.

(a) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x) \in B$ par définition de $f^{-1}(B)$.

(b) Soit $A \subset B$. Si $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Or, $x \in B$.

Donc, $y \in f(B)$ par définition de $f(B)$.

3. Démontrer le **théorème (10)**

Théorème 10 (Stabilité par intersection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

(a)

(b) Pour toute parties A et B de F , $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(a)

(b) $x \in f^{-1}(A \cap B) \implies f(x) \in A \cap B \implies f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \implies x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

(a)

(b) L'inclusion réciproque est vraie.

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) &\implies x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\&\implies f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \implies f(x) \in A \cap B \\&\implies x \in f^{-1}(A \cap B).\end{aligned}$$

Ensembles

Exercice 1 (Fonction indicatrice) – Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E , on appelle fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E , on a :

(a) $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.	(d) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
(b) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.	(e) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
(c) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.	(f) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

2. En déduire que pour toutes parties A , B et C de E :

(a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.	(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Exercice 2 (Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$) –

1. Justifier que $\forall x, y \in \mathbb{N}, \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

On considère alors l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(x, y) \longmapsto y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

2. Calculer $f(x, y)$ pour $(x, y) \in \llbracket 0; 4 \rrbracket \times \llbracket 0; 4 \rrbracket$.

On donnera la réponse dans un tableau.

3. (a) Étant donnés (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{N}^2$ tels que $x + y \geq x' + y' + 1$.

En étudiant le signe de $f(x, y) - f(x', y')$, montrer que $f(x, y) > f(x', y')$.

Comment se traduit ce résultat sur le tableau de valeurs de la question 2. ?

- (b) En déduire que $f(x, y) = f(x', y') \implies x + y = x' + y'$, puis que :

$$f(x, y) = f(x', y') \implies (x, y) = (x', y').$$

Quelle propriété en déduire pour la fonction f .

4. (a) Étant donné (x, y) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $f(x-1, y+1)$ et $f(x, y)$.
 (b) Pour $y \in \mathbb{N}$, montrer, de même, que $f(y+1, 0) = f(0, y) + 1$.

Comment se traduisent ces résultats sur le tableau de valeurs de la question 2. ?

- (c) Montrer par récurrence la fonction f est surjective.

5. Que peut-on en conclure pour la fonction f ? Et pour les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$?

6. **Question de recherche :** déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Ensembles

Commentaires : *Cessez d'écrire le résultat à montrer sans mentionner que c'est ce que vous allez faire !*

Correction de l'exercice 1 – Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E , on appelle fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in A \\ 0 & \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E , on a :

(a) Par double implication, supposons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ et montrons que $A = B$ par double inclusion.

Si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \in B$. Donc $A \subset B$.

De même, si $x \in B$ alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in A$. Donc $B \subset A$.

Finalement, $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$ alors $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ i.e. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Conclusion, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.

La fonction indicatrice caractérise donc l'ensemble i.e. deux ensembles ont les mêmes fonctions caractéristiques si, et seulement si ils sont égaux.

Commentaires : *Il était important de remarquer au moins une fois que la fonction indicatrice caractérisait l'ensemble. C'est ce qui permettait de conclure aux questions d'après.*

Les autres questions se résolvent par un simple tableau par disjonction de cas

(b)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{\bar{A}}$	$1 - \mathbb{1}_A$
$x \in A$	0	0
$x \notin A$	1	1

Donc, $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

(c)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{A \cap B}$	$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
$x \in A$ et $x \in B$	1	1	1	1
$x \in A$ et $x \notin B$	0	1	0	0
$x \notin A$ et $x \in B$	0	0	1	0
$x \notin A$ et $x \notin B$	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

(d)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{A \cup B}$	$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_{A \cap B}$	$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
$x \in A$ et $x \in B$	1	1	1	1	1
$x \in A$ et $x \notin B$	1	1	0	0	1
$x \notin A$ et $x \in B$	1	0	1	0	1
$x \notin A$ et $x \notin B$	0	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Commentaires : Avec les questions précédentes, $\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A \cup B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \mathbb{1}_{\overline{B}}$
 $= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

(e)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{A \setminus B}$	$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
$x \in A$ et $x \in B$	0	1	1	1	0
$x \in A$ et $x \notin B$	1	1	0	0	1
$x \notin A$ et $x \in B$	0	0	1	0	0
$x \notin A$ et $x \notin B$	0	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Commentaires : Avec les questions précédentes, $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$
 $= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

(f)

$x \in E$	$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A^2$
$x \in A$	0	0
$x \notin A$	1	1

Donc, $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

Commentaires : On dit que l'application $\mathbb{1}_A$ est idem-potente.

Avec les questions précédentes, $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A \cap A} = \mathbb{1}_A$.

Commentaires : Vos croyez vraiment que je vous demandais de faire 5 fois la même chose ? Vous avez quand même le droit de reconnaître quand on applique le même raisonnement.

2. (a) On pourrait également faire un tableau de valeurs mais il est plus rapide d'utiliser les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{(A \cup B) \cap C} &= \mathbb{1}_{A \cup B} \mathbb{1}_C \\
 &= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \mathbb{1}_C \\
 &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C
 \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{1}_C^2 = \mathbb{1}_C$,

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - (\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C) (\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) \\
 &= \mathbb{1}_{(A \cap C) \cup (B \cap C)}.
 \end{aligned}$$

Donc, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Commentaires : *L'intersection est distributive sur la réunion.*

(b) Par le même raisonnement, en partant du membre de droite :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A \cup C) \cap (B \cup C)} &= \mathbb{1}_{A \cup C} \mathbb{1}_{B \cup C} \\ &= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C) (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_C^2 - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C^2 - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C^2 + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C^2\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \mathbb{1}_C^2 = \mathbb{1}_C,$$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_{A \cap B} + \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{A \cap B} \mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_{(A \cap B) \cup C}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Commentaires : *La réunion est distributive sur l'intersection.*

Correction de l'exercice 2 –

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}$.

- Si $x + y$ est pair, alors $\frac{x+y}{2}$ est entier, donc $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = \frac{x+y}{2}(x+y+1) \in \mathbb{N}$.
- Si $x+y$ est impair, alors $x+y+1$ est pair donc $\frac{x+y+1}{2}$ est entier donc $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Conclusion,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Commentaires : *L'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est donc bien définie.*

$$(x, y) \mapsto y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

2. Les valeurs de $f(x, y)$ pour les premiers couples sont :

$x \setminus y$	0	1	2	3	4
0	0	2	5	9	14
1	1	4	8	13	19
2	3	7	12	18	25
3	6	11	17	24	32
4	10	16	23	31	40

3. (a) Considérons (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{N}^2$ tels que

$$x + y \geq x' + y' + 1.$$

En ajoutant 1 aux deux membres de l'inéquation,

$$(x + y + 1) \geq x' + y' + 2.$$

En multipliant ces quantités (positives) membre à membre,

$$(x + y)(x + y + 1) \geq (x' + y' + 1)(x' + y') + 2(x' + y' + 1).$$

D'où,

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} - \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2} \geq x' + y' + 1.$$

Or,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x', y') &= \left[y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \right] - \left[y' + \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2} \right] \\ &= y - y' + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} - \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2} \\ &\geq y - y' + (x' + y' + 1) \\ &\geq y + x' + 1 \geq 1 > 0. \end{aligned}$$

Donc, $x + y \geq x' + y' + 1 \implies f(x, y) > f(x', y')$.

Les couples (x, y) tels que $x + y$ est une constante occupent une diagonale dans le tableau. Par exemple les couples $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$ occupent la diagonale n°2, et les couples $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(3, 0)$ occupent la diagonale n°3.

On vient de démontrer que si $p \geq n$, tous les couples de la diagonale n° p ont des images par f supérieures à celles des couples de la diagonale n° n .

(b) Montrons ce résultat par sa contraposition *i.e.* $x + y \neq x' + y' \implies f(x, y) \neq f(x', y')$.

- Si $x + y < x' + y' + 1 \iff x + y \leq x' + y' + 1$ alors, par la question précédente, $f(x, y) > f(x', y')$ et en particulier $f(x, y) \neq f(x', y')$.
- Si $x' + y' < x + y + 1 \iff x' + y' \leq x + y + 1$ alors, par la question précédente et la symétrie des rôles de x et y , $f(x', y') > f(x, y)$ et encore $f(x, y) \neq f(x', y')$.

La contraposition est donc prouvée et le résultat demandé.

Conclusion, $f(x, y) = f(x', y') \implies x + y = x' + y'$.

Commentaires : *si deux couples ont la même image alors ils doivent être sur la même diagonale.*

On en déduit aisément que $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2}$ et l'égalité $f(x, y) = f(x', y')$ permet de conclure à $y = y'$.

Enfin, $x + y = x' + y'$ entraîne $x = x'$.

Conclusion, $f(x, y) = f(x', y') \implies (x, y) = (x', y')$. La fonction f est injective.

4. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Il suffit d'écrire :

$$f(x-1, y+1) = y+1 + \frac{(x-1+y+1)(x-1+y+1+1)}{2} = 1 + f(x, y).$$

Donc,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, f(x-1, y+1) = f(x, y) + 1.$$

Dans le tableau, cela signifie que lorsque l'on se déplace suivant une diagonale de vecteur $-\vec{i} + \vec{j}$, les valeurs de $f(x, y)$ augmentent de 1

	y	$y+1$
$x-1$	$\cdot$	$f(x, y) + 1$
x	$f(x, y)$	

(b) Soit $y \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f(y+1, 0) - f(0, y) &= \left[0 + \frac{(y+1)(y+2)}{2} \right] - \left[y + \frac{y(y+1)}{2} \right] \\ &= \left[\frac{y(y+1)}{2} + (y+1) \right] - \left[y + \frac{y(y+1)}{2} \right] = 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad f(y+1, 0) = f(0, y) + 1.$$

Dans le tableau, cela signifie que lorsque l'on effectue une symétrie par rapport à la bissectrice de la première ligne et qu'on se déplace suivant le vecteur $\vec{j}$ (dans la première colonne donc), les valeurs de $f(x, y)$ augmentent de 1.

	0	y
0	$f(0, y)$	
y	$f(y, 0)$	
$y+1$	$f(0, y) + 1$	

Commentaires : *Développer est rarement une bonne idée. Très très rarement et souvent la pire idée.*

(c) Montrons par récurrence que tout entier naturel p admet au moins un antécédent par f .

- Si $p = 0$, on a $f(0, 0) = 0$, donc 0 admet bien un couple antécédent par f .
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que p admette un antécédent (x, y) par f . Montrons que $p+1$ admet encore un antécédent par f .
 - Si $x \neq 0$, alors on a vu que $f(x-1, y+1) = f(x, y) + 1$, donc $f(x-1, y+1) = p+1$, et donc $p+1$ admet le couple $(x-1, y+1) \in \mathbb{N}^2$ pour antécédent.
 - Si $x = 0$, on a donc $f(0, y) = p$. Mais alors, on a vu que $f(y+1, 0) = f(0, y) + 1 = p+1$. Cette fois $p+1$ admet le couple $(y+1, 0) \in \mathbb{N}^2$ pour antécédent.

Dans tous les cas, $p+1$ admet un couple antécédent.

- Vérifiée pour $p = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad f(x, y) = p.$$

La fonction f est surjective.

5. On vient de voir que f était injective et surjective.

En d'autres termes, tous les entiers de $\mathbb{N}$ admettent un (question 4) et un seul (question 3) antécédent par f dans $\mathbb{N}^2$ i.e. $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est bijective.

Les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Commentaires : *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ ont donc le même nombre d'éléments !*

6. On peut vérifier que la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est bijective.

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Les premières valeurs sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	...

Par conséquent, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.

Logique, raisonnement et Ensembles

1. Logique et raisonnement

- 1. Valeur de vérité d'une assertion, négation, connecteurs logiques ET et OU.
- Lois de Morgan, propriétés des connecteurs logiques (commutativité, associativité, distributivité).
- Implication, contraposée, réciproque, équivalence.
- Prédicats, quantificateurs universel et existentiel.

Il faut être capables de traduire un énoncé en français en une assertion mathématique et réciproquement.

- Non commutativité et négation des quantificateurs.
- Méthodes de raisonnements :
 - par raisonnement direct,
 - contraposée,
 - disjonctions de cas,
 - double implications,
 - raisonnement par analyse-synthèse.
- Démonstration par récurrence, simple, double ou forte.

2. Ensembles

- Ensembles : À partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles.

L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.

- Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$.
- Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
- Complémentaire $\bar{A}$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
- Produit cartésien d'ensembles.
- Applications : définition, image, antécédent.
- Fonctions surjective et injective (notions). Définition et caractérisation.
- Image directe, image réciproque. Ces définitions devront être parfaitement sues.
- Stabilité ou non de l'image directe et réciproque par l'union et l'intersection.

Questions de cours possibles [9] :

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. La démonstration du lemme nécessaire à la démonstration pourra être admis ou démontré. Ce choix est laissé à l'appréciation du candidat.
2. Donner et démontrer, par récurrence, la valeur explicite des sommes usuelles $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$.
3. Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective sur son domaine de définition.
4. Stabilité (ou non) de l'image directe et réciproque de l'union et de l'intersection.
5. (★) Mise en œuvre d'un raisonnement par analyse/synthèse sur un exemple :
Montrer que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.
6. (★) Mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence sur un exemple :

Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

[9]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Entiers et Arithmétique

1. Divisibilité dans $\mathbb{N}$:

- Diviseurs, multiples.
- Théorème de la division euclidienne.
- PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. PPCM.
- Algorithme d'Euclide.

2. Nombres premiers.

- Théorème d'Euclide : L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.
- Application au calcul du PGCD et du PPCM.



Arithmétique, rudiments

L'arithmétique concerne l'étude des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou relatifs $\mathbb{Z}$. Pourquoi $\mathbb{Z}$? Tout simplement car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps trop grands et possédant trop de propriétés. Redescendre dans $\mathbb{Z}$ permettra donc de mieux discerner celles-ci et de mieux comprendre le lien entre la multiplication et l'addition.

Voyez donc les quelques lignes trop brèves qui vont suivre comme un retour aux origines des mathématiques, un retour en classe primaire mais avec la maturité d'un élève de prépa. Vos chères tables de multiplication, par exemple, apprises il y a longtemps vont ainsi prendre un peu de relief.

On commencera par accentuer notre compréhension de la relation de divisibilité. Quelques propriétés dégagées, nous nous intéresserons aux nombres *premiers*. Alors que leur définition semble ne receler aucun mystère, on échoue à trouver une régularité quelconque dans leur succession. Connus dès les débuts de l'arithmétique, les nombres premiers ont excité la curiosité de milliers de mathématiciens.

Ils sont au cœur de la science des nombres, car tout entier se décompose de façon unique en un produit de facteurs premiers. Ils sont aussi à l'origine de certains des problèmes les plus difficiles des mathématiques et ont acquis, avec les progrès de la cryptographie, une importance économique considérable.

La reconnaissance des nombres premiers et des nombres composés avec leur décomposition en facteurs premiers est connue pour être des plus importants et utiles en arithmétique.

Il a tant impliqué le zèle et la sagesse des géomètres anciens comme modernes qu'il serait superflu d'en discuter plus avant...

En plus, la dignité des sciences mêmes semble exiger que tous les moyens possibles soient explorés pour trouver la solution d'un problème si élégant et si célébré.

Karl Friedrich Gauss,

Disquisitiones Arithmeticae, 1801

À l'heure où j'écris ces pages, le plus grand nombre premier connu est $2^{136\,279\,841} - 1$ obtenu dans le cadre du programme GIMPS et trouvé le 11 octobre 2024. Écrit en base 10, ce nombre comporte 41 024 320 chiffres, soit plus de seize millions de chiffres supplémentaires par rapport à l'ancien record qui datait de janvier 2018.

Commençons !

CONTENU

I	Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	88
I.1	Divisibilité	88
I.2	Division euclidienne	92
I.3	Nombres premiers.	94
II	PGCD et PPCM.	103
II.1	PGCD	103
II.2	Algorithme d'Euclide	105
II.3	PPCM.	108
	Feuille d'exercices n°3 : Arithmétique	112
	Test n°3 : Arithmétique	123
	Correction.	129
	Programme du chapitre IV	133

I/ Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ _____

I.1 Divisibilité _____

Définition 1 (Divisibilité dans $\mathbb{Z}$) : Soient a et b des entiers relatifs.

On dit que a *divise* b , noté $a|b$, s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.

On dit alors que :

- a est un *diviseur* de b . On note $\mathcal{D}(b)$ leur ensemble.
- b est un *multiple* de a . On note $a\mathbb{Z}$ leur ensemble.

Comme a et $-a$ ont les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$, on se restreindra le plus souvent, sans le dire, à l'étude de la divisibilité dans $\mathbb{N}$. C'est le parti pris par le programme donc, à partir de maintenant, sauf remarques intéressantes, on ne considèrera plus que la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Exemples 1 :

- $3|12$ et $5 \nmid 12$.
- L'ensemble des diviseurs de 12 est $\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- Tous les nombres divisent 0 *i.e.* 0 est multiple de tout entier : $\mathcal{D}(0) = \mathbb{N}$.
- 0 n'est diviseur d'aucun entier (non nul) : $0\mathbb{Z} = \{0\}$.
- $a|b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.
- Un multiple de 2 est aussi appelé un *nombre pair*. Ceux qui ne le sont pas sont appelés *nombre impair*. L'ensemble des nombres pairs est noté $2\mathbb{N}$. (cf le **corollaire (2.1)** pour les nombres impairs)

Exercice 1 : On appelle *nombre parfait* tout nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts.

Par exemple $\mathcal{D}(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ et $6 = 1 + 2 + 3$, donc 6 est parfait.

Montrer que 28 est parfait.

Méthode 1 :

Pour les problèmes donnés sous forme additive, on essaiera de se ramener à une forme multiplicative du type $A \times B = C$, où on connaît les diviseurs de C .

Exercice 2 : Déterminer les couples $(x; y)$ d'entiers naturels qui vérifient $x^2 = y^2 + 21$.

Proposition 1 (Relation de divisibilité) :

1. $\forall a \in \mathbb{N}, \quad a|a \text{ et } 1|a. \quad (\ll a|b \gg \text{ est réflexive})$
2. $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \implies a = b. \quad (\ll a|b \gg \text{ est antisymétrique sur } \mathbb{N})$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \implies a|c. \quad (\ll a|b \gg \text{ est transitive})$

La relation « $a \mathcal{R} b \iff a|b$ », réflexive, antisymétrique et transitive est appelée une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. C'est un ordre non total.

Sur $\mathbb{Z}$, la relation $a|b$ est seulement réflexive et transitive.

On perd l'antisymétrie :

ATTENTION

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \iff |a| = |b|.$$

Preuve :

1. $a = a \times 1$, donc $1|a$ et $a|a$.
2. Si $b = ak$ et si $a = bl$ pour deux entiers k et l alors $b = bkl$.
 - Si $b = 0$ alors $a = bl = 0$ donc $|a| = |b|$.
 - Si $b \neq 0$ alors $kl = 1 \iff k = l = 1$ ou $k = l = -1$ i.e. $a = b$ ou $a = -b$ ou encore $|a| = |b|$.
3. Si a divise b , alors il existe k entier tel que $b = ka$.
 Si b divise c , alors il existe k' entier tel que $c = k'b$.
 Alors $c = k'b = k'(ka) = (k'k)a$ où $k'k \in \mathbb{Z}$, donc a divise c .

Proposition 2 (Compatibilité) :

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|mb + nc$ (« $a|b$ » est compatible avec les combinaisons linéaires entières)
2. $\forall a, b, a', b', c \in \mathbb{N}, \begin{cases} a|b \\ a'|b' \end{cases} \Rightarrow a|bc \text{ et } aa'|bb'$ (« $a|b$ » est compatible avec le produit)

En particulier, $\forall a, b, n \in \mathbb{N}, a|b \Rightarrow a^n|b^n$

Preuve :

1. Si a divise b et c alors il existe des entiers k et l tels que $b = ka$ et $c = la$.

Alors, pour tout entier m et n , $mb + nc = \underbrace{(mk + nl)}_{\in \mathbb{N}} a$ i.e. a divise $mb + nc$.

2. De même, si $b = ka$ et $b' = la'$ pour deux entiers k et l alors $bc = kac$ et $bb' = \underbrace{(kl)}_{\in \mathbb{N}} aa'$ i.e. a divise bc et aa' divise bb' .

ATTENTION

• $\begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \not\Rightarrow ab|c :$
 $2|12 \text{ et } 4|12 \text{ mais } 2 \times 4 = 8 \nmid 12.$

• $a|bc \not\Rightarrow a|b :$
 $10|210 = 14 \times 15 \text{ mais } 10 \nmid 14.$
 (et $10 \nmid 15$)

Exemple 2 : Si $a \in \mathbb{Z}$ divise $3n + 2$ et $n - 3$ alors $a|11$.

En effet, a divise alors $(3n + 2) - 3(n - 3) = 11$.

Exercice 3 : Trouver les entiers n pour lesquels $\frac{n + 15}{n + 2}$ est entier.

Correction : On simplifie d'abord un peu et on isole la variable n :

$$n + 15 = n + 2 + 13 \text{ donc } \frac{n + 15}{n + 2} = \frac{(n + 2) + 13}{n + 2} = 1 + \frac{13}{n + 2}.$$

Le problème s'énonce alors de façon plus simple :

$$\frac{n + 15}{n + 2} \in \mathbb{Z} \iff \frac{13}{n + 2} \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire si, et seulement si $n + 2$ est un diviseur de 13.

Les diviseurs de 13 sont $-13, -1, 1$ et 13 . Il y a donc 4 équations à résoudre ($n + 2 = -13, n + 2 = \dots$).

On obtient : $\mathcal{S} = \{-15; -3; -1; 11\}$.

D'une manière générale,

Méthode 2 :

Pour résoudre un problème du type $f(n)|g(n)$, on se ramène à un problème du type $h(n)|A$ où A est un entier *indépendant* de n .^[1]

- On pourra développer une fraction en éléments simples comme à l'exercice (3) .
- On pourra aussi utiliser la *propriété (1.3)* pour rendre le dividende indépendant de n .

Corollaire 2.1 :

Les nombres impairs sont exactement les entiers de la forme $2p + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$.

Preuve : Il y a deux choses à prouver.

1. Tout nombre de la forme $2p + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$ est impair.

En effet, $2|2p$ mais 2 ne divise pas 1, donc $2p + 1$ n'est pas divisible par 2, donc est impair.

2. Tout nombre impair m s'écrit sous la forme $2p + 1$ où $p \in \mathbb{Z}$ i.e. $m - 1 = 2p$ est pair.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre impair positif m tel que $m - 1$ n'est pas pair.

On note encore m le plus petit entier naturel vérifiant cette propriété et on va prouver qu'en fait $m - 1$ vérifie aussi cette propriété.

Observons que comme $2|(-2)$ alors $2|m$ est équivalent à ce que $2|(m - 2)$.

Or, par hypothèse m est impair i.e. 2 ne divise pas m . On obtient alors $m - 2$ impair d'après l'observation précédente.

Mais, par définition de m , $m - 1$ est aussi un nombre impair qui, si on lui retranche 1, donne un nombre impair $m - 2$.

Ceci contredit que m est le plus petit impair vérifiant cette propriété.

Ainsi tout nombre impair positif q est tel que $q - 1$ soit pair i.e. $q - 1 = 2p \iff q = 2p + 1$.

Le raisonnement est identique avec les entiers relatifs négatifs en prenant un nombre impair m tel que $m + 1$ ne soit pas pair.

Exercice 4 : Montrer que pour tout entier impair n supérieur à 3, $n^2 - 1$ est multiple de 8.

[1]. En d'autres termes, on isole la variable.

I.2 Division euclidienne

Théorème 3 :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b. \quad (\text{III.1})$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la *division euclidienne* de a par b .

Anodins en première lecture, les mots les plus importants de ce théorème sont « unique » et le symbole « $<$ ». Prêtez-y attention !

Rappel 1 (Vocabulaire) :

— q s'appelle le *quotient*,
— r s'appelle le *reste*,

— a s'appelle le *dividende*
— et b s'appelle le *diviseur*.

Preuve :**Existence :****Sans la partie entière :**

1. Premier cas : Si $0 \leq a < b$ alors le couple $(q; r) = (0; a)$ convient.
2. Second cas : Si $a = b$ alors le couple $(1; a)$ convient.
3. Troisième cas : Supposons que $a > b$. En particulier, a et b sont donc tous deux strictement positifs.

On note $\mathcal{M}(b)$ l'ensemble des multiples positifs de b inférieurs ou égaux à a :

$$\mathcal{M}(b) = \{k \in \mathbb{N} / kb \leq a\}.$$

$1 \in \mathcal{M}(b)$ donc $\mathcal{M}(b)$ une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée. Elle admet donc un plus grand élément que l'on note q i.e. $qb \leq a$ avec $q+1 \notin \mathcal{M}(b)$ i.e. $(q+1)b > a$.

On a donc :

$$qb \leq a < (q+1)b. \quad (\text{III.2})$$

Posons alors $r = a - bq \in \mathbb{Z}$. D'après (III.2), on a alors :

$$\cancel{qb} - \cancel{qb} \leq a - bq < (\cancel{q} + 1)b - \cancel{qb}$$

$$0 \leq r < b.$$

Conclusion, dans tous les cas, il existe un couple $(q; r)$ vérifiant la relation (III.1).

Avec la partie entière : Tout repose sur les propriétés de la partie entière et l'inégalité stricte.

On pose $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Par définition de la partie entière, $q \leq \frac{a}{b} < q+1$ d'où :

$$bq \leq a < bq + b \quad (\text{III.3})$$

En posant, $r = a - bq$, on a bien $a = bq + r$.

D'après (III.3), on a aussi $0 \leq r < b$.

Unicité : Supposons qu'on ait $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $(q', r') \in \mathbb{N}^2$ tels que : $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ et $\begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$.

On a donc $bq + r = bq' + r'$, i.e. $b(q - q') = r' - r$. Or $-b < r' - r < b$, d'où $-b < b(q - q') < b$ puis $-1 < q - q' < 1$.

Or, $q - q'$ est entier.

Donc, $q - q' = 0$ et $q = q'$. Enfin, $r = r'$.

Remarques :

- On peut étendre le théorème au cas où a est entier (relatif) et b entier non nul : $a = bq + r$, avec $0 \leq r < |b|$.
- Posant $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, la division euclidienne doit plutôt être vue comme la recherche du plus grand multiple de b inférieur à a que comme un calcul de division.

Combien de fois peut-on soustraire 7 de 83 et combien reste-t-il ?

Réponse : autant de fois que l'on veut et il reste 76 à chaque fois.

Exercice 5 : Montrer que tout entier n non divisible par 5 a un carré de la forme $5p + 1$ ou $5p - 1$.

Proposition 4 :

Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul.

$b|a \iff$ le reste dans la division euclidienne de a par b est nul.

Remarque : En Python, le reste de la division euclidienne de a par b est obtenu par $a \% b$.

Preuve :

$\implies$: Si b divise a , alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + 0$.

Par unicité dans la division euclidienne, on en déduit que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

$\impliedby$: Supposons que le reste de la division euclidienne de a par b soit nul. Alors il existe q tel que $a = bq$ i.e. b divise a .

Exercice 6 : Le 1^{er} mai 2022 tombait un dimanche. Quel jour tombe le 1^{er} mai 2023 ?

I.3 Nombres premiers

Définition 2 : Un entier naturel est dit *premier* lorsqu'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Exemples 3 :

- $0 \notin \mathbb{P}$: il admet une infinité de diviseurs.
- $1 \notin \mathbb{P}$: il n'admet qu'un seul diviseur.
- $2 \in \mathbb{P}$: c'est le plus petit nombre premier, et il est pair. C'est le seul nombre premier pair.
- $2^{82\,589\,933} - 1$, qui comporte près de 25 millions de chiffres en écriture décimale est le plus grand nombre premier actuellement connu.

Il a été découvert le 7 décembre 2018 par le *Gimps* (Great Internet Mersenne Prime search)

- Une curiosité et un jeu des siècles passés, le polynôme $P(n) = n^2 - n + 41$ associé à Euler donne des nombres premiers pour n prenant les valeurs 0 à 39 mais $P(40) = 1681 = 41^2$!

Un mathématicien, un physicien, un informaticien et un littéraire sont devant un problème : montrer que tous les nombres impairs sont premiers.

Le mathématicien dit : « 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est pas premier, donc ça ne marche pas ».

Le physicien dit : « 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, donc en première approximation, ça marche ».

L'informaticien dit : « 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est pas premier, 9 n'est pas premier, 9 n'est pas premier, 9 n'est pas premier, ... ».

Le littéraire dit : « C'est quoi, un nombre premier ? ».

Théorème 5 (Critère d'arrêt) :

- Tout entier naturel n , $n \geq 2$, admet un diviseur premier.
- Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leq p \leq \sqrt{n}.$$

Preuve :

- Si n est premier, il admet donc un diviseur premier : lui-même.
- Sinon, l'ensemble des diviseurs d de n tel que $2 \leq d \leq n$ n'est pas vide (il contient n). Il admet donc un plus petit élément p . Si p n'était pas premier, il admettrait un diviseur strict d' tel que $2 \leq d' < p$ qui diviserait n . Ceci contredirait la définition de p .

Donc p est premier.

- On a donc p premier et $n = p \times q$ avec $p \leq q$. En multipliant cette inégalité par p , on obtient :

$$p^2 \leq pq = n \iff p \leq \sqrt{n}.$$

Exemple 4 (Comment montrer que 109 est un nombre premier) :

— On a $10 < \sqrt{109} < 11$.

On teste donc tous les nombres premiers strictement inférieurs à 11, soit : 2, 3, 5 et 7.

— Des règles de divisibilité, on déduit que 109 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

— Soit, on se rappelle le critère de divisibilité par 7, soit on effectue la division euclidienne de 109 par 7, on obtient :

$$109 = 7 \times 15 + 4 \Rightarrow 109 \text{ n'est pas divisible par } 7.$$

— Conclusion : comme 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5, et 7, il est premier.

Théorème 6 :

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Preuve : Supposons le contraire *i.e.* qu'il existe un nombre fini de nombres premiers que l'on va noter $p_1, p_2, \dots, p_n$ et posons

$$N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1.$$

L'objectif de la cette démonstration^[2] est de prouver que N est premier. Comme il est strictement plus grand que les p_i , on aura notre contradiction.

Si N est premier, la contradiction est déjà toute trouvée. Sinon, d'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier. Soit p_i ce diviseur premier.

Par définition p_i divise donc $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ et N donc divise aussi $N - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n = 1$.

Ceci est impossible, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est absurde.

[2]. Connue d'Euclide himself!

Crible d'Ératosthène :

Pour dresser la liste des nombres premiers entre 2 et 150, la méthode du crible d'Ératosthène ^a consiste à :

1. Écrire la liste des nombres entiers de 2 à 100.
2. Éliminer successivement les multiples propres de 2, de 3, ..., puis ceux de p , où p est le premier nombre non encore éliminé ^b, etc...

^a. **Ératosthène**, mathématicien, géographe, astronome et poète grec serait né en 276 avant J.C. à Cyrène (aujourd'hui en Libye). Il étudie quelques années à Athènes puis devient l'élève du poète grec Callimaque qui dirige la grande Bibliothèque d'Alexandrie.

Ayant ainsi accès à toutes les connaissances de l'époque, Ératosthène se lance dans différents travaux qui le rendront célèbre :

- En observant la position du Soleil à Syène (Assouan aujourd'hui) puis à Alexandrie au moment du solstice d'été, il parvient à déduire avec une bonne précision la circonférence de la Terre.
- Inventeur du mot géographie, il étudie les différentes zones climatiques, les altitudes des montagnes, la répartition des continents et des océans.
- Passionné d'astronomie, il réalise un catalogue de plus de 600 étoiles et 44 constellations. Il parvient aussi à calculer l'obliquité de l'écliptique (l'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport à son axe de rotation autour du Soleil) avec une bonne précision.
- En mathématiques il invente un procédé (le crible d'Ératosthène) permettant de trouver les nombres premiers.

Devenu aveugle, Eratosthène se laisse mourir de faim en l'an 194 av. J-C.

^b. donc premier

	2	3	X	5	X	7	X	X	X
11	X	13	X	X	X	17	X	19	X
X	X	23	X	X	X	X	X	29	X
31	X	X	X	X	X	37	X	X	X
41	X	43	X	X	X	47	X	X	X
X	X	53	X	X	X	X	X	59	X
61	X	X	X	X	X	67	X	X	X
71	X	73	X	X	X	X	X	79	X
X	X	83	X	X	X	X	X	89	X
X	X	X	X	X	X	97	X	X	X

Figure III.1 – Les nombres premiers inférieurs à 100.

Les entiers barrés sont les entiers non premiers entre 2 et 100. Les entiers restant (en rouge) sont donc les nombres premiers inférieure à 100.

```

1 def eratosthene(n):
2     L = [ i for i in range(2, n+1) ]
3     P = [ ]
4
5     while len(L) != 0:
6         P.append(L[0])
7         i = L[0]
8         for k in L:
9             if k % i == 0:
10                 del(L[L.index(k)])
11
12     return P

```

Figure III.2 – Crible d'Ératosthène

Remarques :

- Pour éliminer les multiples propres de 7, commencer à 7^2 , car les multiples inférieurs ont déjà été éliminés.
- D'après le **théorème (5)**, il est possible de savoir à l'avance « jusqu'où aller ». En effet, tout entier composé n admet un diviseur premier p tel que : $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

Si $n \leq 150$, alors $12 < \sqrt{n} < 13$. Il suffira donc de tester au plus jusqu'aux multiples de $12^{[3]}$ et de les barrer, le cas échéant.

```

1 def isitPrime(k):
2     if k==2 or k==3: return True
3     if k%2==0 or k<2: return False
4     for i in range(3, int(k**0.5)+1, 2):
5         if k%i==0:
6             return False
7
8     return True

```

Figure III.3 – Algorithme optimisé testant la primalité d'un nombre : Sachant, qu'hormis 2 et 3, les nombres premiers peuvent s'écrire $6n \pm 1$, vérifier la divisibilité du nombre donné avec 2 et 3, puis vérifier chaque nombre qui a la forme $6n \pm 1$ est une solution plus efficace que tester chaque entier.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, et plus précisément en théorie analytique des nombres, le théorème des nombres premiers, démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896, est un résultat concernant la distribution asymptotique des nombres premiers.*

Théorème 7 :

La fonction π qui à un réel x associe $\mathcal{P}(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x , est équivalente lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient de x par son logarithme népérien :

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

- Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans (selon ses propres affirmations ultérieures) et par

[3]. Plutôt 11 car les multiples de 12 seront déjà barrés en tant que multiples de 2 ou de 3.

Adrien-Marie Legendre (ébauche en l'An VI du calendrier républicain, soit 1797-1798, conjecture précise en 1808).

- Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1851 que si x est assez grand, $\mathcal{P}(x)$ est compris entre $\frac{0,92129x}{\ln(x)}$ et $\frac{1,10556x}{\ln(x)}$.
- Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe, utilisant en particulier la fonction ζ de Riemann.
- Un approximant de $\pi(x)$ nettement meilleur que $\frac{x}{\ln(x)}$ est la fonction logarithme intégral

$$li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

ou sa variante, la fonction d'écart logarithmique intégrale

$$Li(x) = li(x) - li(2) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} li(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Li(x).$$

- En 1899, La Vallée Poussin a affiné son résultat en montrant que :

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} li(x) + O\left(x e^{-\sqrt{\frac{\ln(x)}{2V}}}\right),$$

pour une certaine constante V .

Landau (en 1909) puis bien d'autres ont travaillé à réduire la taille admissible de cette constante V .

- L'hypothèse de Riemann est même équivalente à l'estimation $\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} li(x) + O(\sqrt{x} \ln(x))$. Surprenant ! Magnifique ! et pourtant encore si loin ...

Il y aurait encore beaucoup beaucoup à dire mais je m'arrête là et j'encourage les curieux à faire des recherches à partir des mots clés « théorème des nombres premiers ».

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $n \geq 2$.

Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Correction : Par construction, $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $k | n!$.

Donc $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $k | n! + k$.

D'où $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $n! + k \notin \mathbb{P}$.

Remarque : Il y a donc des « trous » aussi grands qu'on veut dans l'ensemble des nombres premiers.

Théorème 8 (Théorème fondamental de l'arithmétique) :

Tout entier n supérieur à 2 admet une et une seule (à l'ordre des facteurs près) décomposition en facteurs premiers.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \text{ avec } p_i \in \mathbb{P} \text{ deux à deux distincts et } \alpha_i \in \mathbb{N}^*.$$

On l'appelle *décomposition primaire* de n et les exposants α_i s'appellent les valuations associées aux nombres premiers p_i .

Remarque : Le programme de PTSI spécifie que la démonstration est hors-programme mais pas le résultat qui est à connaître.

Preuve : Pour tout entier $n \geq 2$, posons :

$H(n)$: « L'entier n peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. »

On va démontrer cette propriété par une récurrence forte.

Comme 2 est premier, il peut s'écrire comme le produit de lui-même et $H(2)$ est vérifiée.

Supposons alors que $H(k)$ soit vérifiée pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ et considérons l'entier $n + 1$:

- Si $n + 1$ est premier, $H(n + 1)$ est vraie.
- Si $n + 1$ n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p et on a $n = p \times m$ où m est un entier tel que $2 \leq m \leq n$.

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à m pour avoir l'existence de la décomposition et la propriété $H(n + 1)$.

En conclusion, la propriété $H(n)$ est donc héréditaire. Étant initialisée pour $n = 2$, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Pour montrer l'unicité, on aura besoin d'un lemme qui est une application immédiate du théorème de Gauss (Hors-programme aussi) :

Lemme 1 :

Un nombre premier divise un produit si, et seulement si il divise l'un des facteurs du produit.

ATTENTION | $4 \mid (14 \times 10)$ mais 4 ne divise ni 14, ni 10.

Comme toujours, supposons l'existence d'une autre décomposition :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}.$$

- p_1 premier divise $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}$ donc divise l'un des q_i d'après le **lemme (1)**. Supposons que ce soit q_1 pour plus de commodité. Comme $q_1^{\beta_1}$ est le seul multiple de p_1 , il est divisible par $p_1^{\alpha_1}$ et $\alpha_1 \leq \beta_1$. Par symétrie, on a aussi $\beta_1 \leq \alpha_1$ d'où l'égalité.
- On peut donc simplifier dans les deux membres par $p_1^{\alpha_1}$ et itérer le raisonnement. Comme tous les $p_i \geq 2$, ils ne divisent pas 1 et on ne peut avoir $k < l$. Par symétrie, on ne peut avoir non plus $l < k$ d'où l'égalité $k = l$.

En d'autres termes, l'unicité est prouvée à l'ordre près des facteurs.

Exemple 5 : Décomposons 16 758 en produit de facteurs premiers :

16758	2
8379	3
2793	3
931	7
133	7
19	19
1	

Pour décomposer un entier, on effectue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

On obtient :

$$16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19.$$

Exemples 6 :

- $510510 = 1001 \times 510 = (7 \times 11 \times 13) \times (2 \times 3 \times 5 \times 17) = (2)(3)(5)(7)(11)(13)(17)$
- $80000 = 8 \times 10^4 = (2)^7(5)^4.$

Corollaire 8.1 :

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et

$$b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}.$$

Alors :

$$a|b \iff \forall p \in \mathbb{P}, \alpha_p \leq \beta_p.$$

Preuve : Si $a|b$ alors il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ac$.

Notons $c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\gamma_p}$ sa décomposition en facteurs premiers.

$$\text{On a alors } \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p + \gamma_p}.$$

Par unicité de la décomposition, $\forall p \in \mathbb{P}, \beta_p = \alpha_p + \gamma_p \implies \alpha_p \leq \beta_p$.

Réciproquement, supposons que l'on ait, pour tout $p \in \mathbb{P}, \alpha_p \leq \beta_p$.

Il suffit de poser $c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p - \alpha_p}$ pour avoir $c \in \mathbb{N}$ et $b = ac$ i.e. $a|b$.

Un peu d'histoire : On appelle nombres de Mersenne^[4], les nombres M_n de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n = 2^n - 1.$$

[4]. **Marin Mersenne**, connu également sous son patronyme latinisé Marinus Mersenius, né le **8 septembre 1588** à Oizé, mort le **1^{er} septembre 1648** à Paris, est un religieux français appartenant à l'ordre des Minimes, érudit, mathématicien et philosophe.

On lui doit les premières lois de l'acoustique, qui portèrent longtemps son nom. Il établit concomitamment avec Galilée la loi de la chute des corps dans le vide.

On a :

$$M_1 = 2 - 1 = 1$$

$$M_3 = 8 - 1 = 7$$

$$M_5 = 32 - 1 = 31$$

$$M_2 = 4 - 1 = 3$$

$$M_4 = 16 - 1 = 15$$

$$M_6 = 64 - 1 = 63$$

On remarque que M_2 , M_3 et M_5 sont premiers, M_1 , M_4 et M_6 ne le sont pas. De cette observation est née une conjecture :

$$n \text{ est premier} \iff M_n \text{ est premier.}$$

Si celle-ci était vraie, cela permettrait de connaître un nombre premier aussi grand que l'on souhaite :

$$2 \text{ premier} \implies M_2 \text{ premier} \implies M_{M_2} \text{ premier} \implies M_{M_{M_2}} \text{ premier} \implies \dots$$

Actuellement, le plus grand nombre premier trouvé est un nombre de Mersenne.

Malheureusement cette conjecture est fausse dans un sens.

En effet si $n = 11$, premier donc, alors $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

M_{11} n'est donc pas premier alors que 11 l'est.

On peut cependant prouver que le sens direct est vrai en prouvant sa contraposée :

$$\text{« Si } n \text{ n'est pas premier alors } M_n \text{ ne l'est pas non plus ».}$$

Rappel 2 :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

Il suffit de développer le second membre et de simplifier ou de reconnaître dans le second membre, la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x .

Si n n'est pas premier, alors il existe d , diviseur propre de n tel que $n = dq$ avec $q > 1$.

D'où,

$$\begin{aligned} M_n &= 2^n - 1 = (2^d)^q - 1 \\ &= (2^d - 1) \left((2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \dots + 2^d + 1 \right). \end{aligned}$$

Donc $2^d - 1$ est un diviseur propre de M_n qui n'est donc pas premier.

Conclusion : Si n n'est pas premier alors M_n non plus et la contraposée :

Si M_n est premier alors n l'est également.

Corollaire 8.2 :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{admet} \quad \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i) \text{ diviseurs.}$$

Un peu d'histoire : On appelle nombres de Fermat ^[5], les nombres F_n de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1.$$

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65\,537, \quad \dots$$

Fermat a montré que F_n est premier pour $n = 0, \dots, 4$ et a conjecturé que $F_n \in \mathbb{P}$ pour tout n .

Cette conjecture s'est avérée fausse.

Euler montra que $F_5 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641.

Jusqu'à aujourd'hui, on n'a trouvé aucun autre nombre de Fermat premier et on ne sait même pas s'il y en a !

Exercice 8 : Trouver le nombre de diviseurs de 120 et déterminer tous ces diviseurs.

Correction :

— La décomposition de 120 en facteurs premiers est $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

$$\text{Donc } \varphi(120) = (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16.$$

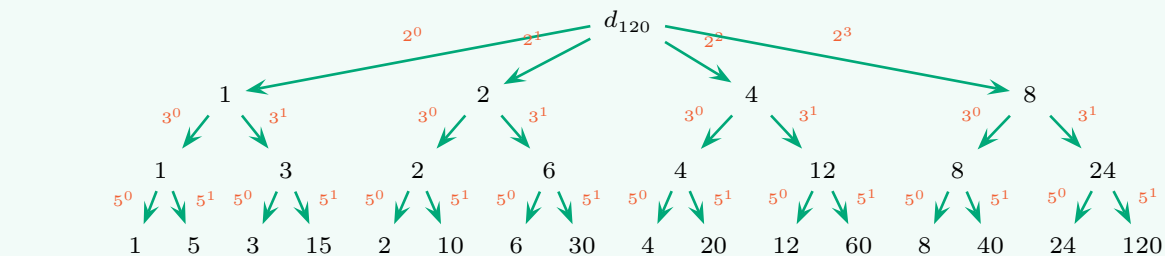
Il y a donc 16 diviseurs pour 120.

— Pour déterminer tous ces diviseurs, on peut utiliser un tableau double entrée en séparant les puissance de 2 et les puissance de 3 et 5.

On obtient alors :

$\times$	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 5^0$	1	2	4	8
$3^1 5^0$	3	6	12	24
$3^0 5^1$	5	10	20	40
$3^1 5^1$	15	30	60	120

— On peut aussi utiliser un arbre pondéré dont les coefficients sont les facteurs premiers possibles :



— Les 16 diviseurs de 120 sont donc :

$$d_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}.$$

[5]. Pierre de Fermat, né dans la première décennie du XVII^e siècle près de Montauban, et mort le 12 janvier 1665 à Castres, est un magistrat, polymathe et surtout mathématicien français, surnommé par E.T. Bell « le prince des amateurs ».

Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique. On lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard, par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.

II/ PGCD et PPCM

II.1 PGCD

Définition 3 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle *PGCD* de a et b , noté $\text{pgcd}(a; b)$ ou $a \wedge b$, le plus grand diviseur commun à a et b .

Remarques :

— Comme 1 divise tous les nombres entiers $\text{pgcd}(a; b) \geq 1$.

De même, il est évident que si a et b sont non nuls, $\text{pgcd}(a; b) \leq a$ et $\text{pgcd}(a; b) \leq b$.

— $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(b; a)$

— Si $a > 0$, $\text{pgcd}(a; 0) = a$. Par convention, on posera $\text{pgcd}(0; 0) = 0$.

— En d'autres termes $a \wedge b = \max(\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b))$. Plus tard, quand vous saurez que $\mathbb{Z}$ est un anneau *principal*, vous démontrerez que le $\text{pgcd}(a; b)$ est le générateur de l'idéal $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$:

$$d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, \text{ où } d = \text{pgcd}(a; b).$$

Preuve : Avant de donner un nom à quelque chose, il faut montrer que ce quelque chose existe et avant de l'appeler « le », il faut montrer qu'il est unique.

Existence : L'ensemble $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ des diviseurs communs à a et b est un ensemble fini car intersection de deux ensembles finis.

De plus 1 divise a et b donc l'ensemble des diviseurs communs à a et b est non vide.

Or, tout ensemble d'entiers fini non vide admet un plus grand élément que l'on peut appeler $\text{pgcd}(a; b)$.

Unicité : Le fait que $\text{pgcd}(a; b)$ ait été choisi comme le plus grand élément d'un ensemble fini impose son unicité...s'il en existait un plus grand, on prendrait celui-là.

Dans la pratique, on se bornera souvent au cas où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$ et tels que $a > b$. Cette condition n'est pas restrictive car les diviseurs d'un nombre et de son opposé sont les mêmes, donc $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(|a|; |b|)$ pour a et b dans $\mathbb{Z}$.

Et, par ailleurs, parmi deux entiers naturels a et b , il y en a toujours un qui est plus grand que l'autre. Il suffira donc de commencer par diviser le plus grand par le plus petit.

Exemple 7 :

$$\text{pgcd}(24; 18) = 6.$$

$$\text{pgcd}(27; 140) = 1.$$

$$\text{pgcd}(31; 45) = 1.$$

$$\text{pgcd}(60; 84) = 12.$$

$$\text{pgcd}(5; 7) = 1.$$

$$\text{pgcd}(150; 240) = 30.$$

$$\text{pgcd}(6; 72) = 6.$$

Exercice 9 : Pour tout entier n non nul, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n} \text{pgcd}(24; n).$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

La remarque qui suit exploite dans le domaine de l'arithmétique le vocabulaire des relations d'ordre que nous avons déjà développé :

La première chose dont il faut se rappeler est que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ MAIS PAS SUR $\mathbb{Z}$.

Pour cette raison, nous ne parlerons ci-dessous que d'entiers naturels. Le mot « diviseur », en particulier, est à comprendre au sens restreint de « diviseur positif », mais nous omettrons la précision « positif » pour alléger.

Les lettres a, b désignent des entiers NATURELS.

- Dire que a DIVISE b , c'est dire que a est PLUS PETIT QUE b au sens de la divisibilité.
- Les DIVISEURS COMMUNS POSITIFS de a et b sont exactement les MINORANTS de $\{a, b\}$ au sens de la divisibilité.
- Nous avons défini le PGCD de a et b comme le plus grand élément de $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ au sens de la relation $|$

Conclusion : $a \wedge b$ est le plus grand minorant de $\{a, b\}$ au sens de la divisibilité *i.e.* sa borne inférieure.

Proposition 9 :

- $\text{pgcd}(a; a) = |a|$ et $\text{pgcd}(1; a) = 1$.
- Si $b|a$ alors $\text{pgcd}(a; b) = |b|$.

Théorème 10 (Fondamental) :

Soient a et b deux entiers non nuls tels et un couple d'entiers $(q; r)$ tels que $a = bq + r$. Alors,

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(b; r).$$

Remarques :

- Même si l'énoncé du **théorème (10)** fait fortement penser à la division euclidienne de a par b , il n'est nullement besoin que ce soit le cas pour que ce théorème soit vrai.
- En d'autre terme, le **théorème (10)** s'écrit :

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r).$$

Preuve : Posons $D = \text{pgcd}(a; b)$ et $d = \text{pgcd}(b; r)$.

- Comme D divise a et b , il divise aussi $a - bq = r$. Donc D est un diviseur de a et r et $D \leq d$.
- De la même manière, d divise b et r donc divise $bq + r = a$ et $d \leq D$.
- On conclue à $D = d$.

Méthode 3 (Égalité entre deux nombres) :

Soit d et D , deux quantités. Pour montrer que $d = D$, il suffit :

- de montrer successivement que $d \leq D$ puis $D \leq d$.
- dans le cas de nombres entiers positifs, on pourra aussi montrer que $d|D$ puis $D|d$.

Ce théorème est fondamental par ses applications et notamment dans l'algorithme d'Euclide du [paragraphe \(II.2\)](#) .

Exercice 10 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soient $x = 7a + 5b$ et $y = 4a + 3b$.

Montrer que $\text{pgcd}(x; y) = \text{pgcd}(a; b)$.

Correction :

Première méthode : On applique le même raisonnement qu'à l'exercice précédent avec des combinaisons linéaires judicieusement choisies afin d'utiliser le **théorème (10)**.

$$\begin{aligned} x = 7a + 5b &= (4a + 3b) + (3a + 2b) \implies \text{pgcd}(x; y) = \text{pgcd}(7a + 5b; 4a + 3b) \\ &= \text{pgcd}(y + (3a + 2b); y) = \text{pgcd}(4a + 3b; 3a + 2b). \end{aligned}$$

$$\text{Or, } 3a + 2b = 2(a + b) + a \implies \text{pgcd}(4a + 3b; 3a + 2b) = \text{pgcd}(a + b; a) = \text{pgcd}(a; b).$$

On en déduit que : $\text{pgcd}(x; y) = \text{pgcd}(a; b)$.

Deuxième méthode : En revenant à la définition du pgcd, on applique la **méthode (3)** en montrant, en deux temps, que $\text{pgcd}(x; y) \mid \text{pgcd}(a; b)$ puis $\text{pgcd}(a; b) \mid \text{pgcd}(x; y)$.

Pour se simplifier les notations, on pose $d = \text{pgcd}(a; b)$ et $d' = \text{pgcd}(x; y)$.

- d divise a et b , donc d divise aussi $x = 7a + 5b$ et $y = 4a + 3b$. On en déduit que $d \mid d'$.
- De même, si d' divise $7a + 5b$ et $4a + 3b$ alors d' divise aussi $7(4a + 3b) - 4(7a + 5b) = b$ et $3(7a + 5b) - 5(4a + 3b) = a$. Donc $d' \mid d$.

Comme d divise d' et d' divise d , on a donc $d = d'$.

II.2 Algorithme d'Euclide

Théorème 11 (Le pgcd est le dernier reste non nul) :

Soient a et b deux naturels non nuls tels que b ne divise pas a . La suite des divisions euclidiennes suivantes finit par s'arrêter.

Le dernier reste non nul est alors le $\text{pgcd}(a; b)$.

a par b	$a = bq_0 + r_0$	avec $b > r_0 \geq 0$
b par r_0	$b = r_0q_1 + r_1$	avec $r_0 > r_1 \geq 0$
r_0 par r_1	$r_0 = r_1q_2 + r_2$	avec $r_1 > r_2 \geq 0$
		$\vdots$
r_{n-2} par r_{n-1}	$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$	avec $r_{n-1} > r_n \geq 0$
r_{n-1} par r_n	$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0.$	

On a alors $\text{pgcd}(a; b) = r_n$.

Preuve :

- La suite des restes $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ est une suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$. Elle est donc nécessairement finie. Il existe, de plus, un certain rang n tel que $r_{n+1} = 0$.
- En appliquant le **théorème (10)** de proche en proche, on obtient alors :

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(b; r_0) = \text{pgcd}(r_0; r_1) = \dots = \text{pgcd}(r_{n-1}; r_n).$$

- Or, $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$ i.e. r_n divise r_{n-1} .

Donc $\text{pgcd}(r_{n-1}; r_n) = r_n$.

- Conclusion : $\text{pgcd}(a; b) = r_n$. Le dernier reste non nul est le PGCD.

Exemple 8 : Calculer le $\text{pgcd}(4539; 1958)$. On effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$$4539 = 1958 \times 2 + 623$$

$$1958 = 623 \times 3 + 89$$

$$623 = 89 \times 7 + 0$$

Conclusion : $\text{pgcd}(4539; 1958) = 89$.

Remarque : Le petit nombre d'étapes montre la performance de cet algorithme. Celui-ci porte le nom d'un père des mathématiques car il était effectivement connu d'Euclide six siècles avant notre ère!!!

Exercice 11 : Calculer le pgcd de 162 et 207.

Correction :

$$207 = 162 \times 1 + 45$$

$$162 = 45 \times 3 + 27$$

$$45 = 27 \times 1 + 18$$

$$27 = 18 \times 1 + 9$$

$$18 = 9 \times 2 + 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pgcd}(162; 207) = 9.$$

Voici un algorithme d'Euclide que l'on peut proposer pour trouver le PGCD de deux nombres.

```

1 def pgcd(a, b) :
2     while a % b != 0 :
3         a, b = b, a % b
4     return b

```

Figure III.4 – Algorithme d'Euclide

Théorème 12 :

Soient a et b deux entiers non nuls.

Les diviseurs communs de a et b sont **exactement** les diviseurs de $\text{pgcd}(a; b)$:

$$\begin{aligned} d|\text{pgcd}(a; b) &\iff \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \\ \text{De manière équivalente : } \mathcal{D}(a \wedge b) &= \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b). \end{aligned}$$

Remarque : Avant ce théorème, nous n'avions que l'inclusion $\mathcal{D}(a \wedge b) \subset \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.

Preuve : On démontre les deux implications séparément :

Condition nécessaire : Si $d|\text{pgcd}(a; b)$ alors $d|a$ et $d|b$ par transitivité.

Condition suffisante : Soit d divisant a et b . Appliquons l'algorithme d'Euclide à a et b et considérons la suite finie des r_n apparaissant dans celui-ci.

À la première étape, $r_0 = a - bq$ i.e. $d|r_0$. On déroule alors en appliquant le **théorème (10)** fondamental :

$$\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \implies \begin{cases} d|b \\ d|r_0 \end{cases} \implies \begin{cases} d|r_0 \\ d|r_1 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} d|r_{n-1} \\ d|r_n \end{cases}.$$

Or, $r_n = \text{pgcd}(a; b)$.

Donc $d|\text{pgcd}(a; b)$.

Proposition 13 :

Pour tout entier naturel k non nul, $\text{pgcd}(ka; kb) = k \times \text{pgcd}(a; b)$.

Preuve : Ici aussi, on applique l'algorithme d'Euclide à a et b . Partant de $a = b \times q + r_0$ avec $0 \leq r_0 < b$, on a

$$ka = kb \times q + kr_0, \quad \text{avec } 0 \leq kr_0 < kb \quad (\text{III.4})$$

i.e. (III.4) est bien l'expression de la division euclidienne de ka par kb et, dans l'algorithme d'Euclide appliqué à ka et kb , la suite des restes est formée des kr_n . Le dernier reste non nul sera donc $kr_n = k\text{pgcd}(a; b)$.

Donc $\text{pgcd}(ka; kb) = k \times \text{pgcd}(a; b)$.

Exemple 9 :

- $\text{pgcd}(800; 500) = \text{pgcd}(100 \times 8; 100 \times 5) = 100 \times \text{pgcd}(8; 5) = 100$.
- $\text{pgcd}(36; 24) = \text{pgcd}(12 \times 3; 12 \times 2) = 12 \times \text{pgcd}(3; 2) = 12$.

Proposition 14 :

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et

$$b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}.$$

Alors,

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Preuve : Comme $\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \alpha_p$ et $\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \beta_p$, $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$ est bien un diviseur de a et b .

Soit alors $d' = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\delta_p}$ un diviseur de a et b . Le **corollaire (8.1)** entraîne que $\delta_p \leq \alpha_p$ et $\delta_p \leq \beta_p$ i.e. $\delta_p \leq \min(\alpha_p, \beta_p)$.

Donc $d' | d$ et $d = \text{pgcd}(a; b)$.

Dans le cas de deux nombres a et b pas trop grands, on pourra ainsi réviser ses tables de multiplication et décomposer les deux nombres a et b en facteurs premiers et trouver, « à la main », le plus grand diviseur commun. ^[6]

Exemples 10 :

- $510510 \wedge 80000 = (2)(3)(5)(7)(11)(13)(17) \wedge (2)^7(5)^4 = (2)(5) = 10$.
- $9100 \wedge 1848 = (2)^2(5)^2(7)(13) \wedge (2)^3(3)(7)(11) = (2)^2(7) = 28$.

Exercice 12 : Déterminer le PGCD de 1960 et de 34300.

Correction : On a : $1960 = 2^3 \times 5^1 \times 7^2$ et $34300 = 2^2 \times 5^2 \times 7^3$.

On en déduit que $\text{pgcd}(1960; 34300) = 2^2 \times 5^1 \times 7^2 = 980$.

II.3 PPCM

Définition 4 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle *PPCM de a et b* , noté $\text{ppcm}(a; b)$ ou $a \vee b$, le plus petit multiple commun de a et b .

Remarques :

- Le seul multiple de 0 est 0 donc, pour tout entier a , $\text{ppcm}(a; 0) = 0$.
- Comme tous les entiers sont multiples de 1, $\text{ppcm}(a; b) \geq 1$.

De même, il est évident que si a et b sont non nuls, $\text{ppcm}(a; b) \geq a$ et $\text{ppcm}(a; b) \geq b$.

- $\text{ppcm}(a; b) = \text{ppcm}(b; a)$.
- En d'autres termes, $a \vee b = \min(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$ ou encore $\text{ppcm}(a; b)$ engendre l'idéal $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

[6]. Cette décomposition en facteurs premiers proprement dite est, en fait, un problème extrêmement difficile pour des nombres élevés. Pour trouver le pgcd de tels nombres nous aurons besoin d'un algorithme plus puissant (cf plus loin).

Preuve : La démonstration est identique à celle du pgcd :

— L'ensemble des multiples strictement positifs à a et à b n'est pas vide puisqu'il contient au moins ab .

Comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, $\text{ppcm}(a; b)$ existe.

— Comme on a pris le plus petit des candidats par définition, $\text{ppcm}(a; b)$ est unique.

Au collège, pour additionner deux fractions, on recherchait le dénominateur commun le plus petit qui n'était rien d'autre que $\text{ppcm}(a; b)$.

Exemple 11 :

$$\text{— } \text{ppcm}(18; 12) = 36.$$

$$\text{— } \text{ppcm}(24; 40) = 120.$$

$$\text{— } \text{ppcm}(11; 17) = 11 \times 17 = 187.$$

$$\text{— } \text{ppcm}(19; 5) = 19 \times 5 = 95.$$

Proposition 15 :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

$$\text{— } \text{ppcm}(a; a) = a \text{ et } \text{ppcm}(1; a) = a.$$

$$\text{— } \text{Si } b|a \text{ alors } \text{ppcm}(a; b) = a.$$

Théorème 16 :

Soient a et b deux entiers non nuls.

Les multiples communs de a et b sont **exactement** les multiples de $\text{ppcm}(a; b)$:

$$\begin{array}{lcl} \text{ppcm}(a; b) | m & \iff & \begin{cases} a|m \\ b|m \end{cases} \\ \text{De manière équivalente : } (a \vee b)\mathbb{Z} & = & a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}. \end{array}$$

Au sens de la divisibilité, $a \vee b$ est le plus petit majorant de $\{a, b\}$ i.e. sa borne supérieure.

Preuve : On démontre les deux implications séparément :

Condition nécessaire : Si m est un multiple de $\text{ppcm}(a; b)$ alors m est un multiple de a et b par définition.

Condition suffisante : Soit m un multiple de a et b . Posons $M = \text{ppcm}(a; b)$.

La division euclidienne de m par M s'écrit $m = Mq + r$ avec $0 \leq r < M$.

Or, $r = m - Mq$ est alors aussi un multiple de a et b et strictement plus petit que $M = \text{ppcm}(a; b)$. Ceci n'est possible qu'à la condition que $r = 0$ i.e. $m|M$. $\text{ppcm}(a; b)$ est donc un multiple de m .

En pratique, on sait calculer le PGCD de deux nombres mais moins leur PPCM. Le **théorème (17)** donne un moyen de le calculer :

Théorème 17 :

Soient a et b deux entiers naturels.

$$ab = \text{ppcm}(a; b) \times \text{pgcd}(a; b).$$

Preuve : Si $a = 0$ ou $b = 0$, la relation est clairement vérifiée.

Supposons à présent a et b non nuls et posons $\delta = a \wedge b$ et $\mu = a \vee b$.

Montons que $ab = \delta\mu$ par divisibilité réciproque :

$\delta\mu|ab$: Par définition de δ , $\delta|a$ et $\delta|b$ donc il existe $a', b' \in \mathbb{N}$ tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$

On pose $m = \delta a' b' = ab' = a' b$.

m est donc un multiple de a et b donc un multiple de μ d'après le **théorème (16)**.

Par conséquence, $ab = \delta m$ est un multiple de $\delta\mu$ i.e. $\delta\mu|ab$.

$ab|\delta\mu$: Par définition de μ , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $ab = \mu n$.

Or, μ est aussi un multiple de a donc il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = ac$.

Alors $ab = \mu n = acn \implies b = cn$ (car $a \neq 0$) i.e. $n|b$.

On montre de la même manière que $n|a$. L'entier n est donc un diviseur commun à a et b , il divise donc le plus grand d'entre eux δ d'après le **théorème (12)**

En conclusion $ab = n\mu$ divise $\delta\mu$.

Par antisymétrie de la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, on en déduit que $\delta\mu = ab$.

Remarque : La notion de PPCM peut aisément s'étendre aux entiers relatifs en prenant comme définition, le plus petit multiple de $|a|$ et $|b|$. Dans ce cas, on aurait également :

$$|ab| = \text{ppcm}(a; b) \times \text{pgcd}(a; b).$$

Exemple 12 : Le PGCD de 42 et 60 est 6. Si on note m leur PPCM, alors $6m = 42 \times 60$ et $m = 420$.

Corollaire 17.1 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{ppcm}(ka; kb) = k \times \text{ppcm}(a; b).$$

Preuve : Si k, a ou b est nul, c'est évident.

Sinon, supposons a, b et k non nuls.

Toujours d'après la **proposition (17)**, $\text{ppcm}(ka; kb) \times \text{pgcd}(ka; kb) = ka \times kb$.

Or, $\text{pgcd}(ka; kb) = k \times \text{pgcd}(a; b)$.

Après simplification, on a le résultat escompté.

Exercice 13 : Déterminer $m = 44100 \vee 36036$.

Correction : On commence par déterminer $44100 \wedge 36036$ l'algorithme d'Euclide :

$$44100 \wedge 36036 = 36036 \wedge 8064 = 8064 \wedge 3780 = 3780 \wedge 504 = 504 \wedge 252 = 252.$$

D'après la relation (17), on a alors $252 \times m = 44100 \times 36036$.

$$\text{D'où } m = \frac{44100 \times 36036}{252} = 6306300.$$

Proposition 18 :

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$.

Alors,

$$a \vee b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Preuve : La démonstration est quasi-identique à celle de la proposition (18) .

Comme $\max(\alpha_p, \beta_p) \geq \alpha_p$ et $\max(\alpha_p, \beta_p) \geq \beta_p$, $m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$ est bien un multiple de a et b .

Soit alors $m' = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\delta_p}$ un multiple de a et b . Le corollaire (8.1) entraîne que $\delta_p \geq \alpha_p$ et $\delta_p \geq \beta_p$ i.e. $\delta_p \geq \max(\alpha_p, \beta_p)$.

Donc $m|m'$ et $m = \text{ppcm}(a; b)$.

Méthode 4 (Trouver un PPCM) :

Pour des entiers a et b pas « trop grands », une méthode enfantine mais souvent suffisante est de décomposer a et b en facteurs premiers.

Le ppcm de a et b est alors égal au produit de tous les facteurs premiers de a et b pris avec l'exposant le plus grand apparaissant dans les décompositions.

Exercice 14 : Déterminer $\text{ppcm}(240; 756)$.

Arithmétique

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$.

1. $a = 8,313131 \dots \in \mathbb{Q}$	4. $d = 0,142857142857 \dots$
2. $b = 1,24242424 \dots$	5. $e = 0,9999999999 \dots$
3. $c = 123,32576576576576 \dots$	

Correction : $100a = 831,313131 \dots$ donc $100a - a = 823 \Rightarrow a = \frac{823}{99} \in \mathbb{Q}$.

De la même manière,

1. $b = \frac{41}{33}$.	2. $c = \frac{342229}{2775}$.	3. $d = \frac{1}{7}$.	4. $e = 1$.

Exercice 2 : Montrer que :

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$	2. $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$

Correction :

1. Supposons le contraire i.e. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

Alors $\sqrt{3} + \sqrt{6} = r - \sqrt{2}$.

En élevant au carré, $3 + 6\sqrt{2} + 6 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow (6 + 2r)\sqrt{2} = r^2 - 7$.

Comme $r \geq 0$ alors $6 + 2r \neq 0$.

On en déduit que $\sqrt{2} = \frac{r^2 - 7}{6 + 2r}$.

Or,

- la somme de deux rationnels est un rationnel ;
- le produit de deux rationnels est un rationnel ;
- le quotient de deux rationnels (avec un dénominateur non nul) est un rationnel.

Donc $\sqrt{2} = \frac{r^2 - 7}{6 + 2r} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas.

Conclusion : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

2. De la même manière supposons que $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} = r \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} = r &\Leftrightarrow 5 = r^3 + 3r^2\sqrt[4]{3} + 3r\sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt[4]{3} \\ &\Leftrightarrow 5 - r^3 - 3r\sqrt{3} = \sqrt[4]{3}(3r^2 + \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow (5 - r^3)^2 + 27 - 6r\sqrt{3}(5 - r^3) = \sqrt{3}(9r^4 + 3 + 6r^2\sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow (5 - r^3)^2 + 27 - 18r^2 = 6r\sqrt{3}(5 - r^3) + \sqrt{3}(9r^4 + 3) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{(5 - r^3)^2 + 27 - 18r^2}{6r(5 - r^3) + 9r^4 + 3} \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, on obtient notre contradiction.

II/ Divisibilité

Exercice 3 : Déterminer les entiers naturels n et m qui vérifient :

1. $n^2 + n = 20$.	3. $n^2 - m^2 = 9$.
2. $n^2 + 2n = 35$.	4. $nm - 5n - 5m - 7 = 0$.

Correction :

3. Il est naturel de factoriser : $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$.

Ainsi, $n - m$ et $n + m$ sont nécessairement des diviseurs de 9.

Or, l'ensemble des diviseurs naturels de 9 sont 1, 3 et 9.

On réduit encore le champ d'investigation en remarquant que comme $n^2 - m^2$ est positif, avec n et m positifs alors nécessairement $n > m$. On en déduit alors que $n - m$ et $n + m$ sont positifs, et $n - m \leq n + m$.

Il ne reste plus qu'à étudier les différentes possibilités :

- Si $n - m = 1$ alors $n + m = 9$, d'où $n = 5$ et $m = 4$.
- Si $n - m = 3$ alors $n + m = 3$ d'où $n = 3$ et $m = 0$.

Finalement, il ne reste que deux couples solutions possibles : $(5; 4)$ et $(3; 0)$

Comme on a raisonné par condition nécessaire, on vérifie que ces couples sont solutions du problème.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{(5; 4); (3; 0)\}$.

Exercice 4 : Déterminer les entiers n tels que :

1. 7 divise $n + 3$.	3. $2n - 3$ divise $n + 5$.	5. $n + 3 \mid n + 9$.
2. $2n - 5$ divise 6.	4. $n + 1$ divise $3n - 4$	

Correction :

1. 7 divise $n + 3$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n + 3 = 7k$, soit $n = 7k - 3$.
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{7k - 3, k \in \mathbb{Z}\}$. Les points à coordonnées entières de la droite passant par $(0; -3)$ et de coefficient directeur 7.
2. Les diviseurs de 6 sont $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ et 6.

On résout les différentes équations sous la condition $2n - 5 \leq 6$ et on trouve comme solutions : $\mathcal{S} = \{1; 2; 3; 4\}$.

3. Si n un entier tel que $2n - 3$ divise $n + 5$ alors $2n - 3$ divise aussi $2n + 10$ et aussi la différence $(2n + 10) - (2n - 3) = 13$.

Les diviseurs de 13 sont $-13, -1, 1$ et 13. On en déduit que n vaut $-5, 1, 2$ ou 8.

Réciproquement, ces nombres sont tels que $2n - 3 \mid n + 5$.

On obtient : $\mathcal{S} = \{-5, 1, 2, 8\}$.

Exercice 5 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que 2 divise $n(n + 1)$.
2. Montrer que 3 divise $n(n + 1)(n + 2)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel a , 6 divise $a(a^2 - 1)$.

Exercice 6 : Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Correction : Première façon de faire : Procédons par récurrence, en définissant (P_n) : « $9 \mid 10^n - 1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $10^1 - 1 = 9$, donc est divisible par 9 : (P_1) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_n) est vraie. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n - 1 = 9k$. Ainsi,

$$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = 10(1 + 9k) - 1 = 10 + 9 \cdot 10k - 1 = 9(1 + 10k) = 9k',$$

en posant $k' = 1 + 10k \in \mathbb{N}$. Ceci montre que $9 \mid 10^{n+1} - 1$ donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 9 \mid 10^n - 1.}$$

Deuxième façon de faire : Rappelons l'identité : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$. Ici, on obtient :

$$10^n - 1 = (10 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 10^k \cdot 1^{n-1-k} = 9 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 10^k}_{\in \mathbb{N}} \quad \text{donc est divisible par 9.}$$

Exercice 7 : Prouver que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fraction $\frac{21m+4}{14m+3}$ est irréductible.

Exercice 8 :

1. La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?
2. Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.
3. Trouver les entiers naturels n qui, divisés par 4, donnent un quotient égal au reste.
4. Le quotient d'un entier naturel x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ?

En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.

5. Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+3$?

Même question avec $(n+5)^2$ et $n+3$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, le nombre $n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

Correction :

$$\begin{aligned} n^4 - 8n^2 + 4 &= (n^4 - 4n^2 + 4) - (4n^2) \\ &= (n^2 - 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n - 2)(n^2 + 2n - 2) \\ &= [(n-1)^2 - 3][(n+1)^2 - 3] \end{aligned}$$

Dès que $n \geq 4$, les deux nombres $(n-1)^2 - 3$ et $(n+1)^2 - 3$ sont des diviseurs de $n^4 - 8n^2 + 4$ strictement supérieurs à 1.

Donc $\forall n \geq 4, \quad n^4 - 8n^2 + 4 \notin \mathbb{P}$.

Exercice 11 : Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n .

Correction : On doit aborder ce genre d'exercice comme une chasse au trésor en lisant et utilisant toutes les informations de l'énoncé.

L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1. Il n'y a que 2 décompositions soit en un seul facteur 15, soit en deux facteurs 3×5 .

On sait que n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Donc n admet 2 facteurs premiers. Comme 15 ne peut se décomposer en plus de 2 facteurs, alors n ne peut admettre que 2 facteurs premiers 2 et 3. On a donc :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta.$$

Comme $15 = 3 \times 5$, on a alors : $(1 + \alpha)(1 + \beta) = 3 \times 5$.

On trouve alors deux solutions : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$ ou $\alpha = 4$ et $\beta = 2$.

On sait de plus que n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc α est inférieur à 3.

Le nombre n cherché est donc :

$$n = 2^2 3^4 = 4 \times 81 = 324.$$

Exercice 12 : Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.

Correction : Posons n l'entier cherché.

On cherche d'abord toutes les décompositions de 28 en facteurs supérieurs à 1. On peut décomposer 28 en 1, 2 ou 3 facteurs :

$$28 \quad \text{ou} \quad 2 \times 14 \quad \text{ou} \quad 4 \times 7 \quad \text{ou} \quad 2 \times 2 \times 7.$$

1. En 1 facteur :

Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 28$ soit $\alpha = 27$.

D'où, $n = 2^{27} = 134217728$.

2. En deux facteurs : $28 = 2 \times 14$.

Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 14$ et $\beta + 1 = 2$.^[7]

On a donc $\alpha = 13$ et $\beta = 1$.

D'où, $n = 2^{13} \times 3 = 24576$.

3. En deux facteurs : $28 = 4 \times 7$.

Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 7$ et $\beta + 1 = 4$.

On trouve alors $\alpha = 6$ et $\beta = 3$.

D'où, $n = 2^6 \times 3^3 = 1728$.

4. En trois facteurs : $28 = 2 \times 2 \times 7$.

Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ avec $\alpha + 1 = 7$, $\beta + 1 = 2$ et $\gamma + 1 = 2$.

On trouve alors $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

D'où $n = 2^6 \times 3 \times 5 = 960$.

Le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est donc 960.

Un peu d'histoire : Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est parfait. Un diviseur propre est un diviseur autre que le nombre lui-même.

Le premier nombre parfait est 6. En effet $1, 2$ et 3 sont les diviseurs propres de 6 et $1 + 2 + 3 = 6$.

- 28 est également un nombre parfait : $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.
- Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à 1000 qui sont 6, 28 et 496.

Ensuite vient 8 128, puis 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128 (découvert par Leonhard Euler), 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176, ...

- Actuellement, 51 nombres parfaits sont connus. Le plus grands possède 12 640 858 chiffres et est égal à :

$$2^{20996010} (2^{20996011} - 1).$$

Comme pour le plus grand nombre premier, c'est le projet GIMPS qui détient le record.

Dans le IX^{ème} livre des Éléments, Euclide d'Alexandrie (−320?; −260 ?) expose une façon de générer des nombres parfaits. C'est le propos de l'exercice suivant :

Exercice 13 (Théorème d'Euclide) :

1. (Exemples) Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombre parfait :

« Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ et si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est parfait ».

Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits. (On ne demande pas de prouver la règle).

2. (Démonstration) On pose $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et on suppose que $2^{n+1} - 1$ est premier.
 - (a) Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?
 - (b) En déduire la liste des diviseurs de a .
 - (c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts de a est égale à ce nombre a .

Remarque : Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Exercice 14 : Montrer que l'intervalle $\llbracket n! + 2, n! + n \rrbracket$ (pour $n \geq 2$) ne contient aucun nombre premier.

III/ PGCD et PPCM _____

Exercice 15 : Déterminer le PGCD de 8870 et de 3120.

Exercice 16 :

1. Calculer $598 \wedge 84$.
2. Réduire la fraction $\frac{1764}{945}$.
3. Calculer $186 \vee 33$ et $280 \vee 100$.

Correction :

1. $598 \wedge 84 = 2.$

2. $1764 \wedge 945 = 63.$

Donc $\frac{1764}{945} = \frac{63 \times 28}{63 \times 15} = \frac{28}{15}.$

3. $186 \wedge 33 = 3$ donc $186 \vee 33 = \frac{186 \times 33}{3} = 2046.$

$280 \wedge 100 = 20$ donc $280 \vee 100 = \frac{280 \times 100}{20} = 1400.$

Exercice 17 : Déterminer, suivant les valeurs de $n \geq 3$ le PGCD de $5n - 9$ et $2n - 6$.**Correction :** $5n - 9 = 2 \times (2n - 6) + (n + 3).$

Donc,

$$(5n - 9) \wedge (2n - 6) = (2n - 6) \wedge (n + 3).$$

$$(2n - 6) = 2 \times (n + 3) - 12.$$

Donc,

$$(2n - 6) \wedge (n + 3) = (n + 3) \wedge 12$$

D'où,

$$(5n - 9) \wedge (2n - 6) = (n + 3) \wedge 12.$$

Exercice 18 : Calculer $(15a + 4b) \wedge (11a + 3b)$ en fonction de $a \wedge b$.**Correction :** $(15a + 4b) = 1 \times (11a + 3b) + (4a + b).$

Donc,

$$(15a + 4b) \wedge (11a + 3b) = (11a + 3b) \wedge (4a + b)$$

$$(11a + 3b) = 2 \times (4a + b) + (3a + b).$$

Donc,

$$(11a + 3b) \wedge (4a + b) = (4a + b) \wedge (3a + b)$$

$$(4a + b) = 1 \times (3a + b) + a. \text{ Donc}$$

$$(4a + b) \wedge (3a + b) = (3a + b) \wedge a.$$

$$(3a + b) = 3 \times a + b. \text{ Donc}$$

$$(3a + b) \wedge a = a \wedge b.$$

D'où,

$$(15a + 4b) \wedge (11a + 3b) = a \wedge b.$$

Exercice 19 : Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a \leq b$ vérifiant :

$$a + b = 256 \text{ et } a \wedge b = 16.$$

Correction : Comme $a \wedge b = 16$, on peut écrire : $\begin{cases} a = 16\alpha \\ b = 16\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

$$a + b = 256 \iff 16(\alpha + \beta) = 256 \iff \alpha + \beta = 16.$$

Par élimination, les couples (α, β) sont $(1, 15), (3, 13), (5, 11), (7, 9)$.

Les solutions sont donc

$$(16, 240), (48, 208), (80, 176), \text{ et } (112, 144).$$

Exercice 20 : Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $x + y = 84$ et $(x \wedge y)^2 = (x \vee y)$.

Correction : Soit $d = x \wedge y$. On peut écrire $\begin{cases} a = d\alpha \\ b = d\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

On a

— $d^2 = \frac{xy}{d}$ i.e. $d^2 = \frac{d^2\alpha\beta}{d}$ i.e. $d = \alpha\beta$.
— $d(\alpha + \beta) = 84$ donc $d|84$ i.e. $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

On a donc $\begin{cases} \alpha\beta = d \\ \alpha + \beta = \frac{84}{d} \end{cases}$. α et β sont donc racines de $X^2 - \frac{84}{d}X + d$.

Le discriminant $X^2 - \frac{84}{d}X + d$ est $\Delta = \left(\frac{84}{d}\right)^2 - 4d = \frac{84^2 - 4d^3}{d^2}$. Il est nécessairement positif i.e. $0 \leq d \leq \sqrt[3]{42^2} \simeq 12,1$.

Remarque : On n'est pas assuré que $\frac{84}{d}$ soit pair donc on ne peut prendre le discriminant réduit pour ceux qui seraient tentés.

d	1	2	3	4	6	7	12
$\frac{84}{d}$	84	42	28	21	14	12	7
$\frac{84^2 - 4d^3}{d^2}$	7052	1756	772	$\notin \mathbb{N}$	172	116	1
$\sqrt{\Delta}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	1

La seule possibilité pour avoir $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ est donc $d = 12$ qui donne les solutions $\frac{\frac{84}{d} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$.

En conclusion $\{\alpha, \beta\} = \{3, 4\}$:

Les solutions sont donc $(36, 48)$ et $(48, 36)$.

Exercice 21 : Déterminer deux entiers naturels a et b connaissant leur produit 1512 et leur ppcm 252.

Correction : Posons $d = a \wedge b$.

Comme $252 \times d = ab$. Donc $d = 6$.

Posons $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

On a alors $35a'b' = 1512$ d'où $a'b' = 42$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, le couple (a', b') ne peut être égal qu'à :

$$(1; 42), (2; 21), (3; 14), (6; 7), (7; 6), (14; 3), (21; 2), \text{ ou } (42; 1).$$

On multiplie par 6 pour avoir tous les couples solutions.

Exercice 22 : Soient d et m , respectivement le pgcd et le ppcm de deux naturels a et b .

Déterminer a et b tels que $m - 2d = 11$.

Correction : Posons toujours $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

Comme $md = ab$, on a $md = d^2a'b'$ puis $m = da'b'$.

La relation donnée s'écrit ainsi $da'b' - 2d = 11$.

$$d(a'b' - 2) = 11$$

D'où d , positif, divise 11. Il ne peut être égal qu'à 11 ou 1.

- Si $d = 11$, alors $a'b' - 2 = 1$ et $a'b' = 3$. Donc $(a', b') = (1, 3)$ ou $(3, 1)$ et $(a, b) = (11, 33)$ ou $(33, 11)$.
- Si $d = 1$, alors $a'b' = 13$ et $(a', b') = (1, 13)$ ou $(13, 1)$. Alors $(a, b) = (13, 1)$ ou $(1, 13)$.

On trouve donc 4 couples solutions.

Exercice 23 : On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que

$$\forall n \geq 1, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p} .

4. Montrer que $\forall n, m > 2, F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n > 5$ et F_n est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie ? (On pourra chercher sur internet, une liste des 20 premiers nombres de Fibonacci.)

6. **(Hors-programme)** Vérifier que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7, puis montrer que F_n est divisible par 7 si et seulement si n est un multiple de 8.

(Indication : On pourra calculer dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.)

Correction :

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété.

Pour $n = 1$, on a $F_2 F_0 - F_1^2 = 1$ i.e. $0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$. La propriété est vraie.

Supposons qu'il existe un rang n fixé, tel que $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

On a alors, en utilisant la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 + F_{n+1} (F_n - F_{n+1}) \end{aligned}$$

Or, $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$, on a donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -(F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée pour $n = 1$, elle est donc vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \geq 1, F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

2. Il est clair, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.

Soit d un diviseur de F_n et F_{n+1} . Alors, par compatibilité de la relation de divisibilité avec les combinaisons linéaires entières, $d \mid (-1)^n$ i.e. $d = \pm 1$.

Les nombres F_n et F_{n+1} sont donc premiers entre eux.

3. Montrons, par récurrence double sur $p \geq 1$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 1$, grâce aux valeurs de F_0 et F_1 , on a

$$F_n F_0 + F_{n+1} F_1 = F_n \cdot 0 + F_{n+1} \cdot 1 = F_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 2$, par la relation de récurrence et les valeurs de F_1 et F_2 , on a

$$F_n F_1 + F_{n+1} F_2 = F_n \cdot 1 + F_{n+1} \cdot 1 = F_{n+2}.$$

La propriété est donc initialisée sur les deux premiers rangs.

Supposons que pour un entier p fixé, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p \text{ et } F_{n+p+1} = F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1}.$$

Considérons le rang $p + 2$. Grâce à la relation de récurrence, on a :

$$F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p}$$

En utilisant la double hypothèse de récurrence,

$$F_{n+p+2} = F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1} + F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p = F_n (F_p + F_{p-1}) + F_{n+1} (F_{p+1} + F_p).$$

Soit

$$F_{n+p+2} = F_n F_{p+1} + F_{n+1} F_{p+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence double, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur commun à F_n et F_p .

D'après la relation précédente, $d|F_{n+p}$ donc $d|F_n \wedge F_{n+p}$ qui entraîne $F_n \wedge F_p | F_n \wedge F_{n+p}$.

De même, $F_{n+p} - F_n F_{p-1} = F_{n+1} F_p$ entraîne que tout diviseur d commun à F_n et F_{n+p} divise $F_{n+1} F_p$. Comme F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux, d , diviseur de F_n est aussi premier avec F_n donc divise F_{n+p} et encore $d|F_n \wedge F_p$ puis $F_n \wedge F_{n+p} | F_n \wedge F_p$.

Conclusion, $F_n \wedge F_p = F_n \wedge F_{n+p}$.

4. Supposons $m > n$ (les autres cas en découle) et posons $m = n + p$. La relation précédente, s'écrit :

$$F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n+p} = F_n \wedge F_p.$$

Si la division euclidienne de m par n s'écrit $m = np + r_0$ avec $0 \leq r_0 < n$ alors, en itérant le raisonnement, on obtient :

$$F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n+p} = F_n \wedge F_{r_0}.$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ll} m = np + r_0 & F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{r_0} \\ n = r_0 p_0 + r_1 & F_n \wedge F_{r_0} = F_{r_0} \wedge F_{r_1} \\ r_0 = r_1 p_1 + r_2 & F_{r_0} \wedge F_{r_1} = F_{r_1} \wedge F_{r_2} \\ \vdots & \\ r_k = r_{k+1} p_{k+1} + m \wedge n & F_{r_k} \wedge F_{r_{k+1}} = F_{r_{k+1}} \wedge F_{m \wedge n} \\ r_{k+1} = r_{k+2} \times (m \wedge n) + 0 & F_{r_{k+1}} \wedge F_{m \wedge n} = F_{m \wedge n} \wedge F_0. \end{array}$$

Par transitivité de l'égalité, on obtient $F_n \wedge F_m = F_{m \wedge n} \wedge F_0 = F_{m \wedge n} \wedge 0 = F_{m \wedge n}$.

5. Montrons la contraposée de ce résultat en supposant $n = n_1 n_2$ avec n_1, n_2 deux entiers supérieurs à 2. On a alors :

$$F_n \wedge F_{n_1} = F_{n \wedge n_1} = F_{n_1}.$$

Il est clair que la définition de F_n entraîne que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc F_{n_1} est un diviseur strict de F_n qui n'est donc pas premier.

La réciproque est fausse, mais il faut aller chercher $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$, comme premier contre-exemple...

6. On calcule modulo 7, les termes de la suite et on obtient :

$$\begin{array}{llllll} F_0 \equiv 0[7] & F_1 \equiv 1[7] & F_2 \equiv 1[7] & F_3 \equiv 2[7] & F_4 \equiv 3[7] & F_5 \equiv 5[7] \\ F_6 \equiv 1[7] & F_7 \equiv 6[7] & F_8 \equiv 0[7] & F_9 \equiv 6[7] & F_{10} \equiv 6[7] & F_{11} \equiv 5[7] \\ F_{12} \equiv 4[7] & F_{13} \equiv 2[7] & F_{14} \equiv 6[7] & F_{15} \equiv 1[7] & F_{16} \equiv 0[7] & F_{17} \equiv 1[7] \end{array}$$

On remarque de $F_0 \equiv F_{16}[7]$ et $F_1 \equiv F_{17}[7]$. La suite modulo 7 est donc périodique de période 16.

On remarque aussi que pour $k \in [0, 15]$, seule F_0 et F_8 sont divisible par 7.

On conclut que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7 et que F_n est divisible par 7 si, et seulement si n est un multiple de 8.

Arithmétique

I/ Questions de cours

Compléter :

Théorème 3 :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b. \quad (\text{III.1})$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la *division euclidienne* de a par b .

Proposition 15 :

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et

$$b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}.$$

Alors,

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Théorème 16 :

Soient a et b deux entiers non nuls.

Les multiples communs de a et b sont **exactement** les multiples de $\text{ppcm}(a; b)$:

$$\text{ppcm}(a; b) \mid m \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \end{cases}$$

II/ Quelques calculs élémentaires _____

1. Calculer $1092 \wedge 2652$.

Un peu long de trouver la décomposition en facteurs premiers donc algorithme d'Euclide même si l'on voit aisément que ces deux nombres sont au moins divisibles par 4 et 3 donc 12.

$$2652 = 1092 \times 2 + 468$$

$$1092 = 468 \times 2 + 156$$

$$468 = 156 \times 3 + 0.$$

Donc $1092 \wedge 2652 = 156 (= 12 \times 13)$.

2. Calculer $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} + \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$.

$$\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} + \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} + \frac{6^2 \times 3 \times 5^2}{5^2 \times 6 \times 2} = \frac{3^4}{3^4} + \frac{2 \times 3^2}{2} = 3 + 9 = 12.$$

3. Simplifier $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$.

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{2n(n-1)(n-1)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

4. Calculer $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$.

$$\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)} = \frac{2022}{(2022)^2 + (1-2022) \times (1+2022)} = \frac{2022}{(2022)^2 + 1 - 2022^2} = 2022.$$

III/ QCM _____

1. Le PPCM de 12 et 18 est :

(a) ☐ 24

(b) ☒ 36

(c) ☐ 48

(d) ☐ 72

2. Pour un entier impair n , $n^2 - 1$ est toujours divisible par :

(a) ☐ 3

(b) ☐ 6

(c) ☒ 4

(d) ☐ 9

3. Un entier n est multiple de 9 si :

(a) ☐ Il est impair.

(c) ☐ Il est divisible par 3.

(b) ☒ La somme de ses chiffres est un multiple de 9.

(d) ☐ Il se termine par 9.

4. L'ensemble des nombres premiers est :

- (a) ☐ Fini
(b) ☒ Infini

- (c) ☐ Limité
(d) ☐ Un sous-ensemble des nombres pairs

5. Le plus grand facteur premier de 90 est :

- (a) ☐ 2 (b) ☐ 3 (c) ☒ 5 (d) ☐ 7

6. Si a et b sont premiers entre eux, alors :

- (a) ☒ $\text{pgcd}(a; b) = 1$ (c) ☐ a et b sont pairs
(b) ☐ a divise b (d) ☐ $a \times b$ est premier

7. Le reste de la division de 2023 par 7 est :

- (a) ☒ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ 2 (d) ☐ 3

8. L'algorithme du crible d'Ératosthène sert à :

- (a) ☒ Tester la primalité d'un nombre (c) ☐ Déterminer le PPCM
(b) ☐ Calculer le PGCD (d) ☐ Vérifier la divisibilité par 7

9. Quel est le plus petit multiple commun de 4 et 6 ?

- (a) ☐ 2 (b) ☒ 12 (c) ☐ 16 (d) ☐ 24

Arithmétique

I/ Questions de cours _____

Compléter :

Théorème 5 (Critère d'arrêt) :

- Tout entier naturel n , $n \geq 2$, admet un diviseur premier.
- Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que :

$$2 \leq p \leq \sqrt{n}.$$

Théorème 12 :

Soient a et b deux entiers non nuls.

Les diviseurs communs de a et b sont **exactement** les diviseurs de $\text{pgcd}(a; b)$:

$$d | \text{pgcd}(a; b) \iff \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases}$$

Proposition 18 :

Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et

$$b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}.$$

Alors,

$$a \vee b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}.$$

II/ Quelques calculs élémentaires _____

1. Calculer $595 \wedge 805$.

Un peu long de trouver la décomposition en facteurs premiers donc algorithme d'Euclide même si l'on voit aisément que ces deux nombres sont au moins divisibles par 5.

$$805 = 595 \times 1 + 210$$

$$595 = 210 \times 2 + 175$$

$$210 = 175 \times 1 + 35$$

$$175 = 35 \times 5 + 0.$$

Donc $595 \wedge 805 = 35 (= 5 \times 7)$.

2. Calculer $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} + \frac{8^7 \times 6^{-9}}{27^{-3} \times 2^{11}}$.

$$\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} + \frac{8^7 \times 6^{-9}}{27^{-3} \times 2^{11}} = \frac{(3+1) \times 3^{21}}{(3-1) \times 3^{21}} + \frac{2^{21} \times 2^{-9} \times 3^{-9}}{3^{-9} \times 2^{11}} = \frac{4}{2} + 2^1 = 4.$$

3. Factoriser l'expression $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + (n+1)(n-n-1)}{n(n+1)^2} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

4. Calculer $\frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2}$.

Il suffit de remarquer $a^2 - b^2$ qui vous tend les bras.

$$\begin{aligned} \frac{2021^2}{2020^2 + 2022^2 - 2} &= \frac{2021^2}{2020^2 - 1 + 2022^2 - 1} = \frac{2021^2}{2019 \times 2021 + 2021 \times 2023} = \frac{2021}{2019 + 2023} \\ &= \frac{2021}{2021 - 2 + 2021 + 2} = \frac{2021}{2 \times 2021} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

III/ QCM _____

1. Quelle est la définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$?

(a) ☒ a divise b si $b = ka$ pour un entier k .

(b) ☐ a divise b si a est supérieur à b .

(c) ☐ a divise b si $a + b$ est pair.

(d) ☐ a divise b si a est un nombre premier.

2. L'ensemble des diviseurs de 12 est :

(a) ☒ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(b) ☐ $\{1, 2, 3, 6, 12\}$

(c) ☐ $\{1, 2, 3, 5, 12\}$

(d) ☐ $\{1, 3, 4, 6, 12\}$

3. Quel est le plus petit nombre premier ?

- (a) ☐ 1 (b) ☒ 2 (c) ☐ 3 (d) ☐ 5

4. Le PGCD de 24 et 18 est :

- (a) ☐ 4 (b) ☒ 6 (c) ☐ 8 (d) ☐ 12

5. Un nombre premier est un nombre qui :

- (a) ☐ Est divisible par 1 et lui-même uniquement. (c) ☐ Est divisible par 3 uniquement.
(b) ☐ Est pair et supérieur à 2. (d) ☒ Possède exactement deux diviseurs.

6. La décomposition en facteurs premiers de 120 est :

- (a) ☐ $2^2 \times 3^2 \times 5$ (b) ☐ $2^4 \times 3$ (c) ☒ $2^3 \times 3 \times 5$ (d) ☐ $2^3 \times 5^2$

7. La division euclidienne de 83 par 7 donne :

- (a) ☐ Quotient = 12, reste = 1 (c) ☒ Quotient = 11, reste = 5
(b) ☐ Quotient = 11, reste = 6 (d) ☐ Quotient = 10, reste = 3

8. L'algorithme d'Euclide est utilisé pour :

- (a) ☐ Trouver la somme des chiffres d'un nombre. (c) ☒ Calculer le plus grand diviseur commun.
(b) ☐ Factoriser un nombre en nombres premiers. (d) ☐ Déterminer le plus petit multiple commun.

9. Si $a|b$ et $b|c$, alors :

- (a) ☒ $a|c$ (b) ☐ $c|a$ (c) ☐ $a \times c = b$ (d) ☐ $b|a$

Arithmétique

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le pgcd de 8 136 et de 492 par deux méthodes différentes. En déduire leur ppcm par deux méthodes différentes.

Correction :

MÉTHODE 1 : PAR L'ALGORITHME D'EUCLIDE.

$$8\,136 = 492 \times 16 + 264$$

$$492 = 264 \times 1 + 228$$

$$264 = 228 \times 1 + 36$$

$$228 = 36 \times 6 + 12$$

$$36 = 12 \times 3 + 0.$$

Ainsi, on a $\boxed{\text{pgcd}(8\,136, 492) = 12}$. Donc $\boxed{\text{ppcm}(8\,136, 492) = \frac{8\,136 \times 492}{12} = 333\,576}$.

MÉTHODE 2 : PAR DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS. On écrit :

$$8\,136 = 2^3 \times 3^2 \times 113 \quad \text{et} \quad 492 = 2^2 \times 3 \times 41.$$

Pour connaître le PGCD, on garde leurs facteurs premiers communs (avec la plus petite puissance possible), donc on obtient :

$$\text{pgcd}(8\,136, 492) = 2^2 \times 3^1 = 12.$$

Pour connaître le PPCM, on considère chaque facteur premier avec la plus grande puissance à chaque fois, ce qui donne :

$$\text{ppcm}(8\,136, 492) = 2^3 \times 3^2 \times 41 \times 113 = 333\,576.$$

2. Décomposer 21! en produit de facteurs premiers. Combien possède-t-il de diviseurs ?

Correction : Un peu de courage ! On décompose chaque entier entre 2 et 21 en produit de facteurs premiers, puis on regroupe tout :

$$\begin{aligned} 21! &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \times 21 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times 2^4 \times \dots \\ &\quad \dots \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) \times (3 \times 7) \\ &= \boxed{2^{18} \times 3^9 \times 5^4 \times 7^3 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19}. \end{aligned}$$

Tout diviseur de 21! s'écrit $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^f 17^g 19^h$ où $a, \dots, h$ sont des entiers vérifiant $a \in \llbracket 0; 18 \rrbracket$, $b \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$, $c \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, $d \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ puis $e, f, g, h \in \llbracket 0; 1 \rrbracket$. En tout, cela fait $19 \times 10 \times 5 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 60\,800$ diviseurs de 21! (car 19 choix pour a , 10 pour b , 5 pour c etc.).

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

Remarque : la notion de congruence étant hors-programme, ne pas l'utiliser.

Correction : Si $n \in \mathbb{N}$, on a $2^{4n+2} + 3^{n+2} = 4 \times 16^n + 9 \times 3^n$, dont on cherche à démontrer qu'il est divisible par 13. Procédons par récurrence en posant (P_n) : « $13 \mid 4 \times 16^n + 9 \times 3^n$ ».

Initialisation. Avec $n = 0$, on a $4 \times 16^0 + 9 \times 3^0 = 4 + 9 = 13$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie ; démontrons (P_{n+1}) . Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4 \times 16^n + 9 \times 3^n = 13k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 4 \times 16^{n+1} + 9 \times 3^{n+1} &= 16 \times 4 \times 16^n + 3 \times 9 \times 3^n \\ &= 16 \times 4 \times 16^n + 3(13k - 4 \times 16^n) && \text{(hyp. de réc.)} \\ &= 16 \times 4 \times 16^n - 3 \times 4 \times 16^n + 3 \times 13k \\ &= 13 \times 4 \times 16^n + 3 \times 13k \\ &= 13(4 \times 16^n + 3k), \end{aligned}$$

avec $4 \times 16^n + 3k \in \mathbb{N}$, ce qui montre que 13 divise $4 \times 16^{n+1} + 9 \times 3^{n+1}$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, on a montré que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}.}$$

Commentaires : Pour ceux ayant fait Maths expertes, les congruences permettent de conclure en quelques lignes sans aucune récurrence !

En effet, $16 \equiv 3 \pmod{13}$ donc $16^n \equiv 3^n \pmod{13}$ (propriété sur les congruences).

Donc, par combinaison linéaire, on a $4 \times 16^n + 9 \times 3^n \equiv 4 \times 3^n + 9 \times 3^n \pmod{13} \equiv 13 \times 3^n \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$ d'où le résultat.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3.

Correction : Procédons par récurrence. On définit (P_n) : « $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3 ».

Initialisation. Avec $n = 0$, $0^3 - 3 \times 0^2 + 8 \times 0 = 0$ est bien divisible par 3, donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie ; montrons (P_{n+1}) :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 8(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 + 8n + 8 \\ &= (n^3 - 3n^2 + 8n) + (3n^2 - 3n + 9). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $n^3 - 3n^2 + 8n$ est divisible par 3. Or $3n^2 - 3n + 9 = 3(n^2 - n + 3)$ est divisible par 3, donc par somme, $(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 8(n+1)$ l'est aussi : (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid n^3 - 3n^2 + 8n.}$$

5. Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel N par 7 est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de N^2 puis de N^3 par 7.

Correction : Par hypothèse, il existe un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $N = 7q + 2$. On a alors :

$$N^2 = (7q + 2)^2 = 7^2 q^2 + 7 \times 4q + 4 = 7(7q^2 + 4q) + 4 = 7q' + 4,$$

où l'on a posé $q' = 7q^2 + 4q \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq 4 < 7$, l'écriture $N^2 = 7q' + 4$ est exactement la division euclidienne de N^2 par 7 ; son reste est de 4.

De même, on a :

$$N^3 = (7q + 2)(7q' + 4) = 7(7qq' + 4q + 2q') + 8 = 7(7qq' + 4q + 2q' + 1) + 1 = 7q'' + 1,$$

où l'on a posé $q'' = 7qq' + 4q + 2q' + 1 \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq 1 < 7$, on a donc bien écrit la division euclidienne de N^3 par 7, son reste est de 1.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = n^4 - 8n^2 + 4$. Démontrer que si $n \geq 4$, alors A_n n'est pas premier.

Indication : utiliser l'identité $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

Correction : Grâce à l'indication, on a $n^4 + 4 = (n^2)^2 + 2^2 = (n^2 - 2)^2 + 2 \times n^2 \times 2 = (n^2 - 2)^2 + 4n^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_n &= (n^2 - 2)^2 - 8n^2 + 4n^2 = (n^2 - 2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 - 2 - 2n)(n^2 - 2 + 2n) && \text{(identité remarquable)} \\ &= ((n - 1)^2 - 1)((n + 1)^2 - 3) && \text{(mise sous forme canonique).} \end{aligned}$$

Si $n \geq 4$, alors $(n - 1)^2 \geq 9$ (croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc $(n - 1)^2 - 1 \geq 8 > 1$. De même, $(n + 1)^2 - 3 \geq 5^2 - 3 = 22 > 1$. Le nombre A_n est donc le produit de deux entiers naturels > 1 , donc n'est pas premier.

7. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

(Par exemple, $1^3 + 2^3 + 3^3$ est une somme de trois cubes consécutifs).

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $N = (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ est divisible par 9.

Après développement, on a $N = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$.

Il suffit donc de montrer que $n(n^2 + 2)$ est divisible par 3. On distingue alors trois cas (on raisonne modulo 3) :

- Si $n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $n(n^2 + 2) = 3k(9k^2 + 2)$ est divisible par 3.
- Si $n = 3k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Alors $n(n^2 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ est divisible par 3.

- Si $n = 3k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Alors $n(n^2 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$ est divisible par 3.

Bilan : dans tous les cas, $n(n^2 + 2)$ est divisible par 3, donc $N = 3n(n^2 + 2)$ est divisible par 9.

Commentaires : On pouvait aussi procéder par récurrence.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'affirmation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad k \mid (k+1)^n + 2.$$

Correction : Procédons à nouveau par récurrence, en définissant (H_n) : « $k \mid (k+1)^n + 2$ ».

Commençons par étudier l'initialisation. Si $n = 0$, alors $(k+1)^0 + 2 = 3$, donc (H_0) est vraie si et seulement si k divise 3, c'est-à-dire $k = 1$ ou $k = 3$. On distingue donc trois cas :

- Si $k \neq 1$ et $k \neq 3$, alors l'affirmation de l'énoncé est fausse.
- Si $k = 1$, alors il est toujours vrai que 1 divise $2^n + 2$ car 1 divise tous les entiers...
- Il reste à étudier le cas où $k = 3$, ce qu'on suppose par la suite.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie. Par hypothèse, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $4^n + 2 = 3q$. Donc,

$$4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 4(3q - 2) + 2 = 3 \times 4q - 6 + 2 = 3 \times 4q - 4 = 3(4q - \frac{4}{3})$$

en posant $q' = 4q - 2 \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $3 \mid 4^{n+1} + 2$ donc (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid 4^n + 2.$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que son reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3. Montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.

Correction : Par hypothèse, on peut écrire $n = 5q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{2, 3\}$. Donc :

$$n^2 + 1 = (5q + r)^2 + 1 = 25q^2 + 10qr + r^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2 + 1.$$

- Si $r = 2$, alors $r^2 + 1 = 5$ donc $n^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr + 1)$ est divisible par 5.
- Si $r = 3$, alors $r^2 + 1 = 10$ donc $n^2 + 1 = 5(5q^2 + 2qr + 2)$ est divisible par 5.

Dans tous les cas, $n^2 + 1$ est divisible par 5.

(b) ★ Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 5.

Correction : Posons $p_n = n^5 - n$. Si $n = 0$, $p_0 = 0$ est divisible par 5. Si $n \geq 1$, on factorise :

$$p_n = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1).$$

On distingue 5 cas, selon ce que vaut le reste de la division euclidienne de n par 5. On garde les mêmes notations qu'avant : $n = 5q + r$.

- (1) Si $r = 0$, alors n est divisible par 5, donc le produit p_n aussi.
- (2) Si $r = 1$, alors $n - 1 = 5q$ est divisible par 5, donc p_n aussi.
- (3) Si $r = 2$, alors $n^2 + 1$ est divisible par 5 (question précédente), donc p_n aussi.
- (4) Si $r = 3$, idem.
- (5) Si $r = 4$, alors $n + 1 = 5q + 5$ est divisible par 5, donc p_n aussi.

Bilan : dans tous les cas, $p_n = n^5 - n$ est divisible par 5.

Applications

1. Applications

- Application d'un ensemble dans un ensemble.
- Graphe d'une application. Image directe et Image réciproque.
- Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
- Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

2. Généralités sur les fonctions

- Ensemble de définition. Représentation graphique.
- Effet sur la représentation graphique de f de transformations simples, comme $x \mapsto f(x + a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
- Parité, imparité. Interprétation géométrique. Réduction du domaine d'étude.
- Somme, produit, quotient.
- Monotonie (large et stricte).
- Fonctions majorées, minorées, bornées. Traduction géométrique.

3. Dérivation

- Dérivée d'une fonction. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Résultat admis à ce stade.
- Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Résultat admis à ce stade.
- Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

4. Théorèmes admis pour l'instant :

- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire des fonctions strictement monotones.
- Théorème de la bijection.
- Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque.

Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.

Henri Poincaré

Une civilisation constituée de groupes de personnes n'interagissant pas entre eux serait assez pauvre. Ce sont les relations entre groupes d'individus qui permettent de comparer, d'apprendre, de progresser, de transmettre, que ce soient des relations internes à un groupe donné, ou des relations d'un groupe à un autre. Une civilisation sans relation est vouée à la stérilité et à l'immobilisme, et donc à l'extinction.

Il en est de même pour les ensembles mathématiques. La théorie axiomatique des ensembles est certes très belle en soi, mais si on n'y rajoute pas une couche, elle est d'un intérêt assez limité pour le mathématicien recherchant le débouché concret. Comme dans le cas d'une civilisation, il faut faire interagir les ensembles, il faut créer des relations permettant de comparer les éléments d'un ensemble d'une façon ou d'une autre. Ce n'est qu'ainsi qu'on peut donner vie aux ensembles.

CONTENU

I	Le contexte	136
I.1	Relation binaire	136
I.2	Relation d'équivalence.	138
I.3	Relation d'ordre	139
II	Applications	141
II.1	Fonctions et Applications	141
II.2	Zoologie.	145
II.3	Opérations algébriques	147
II.4	Composition.	147
III	Aspects qualitatifs.	150
III.1	Graphe d'une fonction.	150
III.2	De l'intérêt des fonctions de référence	150
III.3	Parité, imparité et symétrie.	152
IV	Fonctions et relation d'ordre.	154
IV.1	Fonctions monotones.	154
IV.2	Fonctions majorées, minorées, bornées, ...	155
IV.3	Extrema.	156
V	Dérivation	157
V.1	Taux d'accroissement et nombre dérivé	157
V.2	Opérations algébriques et dérivation	158
V.3	Composition et dérivation	159
V.4	Monotonie et dérivation	160
VI	Continuité	161
VI.1	Fonction continue	161
VI.2	Opérations algébriques et continuité	162
VI.3	Théorème des valeurs intermédiaires	164

VII Injection, Surjection et Bijection	165
VII.1 Injection	165
VII.2 Surjection	166
VII.3 Bijection	167
VIII Réciproque	169
VIII.1 Bijection réciproque	169
VIII.2 Courbe représentative	172
VIII.3 Dérivabilité et Continuité	173
Feuille d'exercices n° 4 : Applications	176
Test n° 4 : Applications	185
Devoir en temps libre n° 3 : Arithmétique et applications	193
Correction	194
Devoir surveillé n° 1 : Raisonnement, Arithmétique et Applications	198
Correction	203
Programme de Khôlle des semaines 3 et 4	209
Programme du chapitre V	210

I/ Le contexte

I.1 Relation binaire

Les ensembles ayant été définis au chapitre précédent, intéressons nous brièvement à ces relations entre eux dont parlait Poincaré. ^[1]

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle *relation binaire* entre E et F un triplet $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une partie de $E \times F$, appelée *graphe* de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x \mathcal{R} y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

Dans la pratique, on s'intéressera plutôt aux relations d'un ensemble E dans lui-même.

Exemples 1 :

1. L'égalité sur $E = \{1, 2, 3\}$ est une relation binaire. Son graphe est $\mathcal{G} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

=	1	2	3
1	(1, 1)		
2		(2, 2)	
3			(3, 3)

[1]. Henri Poincaré est un mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences français, né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris.

Poincaré a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques.

Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque et certaines branches de la physique.

2. La relation $\leq$ sur $E = \{1, 2, 3\}$ est une relation binaire.

$\leq$	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2		(2, 2)	(2, 3)
3			(3, 3)

3. La relation $<$ sur $E = \{1, 2, 3\}$ est une relation binaire.

$<$	1	2	3
1		(1, 2)	(1, 3)
2			(2, 3)
3			

4. La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff 3 \text{ divise } y-x$ est une relation binaire sur $E = \{0, 1, 2, 3, 5\}$.

$\mathcal{R}$	0	1	2	3	5
0	(0, 0)			(0, 3)	
1		(1, 1)			
2			(2, 2)		(2, 5)
3	(3, 0)			(3, 3)	
5			(5, 2)		(5, 5)

5. La relation $\subset$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

6. Dans le plan, les relations $\parallel$ et $\perp$ sont des relations binaires de l'ensemble des droites, la colinéarité sur l'ensemble des vecteurs,...

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

— *Réflexive* lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

— *Symétrique* lorsque le graphe de $\mathcal{R}$ est symétrique :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

— *Antisymétrique* ^[2] lorsque :

$$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

— *Transitive* lorsque :

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

- L'égalité est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y - x$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $\parallel$ est réflexive, symétrique et transitive.
- La relation $\perp$ est symétrique.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Les relations d'égalité, de parallélismes, d'équivalence, de colinéarité de vecteurs non nuls sont toutes des relations réflexives, symétriques et transitives dans leur ensemble respectif.

De même, les relations de comparaison large et d'inclusion sont toutes deux réflexives, anti-symétriques et transitives.

Elles définissent des familles bien plus larges dans lesquelles on les regroupe. C'est le thème des deux paragraphes suivants :

I.2 Relation d'équivalence

Définition 2 : Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E .

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 1 : On définit sur $\mathbb{C}$ une relation binaire en posant

$$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, \quad (z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des éléments en relation avec z ce que l'on appelle sa *classe* d'équivalence.

Exemples 3 :

- La relation définie dans $\mathbb{R}$, par $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence.

Cette relation est appelée la congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$, et on note

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi.$$

Les *représentants* de chaque classe dans l'intervalle $]\pi; \pi]$ s'appelle la *mesure principale* de l'angle considéré : $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

[2]. On remarquera qu'il ne s'agit pas de la négation de « symétrique ».

- Dans $\mathbb{Q}$, la relation $\simeq$ définie par $\forall \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \frac{a}{b} \simeq \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$ est une relation d'équivalence dont les représentants des (nombreuses) classes sont les fractions irréductibles :
- $$3 \times 35 = 7 \times 15 \iff \frac{3}{7} \simeq \frac{15}{35}.$$

Remarque : Soit E un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$, l'ensemble des éléments en relation avec lui.

- Les classes d'équivalence sont des parties de E non vides et deux à deux disjointes.
- La réunion des classes d'équivalence est égale à E .

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E .

I.3 Relation d'ordre

Définition 3 : Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E .

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble *ordonné*.
- Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* pour l'ordre $\mathcal{R}$ lorsque l'on a $x\mathcal{R}y$ ou bien $y\mathcal{R}x$.
- Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que l'ordre $\mathcal{R}$ est *total* et que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble *totalelement ordonné*, partiel dans l'autre cas.

Une relation d'ordre est en général notée $\leq$ i.e. que $x\mathcal{R}y$ est plutôt noté $x \leq y$, de la même manière que l'on choisit, en général des symboles qui ressemblent au signe « = » pour les relations d'équivalence.

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit E un ensemble, $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.
- Soit I un ensemble non vide, on pose $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles et on la relation $\mathcal{R}$:

$$\forall f, g \in E, f\mathcal{R}g \iff \forall x \in I, f(x) \leq g(x).$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel appelée ordre fonctionnel.

ATTENTION

La négation de $x \leq y$ est :

x et y ne sont pas comparables OU x et y sont comparables et $x > y$.

Exercice 2 : On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Démontrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?

Correction : La relation $\prec$ est

- réflexive : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x \leq x$ et $y \leq y$.
- transitive : si $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$, alors

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \text{ et } y_1 \leq y_2 \leq y_3.$$

Donc $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$.

- antisymétrique : si $(x, y) \prec (x', y')$ et $(x', y') \prec (x, y)$, alors on a à la fois $x \leq x'$ et $x' \leq x$ et donc $x = x'$ et de même $y = y'$.

Elle définit donc bien une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

L'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$.
- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x$.
- A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.
- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in A, \forall x \in A, x \leq b$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$.

CHAPITRE IV. APPLICATIONS

- Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$.
- Les majorants et minorants ne sont pas uniques.
- Les majorants et minorants n'appartiennent pas forcément à l'ensemble mais quand ils le sont, ce sont des maxima et minima réciproquement.

Proposition 2 (Unicité des extrema) :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E .

- Si A est *majorée* par un majorant β qui est dans A alors celui-ci est unique.

On l'appelle LE maximum de A et on note $\beta = \max(A)$.

- Si A est *minorée* par un minorant α qui est dans A alors celui-ci est unique.

On l'appelle LE minimum de A et on note $\alpha = \min(A)$.

Les maxima et minima n'existent pas forcément même pour une partie bornée mais, s'ils existent, ils sont uniques. C'est ce qui justifie les notations $\max(A)$ et $\min(A)$.

Exemple 5 : L'intervalle $[0; 1[$ est borné par 0 et 1 mais n'admet qu'un minimum 0 et pas de maximum.

Exercice 3 : On reprend les notations de l'exercice (2). Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ?

Correction : Soit (x, y) un majorant de ce disque noté D. Alors $(1, 0) \prec (x, y)$ et donc $x \geq 1$.

De même, $(0, 1) \prec (x, y)$ et donc $y \geq 1$.

Ainsi, on a $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

Alors (x, y) est clairement un majorant de D, puisque tout élément (x_0, y_0) de D vérifie $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, et donc $x_0 \leq 1$ et $y_0 \leq 1$.

On en déduit que l'ensemble des majorants de D est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\}.$$

D n'admet donc pas de plus grand élément, puisque les majorants de D ne sont pas dans D.

Remarque : On verra plus tard qu'en revanche, D admet une borne supérieure, le plus petit des majorants de D, qui est $(1, 1)$.

II/ Applications

La notion d'*applications* (ou fonctions) entre deux ensembles E et F (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de E un élément de F.

II.1 Fonctions et Applications

Définition 5 : Soient E et F deux ensembles (non vides).

On appelle *application* (ou *fonction*) de E dans F toute relation $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$ telle que :

$$\forall x \in E, \forall (y; y') \in F^2, x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- E est l'ensemble de départ.
- F est l'ensemble d'arrivée.
- y est l'image de x par $\mathcal{R}$ que l'on notera plutôt $y = \mathcal{R}(x)$.
- x est un antécédent de y par $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{G}$ est le graphe de la relation. C'est une partie de $E \times F$.

L'ensemble des fonctions E vers F est noté $\mathcal{F}(E; F)$ ou encore F^E .

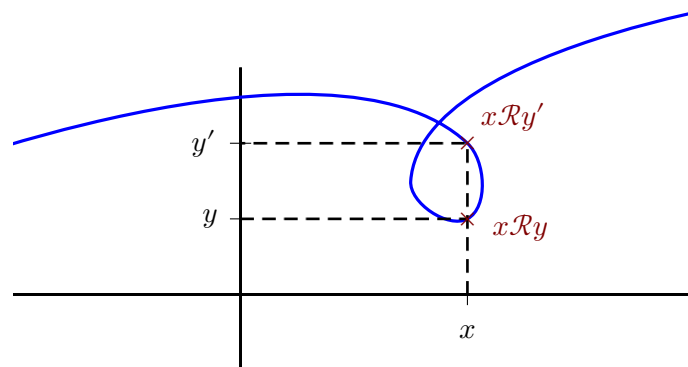


Figure IV.1 – Graphe d’une relation qui n’est pas une fonction car $x\mathcal{R}y = x\mathcal{R}y'$ mais $y \neq y'$.

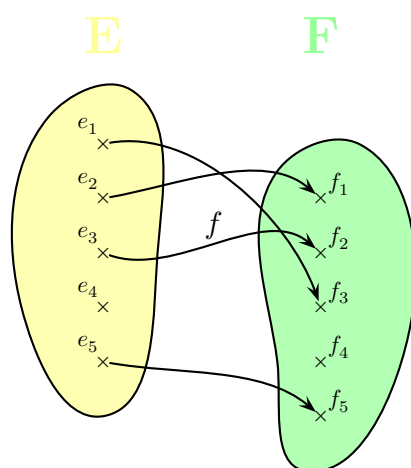
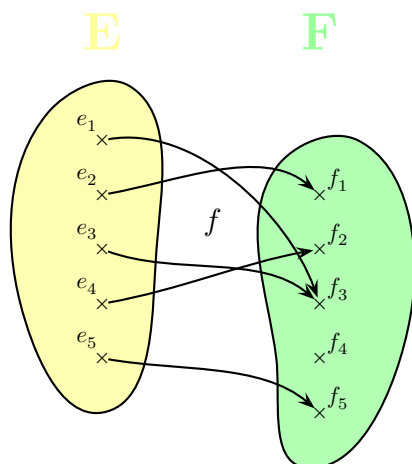


Figure IV.2 – Diagramme sagittal d’une fonction qui n’est pas une application.

Remarque importante : On réserve le nom de « fonction » à une application définie sur une partie non précisée d’un ensemble donné, autrement dit à une application dont l’ensemble de définition n’est pas nécessairement égal à l’ensemble de départ.

Plus généralement une fonction associe à tout antécédent **au plus** une image, tandis qu’une application associe à tout antécédent **exactement** une image.

Dans la suite et comme demandé dans le programme, nous ne ferons plus la différence entre ces deux termes. Celui de « fonction » nous permettant, par exemple, de chercher le domaine de définition de la fonction $\frac{1}{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. En d’autres termes, définir l’application $\frac{1}{x} : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$.



$$\mathcal{G}_f = \{(e_1; f_3); (e_2; f_1); (e_3; f_2); (e_4; f_3); (e_5; f_5)\}$$

Sur cet exemple, tout élément de l'ensemble de départ a une image unique.

On dit alors que l'application f est « bien définie ».

Figure IV.3 – Diagramme sagittal d'une application.

Définir une application nécessite donc la donnée de E , de F et du graphe $\mathcal{G}$, ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément $f(x)$ pour tout $x \in E$.

Pour désigner une application on utilise en général une lettre minuscule. Si f est une application de E vers F on écrit plus simplement :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

et le graphe de f est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \{(x; f(x)) \mid x \in E\}$.

Vocabulaire :

- Si $E = \mathbb{R}$, on parle de fonction de la variable réelle ou, plus simplement, de fonction réelle.
- Si $F \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parlera de fonction à *valeurs* réelles ou complexes réciproquement.

Exemples 6 :

- L'exponentielle est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
- Le logarithme est une application de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une application car 0 n'a pas d'image. Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

En conséquence, l'application $\left(\frac{1}{x}\right)_{|_{\mathcal{D}_f}} : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ est correctement définie.

- Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Le schéma :

$$\begin{aligned} 1 : E &\longrightarrow \{0; 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

n'est celui d'une fonction sur E que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 6 (Domaine de définition) : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}$.

On appelle *domaine de définition* de f , noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe}\}.$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f ,
- x est un antécédent de y par f (pas forcément unique).

Toute étude de fonction f DEVRA donc commencer par préciser son domaine de définition.

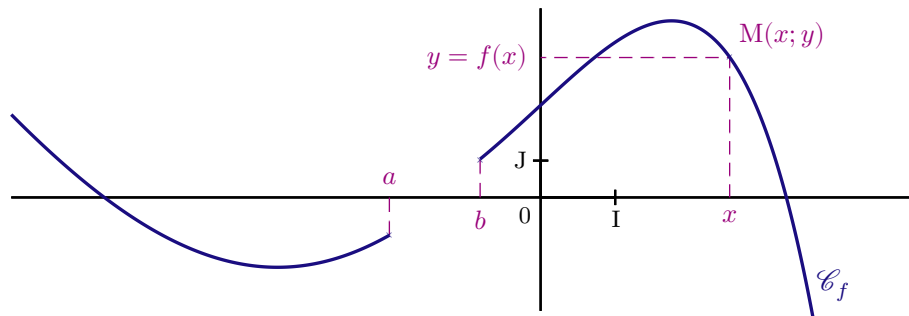


Figure IV.4 – $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$.

Méthode 1 :

Quand seul le procédé d'association $x \mapsto f(x)$ est donné, chercher l'ensemble de définition de f c'est déterminer le plus grand ensemble (au sens de l'inclusion) des éléments x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$f_3 : x \mapsto \ln |\ln x|$$

Méthode 2 (Trouver un ensemble de définition) :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

1. Les expressions de la forme $\frac{\dots}{\text{orange box}}$: Il suffira de s'assurer que $\text{orange box} \neq 0$. Une équation à résoudre ...
2. Les expressions de la forme $\sqrt{\text{orange box}}$ ou $\ln(\text{green box})$: Il suffira de s'assurer que $\text{orange box} \geq 0$ ou $\text{green box} > 0$. Une étude de signes à faire ...

II.2 Zoologie

Définition 7 (Identité d'un ensemble) : Soit E un ensemble.

L'*identité* de E est l'application de E dans E qui à chaque élément de E associe lui-même. On la note :

$$\begin{aligned} id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto id_E(x) = x \end{aligned} .$$

Exemples 7 (Important) :

- La fonction nulle sur un ensemble E est définie par $0_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto 0$$
- Soit $E \subset F$. L'injection canonique $i : E \hookrightarrow F$ définie par $\forall x \in E, i(x) = x \in F$.
- La projection canonique $p_E : E \times F \longrightarrow E$ définie par $p_E((x; y)) = x$.

Égalité de fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ E ,
- le même ensemble d'arrivée F ,
- le même graphe *i.e.* $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et la fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$ ne sont pas égales !

ATTENTION

Définition 8 (Coïncidence) : Soient $f : E \longmapsto F$ et $g : E' \longmapsto F'$ deux applications.

On dit que f et g *coïncident* sur une partie A de $E \cap E'$ si $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Exemple 8 : $f : x \longmapsto \ln(x^2)$ et $g : x \longmapsto 2 \ln(x)$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ sans être égales.

Définition 9 (Restriction) : Soient $f : E \longmapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Si $A \subset E$, on appelle *restriction* de f à A , notée $f|_A$, l'application définie par :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Une fonction f et sa restriction $f|_A$ à une partie A coïncident donc sur A .

Exemple 9 : La valeur absolue $|| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est la restriction à $\mathbb{R}$ du module $|| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}_+$.

Définition 10 (Prolongement) : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Si $E \subset E'$, on appelle *prolongement* de f à E' , notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : E' \mapsto F$ qui coïncide avec f sur E .

La fonction f est alors une restriction de $\tilde{f}$ sur E .

Exemples 10 :

- $x \mapsto \ln |x|$ est un prolongement de $\ln$ à $\mathbb{R}^*$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on peut prolonger $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ à $\mathbb{R}$ en posant :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarques :

- Restreindre (resp. prolonger) une application c'est diminuer (resp. augmenter) son ensemble de définition.
- Il existe une seule façon de restreindre une fonction, mais plusieurs de la prolonger.

Définition 11 (Corestriction) : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F . Si B est une partie de F telle que $f(E) \subset B$, on appelle *corestriction* de f à B , notée $f|B$, l'application définies par :

$$\begin{aligned} f|B : E &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application $f : I \mapsto J$ à son image $f(I)$ et de considérer $\tilde{f} : I \mapsto f(I)$.

Remarque : Si la restriction d'une application est toujours possible, ce n'est pas le cas de la corestriction à une partie B de F qui nécessite que $f(E) \subset B$. C'est d'ailleurs pour cela que cette notion est en marge du programme de PTSI. Elle n'est citée ici que pour compléter les notions précédentes.

Exemple 11 : Soit $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut définir $\chi^{[-2, +\infty[}$ et $\chi^{[0, +\infty[}$, mais pas $\chi^{[1, 2]}$.

$$x \longmapsto x^2$$

Définition 12 (Fonction indicatrice) : Soit A une partie d'un ensemble E .

On appelle fonction indicatrice de A , notée $\mathbb{1}_A$, l'application de E dans $\{0; 1\}$ définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0; 1\} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}\end{aligned}$$

II.3 Opérations algébriques

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) : Soient E et F deux ensembles, f et g deux fonctions définies sur E à valeurs dans F .

— On appelle fonction *somme* de f et g , notée $f + g$, la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

— On appelle fonction *produit* de f et g , notée $f \times g$ ou fg , la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

— Si g ne s'annule pas sur E , on appelle fonction *quotient* de f et g , notée $\frac{f}{g}$, la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction λf par :

$$\forall x \in E, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des fonctions de E dans F récupère alors, par l'intermédiaire des ces définitions, les propriétés de l'ensemble d'arrivée F .

Par exemple, si F est une partie de $\mathbb{R}$, la somme et le produit de deux fonctions sont associatifs, commutatifs et le produit est distributif sur l'addition.

II.4 Composition

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application coïncide avec l'ensemble de départ d'une autre application ^[3], alors il est possible « d'enchaîner » les deux, c'est la composition :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad} & F & \xrightarrow{\quad} & G \\ x & & f(x) & & g(f(x)) \end{array}$$

[3]. ou, du moins, l'image de l'une est incluse dans l'ensemble de départ de l'autre

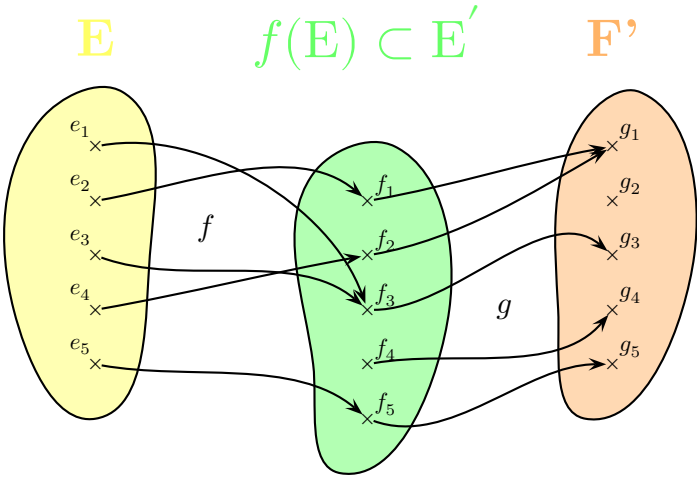
Définition 14 (Composée de fonctions) : Soient E, F, E' et G' des ensembles et $f : E \mapsto F, g : F \mapsto G'$ deux applications telles que $f(E) \subset G'$.

La composée de f par g , notée $g \circ f$, est l'application de E sur G' définie par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G' \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

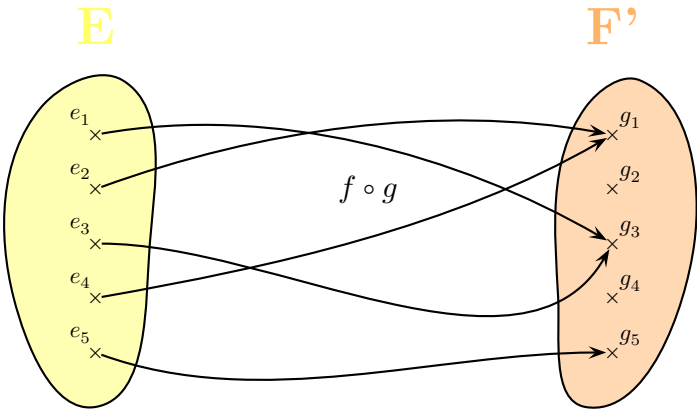
ATTENTION

La condition $f(E) \subset G'$ ou encore « f est à valeurs dans G' » est particulièrement importante.
On doit garantir que $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g pour tout x de E .



$$f(E) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subset F \text{ et } g(F) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \subset F'$$

Figure IV.5 – Diagramme sagittal d'une composée



$$(f \circ g)(E) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \subset g(F) \subset F'.$$

Figure IV.6 – Diagramme sagittal d'une composée

Remarque : Lorsque l'on a deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : H \mapsto G$ avec seulement $F \subset H$ (au lieu de $F = H$) la définition n'autorise théoriquement pas la construction de $g \circ f$.

Néanmoins si $f(E) \subset H$, on peut considérer la composée $g|_{f(E)} \circ f|^{f(E)}$ que l'on écrira encore, par abus de langage et soucis de simplicité, $g \circ f$.

Exemple 12 : L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est $]0; 2[$.

Lorsque f est une application d'un ensemble E vers lui-même, alors on peut composer f avec elle-même, et autant de fois que l'on veut et on notera

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Par convention, on pose $f^0 = id_E$.

Exemple 13 : Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \text{ stable par } f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

En particulier, $u_{n+1} = f^{n+1}(u_0)$.

ATTENTION

Sauf cas particulier, $f \circ g \neq g \circ f$. La composition n'est pas une opération commutative.

L'existence de $g \circ f$ ne garantit pas celle de $f \circ g$.

Comparez, par exemple, les domaines de définitions de $x \mapsto \ln|x|$ et $x \mapsto |\ln(x)|$.

Théorème 3 :

Soient $f : E \mapsto F$, $g : F \mapsto G$ et $h : G \mapsto H$ trois applications.

- $id_F \circ f = f$ et $f \circ id_E = f$. On dit que l'identité est élément *neutre* pour la composition.
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. La composition est associative.

Exercice 5 : Déterminer, si possible, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leur domaine de définition.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x - 1$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$ $x \mapsto x^2 - 1$

III/ Aspects qualitatifs

III.1 Graphe d'une fonction

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe correspond au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des éléments $(x; f(x))$, pour $x \in \mathcal{D}_f$.

Le graphe permet d'avoir une idée générale de la fonction étudiée. Un graphe précis (par approximations et interpolation à partir d'un grand nombre de points, obtenus par exemple par des expériences) permet d'obtenir facilement une première approximation de solutions de certaines équations ou inéquations en physique, par exemple.

Certaines opérations simples sur les fonctions se traduisent facilement sur le graphe, comme la composition à la source ou à l'arrivée par $x \mapsto ax$ ou $x \mapsto x - a$.

On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé direct.

Définition 15 (Graphe d'une fonction) : Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs réelles.

On appelle *courbe représentative* de f ou *graphe* de f , et on note $\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{G}$, l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{C}_f = \left\{ (x; y) / (x \in \mathcal{D}_f) \wedge (y = f(x)) \right\}.$$

Remarque : On ne peut pas toujours tracer la représentation d'une fonction. Par exemple, la courbe de $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ produit des oscillations non représentables au voisinage de 0.

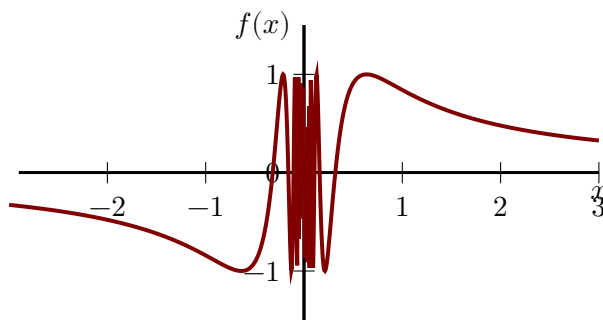


Figure IV.7 – La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas représentable au voisinage de 0.

III.2 De l'intérêt des fonctions de référence

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- $x \mapsto f(x - a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{i}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \frac{a}{2}$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$. [4]
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a .

Cette proposition donne tout son intérêt aux fonctions, dites de référence :

- $x \mapsto x$
- $x \mapsto x^3$
- $x \mapsto \ln x$
- $x \mapsto \cos x$
- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$
- $x \mapsto \sin x$
- $x \mapsto e^x$

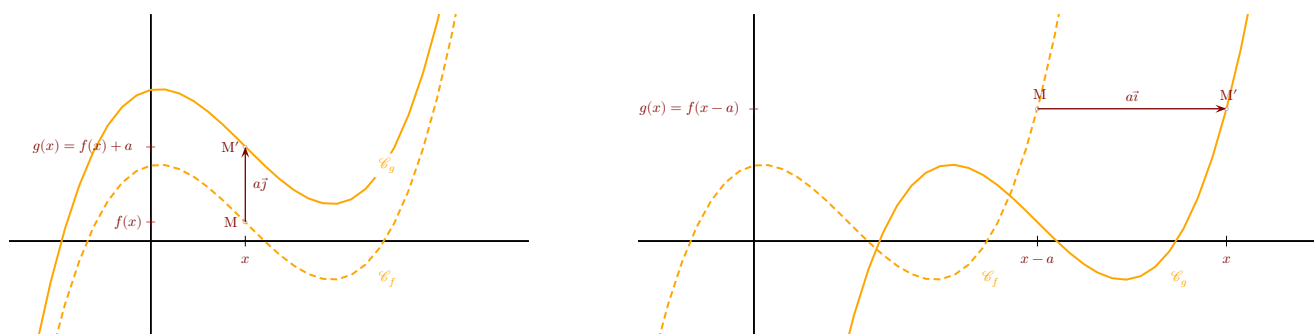


Figure IV.8 - $x \mapsto g(x) = f(x) + a$ et $x \mapsto g(x) = f(x - a)$.

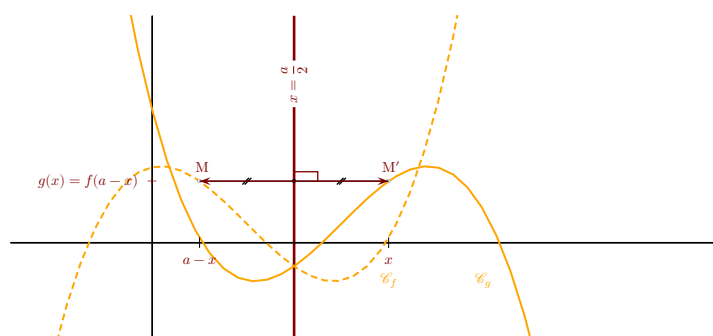


Figure IV.9 - $x \mapsto g(x) = f(a - x)$.

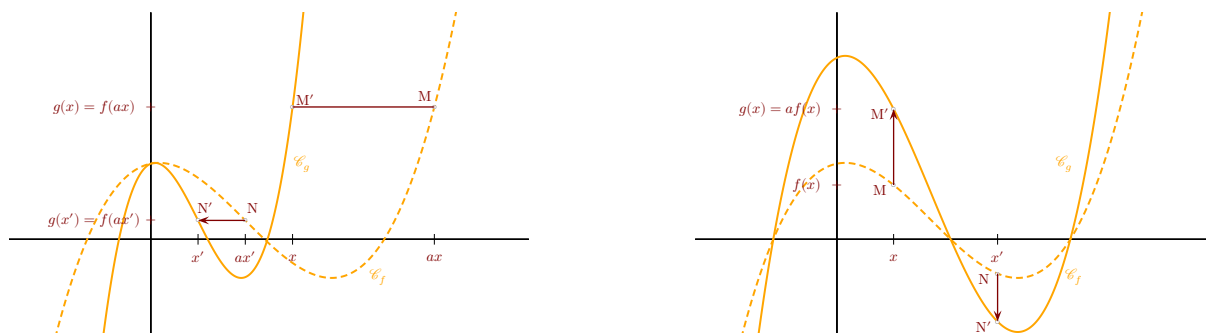


Figure IV.10 - $x \mapsto g(x) = f(ax)$ et $x \mapsto g(x) = af(x)$.

[4]. $a \neq 0$ bien sûr !

III.3 Parité, imparité et symétrie

Définition 16 :

- Une fonction f est *paire* lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x).$$

- Une fonction f est *impaire* lorsque son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x).$$

Le graphe d'une fonction continue et impaire passe toujours par l'origine.

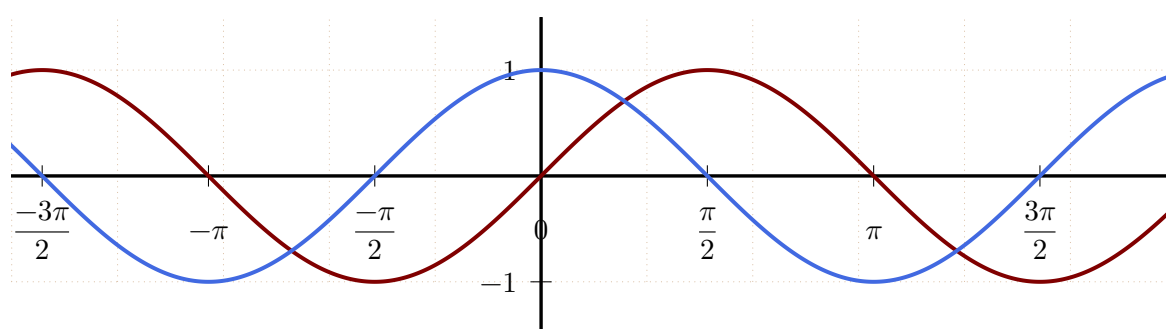


Figure IV.11 – $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont respectivement paires et impaires.

Exemples 14 :

- Les fonctions $x \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $| \cdot |$, $\cos$, ch sont paires.
- Les fonctions $x \mapsto x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin$, sh et $\tan$ sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires : $x \mapsto e^x$.
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Pour mémoire :

Rappel 1 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Il existe une unique fonction f_p paire et une unique fonction f_i impaire telles que :

$$f = f_p + f_i.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

f_p et f_i s'appellent respectivement les *partie paire* et *partie impaire* de f .

Proposition 5 (Interprétation graphique) :

- Une fonction f est paire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— Une fonction f est impaire si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

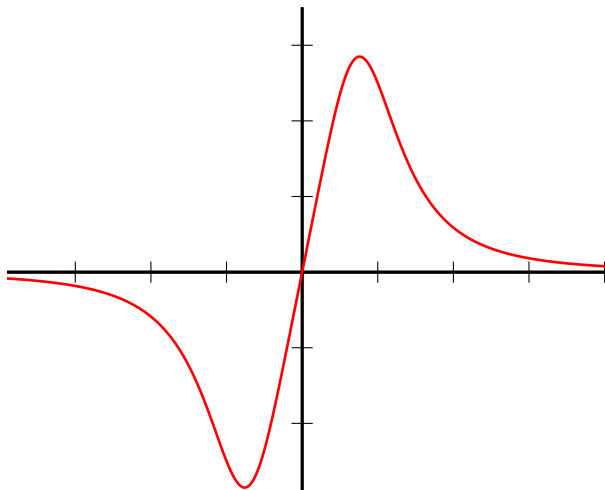


Figure IV.12 – $x \mapsto \frac{5x}{x^4 + 1}$ est impaire.

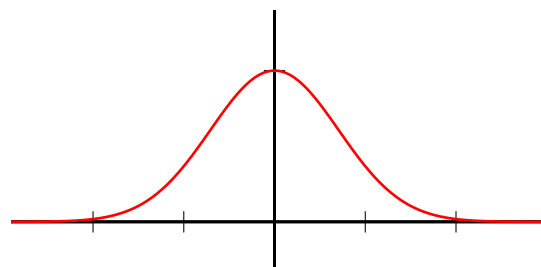


Figure IV.13 – $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire.

Preuve : Montrons, par exemple, le premier point. Le second se démontre de manière analogue.

Supposons f paire et notons $\mathcal{G}$ son graphe.

Si $M(x; y) \in \mathcal{G}$ alors $y = f(x)$. Le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x; y) = (-x; f(x)) = (-x; f(-x)) \in \mathcal{G}$.

Donc $\mathcal{G}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{G}$ soit symétrique par rapport à (Oy) .

D'une part $\mathcal{D}_f$ est alors nécessairement symétrique par rapport à 0.

De plus si $(x; y) \in \mathcal{G}$ alors $(-x; y) \in \mathcal{G}$ i.e. $y = f(-x) = f(x)$ et f est paire.

Méthode 3 (Restriction du domaine d'étude) :

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on restreint son étude au domaine $\mathcal{D}_f \cap [0; +\infty[$ et on complète la courbe par symétrie.

IV/ Fonctions et relation d'ordre

IV.1 Fonctions monotones

Définition 17 (Fonctions monotones) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

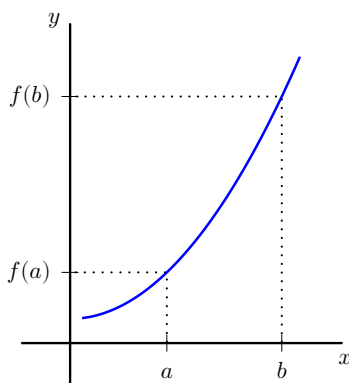
— La fonction f est *croissante* (*resp.* strictement croissante) sur I si :

$$\forall (x; y) \in I^2, x < y \implies f(x) \leq f(y) \text{ (resp. } f(x) < f(y)).$$

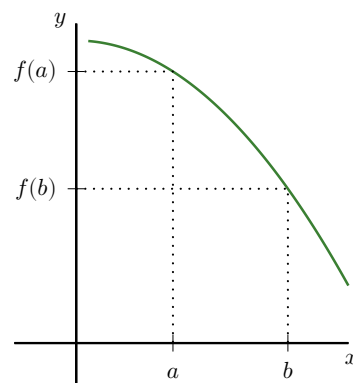
— La fonction f est *décroissante* (*resp.* strictement décroissante) sur I si :

$$\forall (x; y) \in I^2, x < y \implies f(x) \geq f(y) \text{ (resp. } f(x) > f(y)).$$

— La fonction f est *monotone* sur I (*resp.* strictement monotone) sur I si f est soit croissante (*resp.* strictement croissante), soit décroissante (*resp.* strictement décroissante) sur I .

Fonction croissante sur I

$$a < b \implies f(a) \leq f(b)$$

Fonction décroissante sur I

$$a < b \implies f(a) \geq f(b)$$

Figure IV.14 – Une fonction croissante conserve les inégalités, une décroissante les renverse.

Remarque : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions compatibles avec la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

La **définition (17)** est générale et ne requiert pas la dérivabilité.

Exemples 15 :

1. La fonction $\cos$ est :

- décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi; (2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
- croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi; (2k+2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
- mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont strictement croissantes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est croissante sur $[1; +\infty[$.
2. f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

Remarque : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général!

Par exemple $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ mais pas $x \mapsto x^2 - x$ [5].

Exemple 16 : Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction $x \mapsto x + \ln x$, somme de fonctions strictement croissantes, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pas plus que pour la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$, composée de fonctions croissantes ou encore $x \mapsto \sqrt{x}e^x$, produit de fonctions **positives** croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

1. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \exp(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) - 1}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

IV.2 Fonctions majorées, minorées, bornées, ...

Définition 18 (Fonction bornées) : Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).

— Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

— Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les minorants et majorants ne sont pas forcément atteints même lorsqu'ils existent (confer l'exemple (17)).

[5]. Pas plus que $x \mapsto x^2 - x$ est décroissante!

Exercice 8 : Soit $f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$. Montrer que f est majorée.

Proposition 7 :

Une fonction f est bornée si, et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

Preuve : Supposons f bornée. Alors $|f|$ est majorée par $\max \left(\left| \min_{x \in I} f(x) \right| ; \left| \max_{x \in I} f(x) \right| \right)$

Réciproquement si $|f|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors $\forall x \in I, -M \leq f(x) \leq M$ et f est bornée.

Exemple 17 : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, y est bornée. Majorée par 1 (atteint) et minorée par 0 (non atteint).

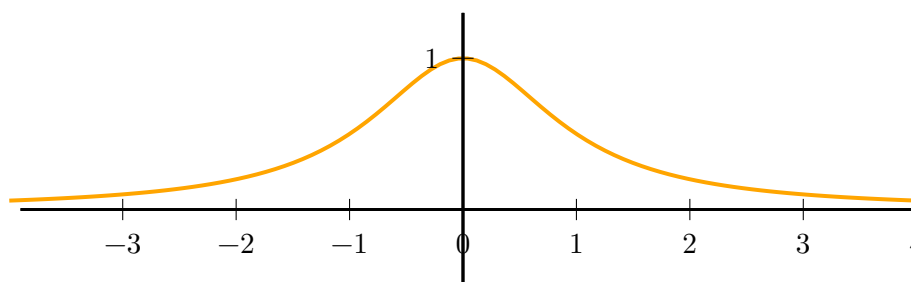


Figure IV.15 – Courbe représentative d'une fonction bornée.

IV.3 Extrema

Définition 19 (Extrema globaux et locaux) : Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

— La fonction f admet un *maximum global* (resp. *minimum global*) en x_0 si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

On note alors $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$).

— La fonction f admet un *maximum local* (resp. *minimum local*) en x_0 s'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant x_0 tel que :

$$\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

On note alors $f(x_0) = \max_{x \in J} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min_{x \in J} f(x)$).

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x \in J} f(x) \leq \max_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x \in J} f(x) \geq \min_{x \in I} f(x).$$

Remarque : Une fonction non bornée ne peut clairement pas avoir d'extrema globaux mais seulement des extrema locaux.

Exemple 18 : Reprenons la fonction de exemple (17) définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- f admet un maximum global en $x_0 = 0$ qui est 1.
- f est minorée par 0 sans avoir de minimum global.

Preuve : Montrons le par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x_0) \leq f(x)$.

Par symétrie, on peut supposer $x_0 \in \mathbb{R}_+$ où f y est strictement décroissante.

La stricte décroissance de f entraîne alors que tout x réel tel que $x_0 < x$ vérifie $f(x) < f(x_0)$, ce qui contredit la définition de x_0 .

La fonction f ne peut donc admettre de minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x$ admet un maximum local en -1 .

Correction : On a $g(-1) = 2$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - g(-1) = x^3 - 3x - 2$

$$= (x+1)^2(x-2).$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{J} =]-\infty; 2], g(x) \geq g(-1)$.

V/ Dérivation

V.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable en a* si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a, x \neq a$.

Dans ce cas, on appelle cette limite *nombre dérivé* de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout $a \in I$ au sens précédent.

On appelle alors *fonction dérivée* de f sur A , que l'on note f' (ou $\frac{df}{dx}$), la fonction qui à tout x de A associe le nombre dérivé de f en x :

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

— On note $\mathcal{D}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par définition du nombre dérivé, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est définie comme la droite d'équation

$$(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

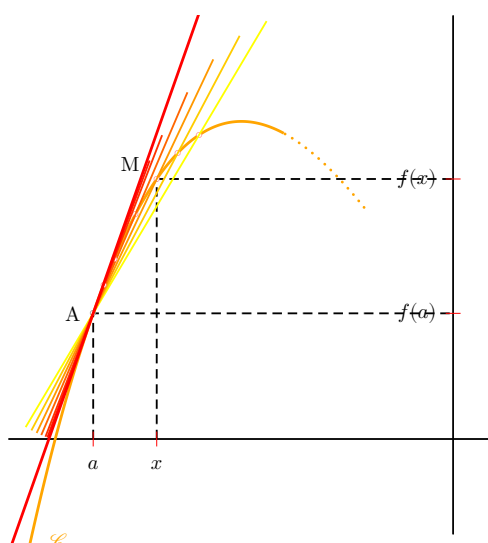


Figure IV.16 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Remarques : La dérivation est une notion :

- locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a .
- locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage de a quel qu'il soit et non de sa description globale.

V.2 Opérations algébriques et dérivation

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

(i) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

(ii) Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) L'inverse d'une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

(iv) Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont le dénominateur ne s'annule pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

V.3 Composition et dérivation

Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Preuve : Admise pour l'instant.

Rappel 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions du tableau.

Fonction f	Dérivée f'	Conditions sur u
$x \mapsto u(ax + b)$	$au'(ax + b)$	$ax + b \in I$.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$.
$u^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu' \times u^{n-1}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n < 0$.
e^u	$u' e^u$	
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$.
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\forall x \in I, u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.
$f(u)$	$u' \times f'(u)$	$u(I) \subset J$.

Exercice 10 : Étudier la dérivabilité et donner sa dérivée le cas échéant de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x(1-x)}).$$

V.4 Monotonie et dérivation

Théorème 10 :

Soient I un (seul) intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est croissante sur I si, et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si, et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si, et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Pour la stricte monotonie :

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset I$ avec $a < b$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si f' est négative sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset I$ avec $a < b$.

Méthode 4 :

Les cas d'utilisation les plus courants sont :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors f est strictement décroissante sur I .

ATTENTION

Il est fondamental de raisonner sur un intervalle donné !

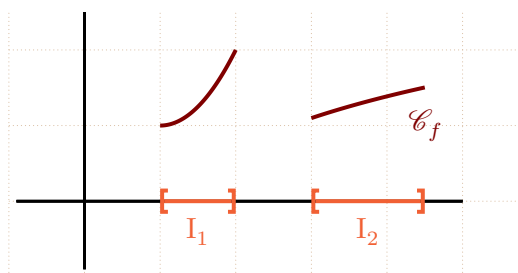


Figure IV.17 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geq 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$.

ATTENTION

f strictement croissante sur I n'implique pas que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

Contre-exemple : la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

VI/ Continuité

VI.1 Fonction continue

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est *continue en a* si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est *continue sur I* si elle est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ leur ensemble.

Graphiquement, la courbe d'une fonction continue peut se tracer sans lever le crayon.

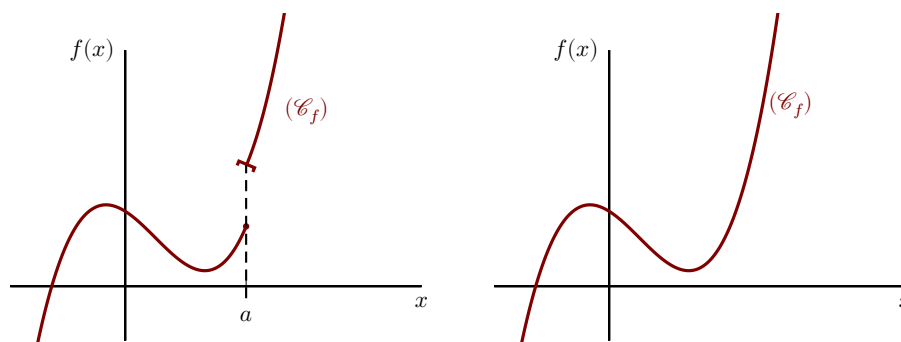


Figure IV.18 – Exemples de fonctions définies continues et discontinues en un point a .

VI.2 Opérations algébriques et continuité

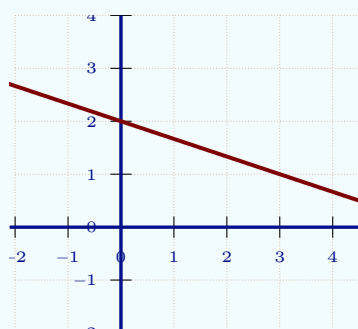
Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I .

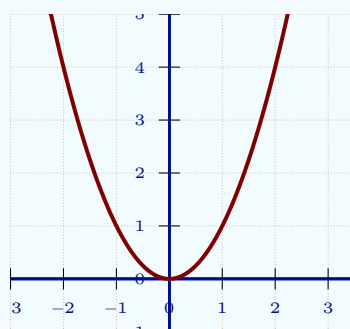
- (i) $|f|$ est continue sur I .
- (ii) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur I est continue sur I .
- (iii) Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur I est continue sur I .
- (iv) Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- (v) Si $f(I) \subset J$ et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exemples 19 :

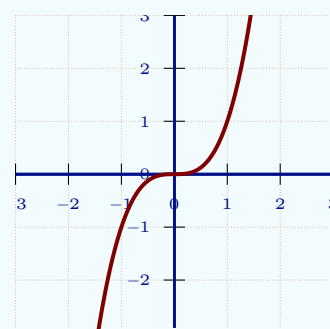
— les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



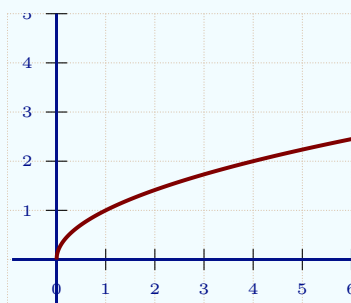
$$x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2.$$



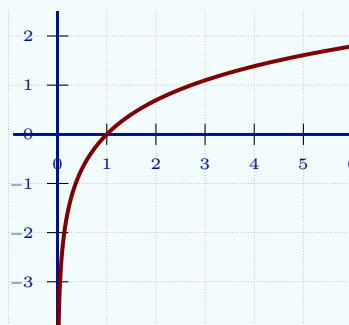
$$x \mapsto x^2.$$



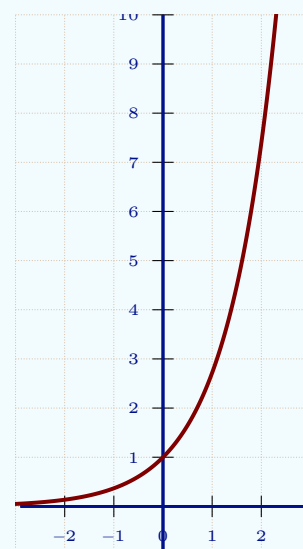
$$x \mapsto x^3.$$



$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

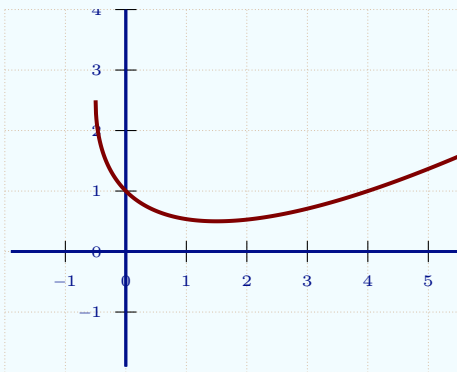


$$x \mapsto \ln x$$

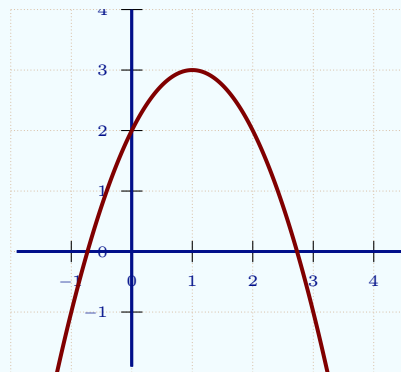


$$x \mapsto e^x.$$

— les fonctions construites à partir des fonctions de référence par combinaisons linéaires, produits ou composition sont continues sur leurs ensembles de définition ;

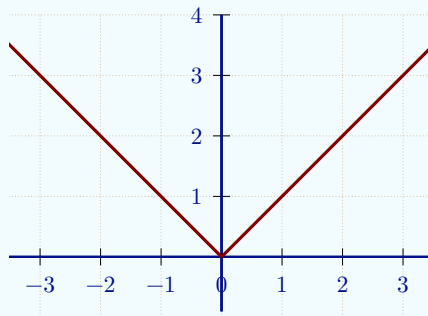


$$x \mapsto x - \sqrt{2x+1} + 3 \text{ sur } \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$



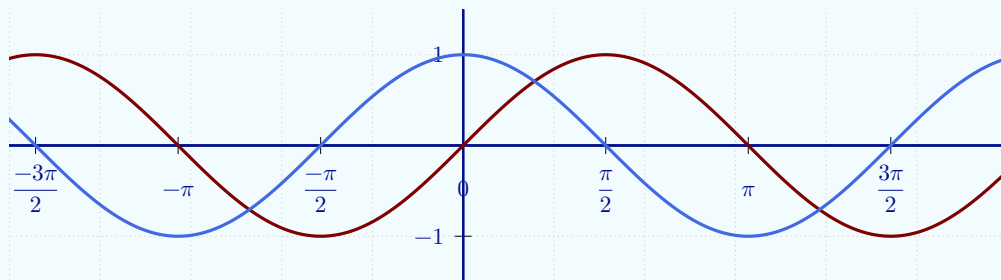
$$x \mapsto -(x+1)(x-3) - 1.$$

— la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.



$$x \mapsto |x|.$$

— Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.



$$x \mapsto \cos x \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin x.$$

Théorème 12 (Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité) :

- Toute fonction dérivable en un point a est continue en ce point.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

ATTENTION

Les réciproques sont fausses !

Contre-exemples : valeur absolue, racine carrée en 0.

VI.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 13 (TVI) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$.

1. Si f change de signe sur I alors elle s'y annule :

$$\text{Pour tous réels } a < b \text{ de } I, \quad f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists c \in [a; b] / f(c) = 0.$$

ou

2. $f(I)$ est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de f admet au moins un antécédent par f .

$$\forall f(a), f(b) \in f(I), \quad f(a) < k < f(b) \implies \exists c \in [a; b] / f(c) = k.$$

ou $f(b) < k < f(a)$

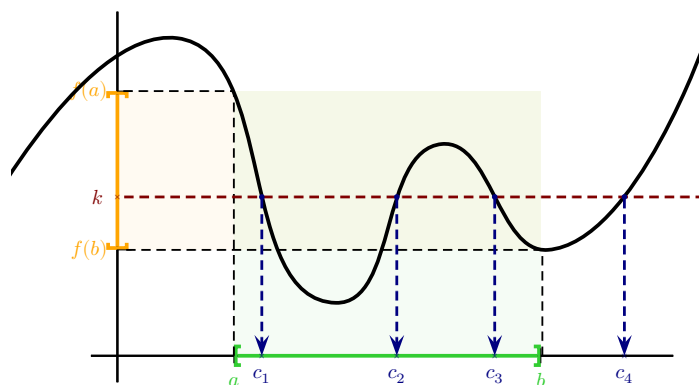


Figure IV.19 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

Le théorème n'affirme pas que l'image de l'intervalle $[a; b]$ par f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.

ATTENTION

Contre-Exemple 20 : Soit $f : x \mapsto \sin(x)$.

Alors, $f([0; \pi]) = [0; 1] \neq [f(0); f(\pi)] = \{0\}$.

Théorème 14 (TVI strictement monotone) :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels de I .

Si f continue et strictement monotone, alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f qui est dans $[a; b]$:

$$\exists ! x \in [a; b] / y = f(x).$$

Exercice 11 : Montrer que $0,8$ admet un unique antécédent par la fonction $\cos$ dans l'intervalle $[0; \pi]$.

VII/ Injection, Surjection et Bijection

Dans cette partie nous allons revenir sur des notions définies au chapitre précédent et mettre en lumière les propriétés de telles applications. Ces notions joueront un rôle (très) important par la suite.

VII.1 Injection

Théorème 15 :

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

ATTENTION

Dans la deuxième assertion du théorème (15), la fonction g n'est en rien obligée d'être injective !

Preuve :

1. Soient $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.

Par définition de la composée, on a alors $g(f(x)) = g(f(y))$ qui entraîne $f(x) = f(y)$ par injectivité de g puis $x = y$ par celle de f .

Donc $x = y$ et $(g \circ f)$ est injective.

2. Réciproquement, soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.

Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ en composant (à gauche) par g puis $x = y$ par injectivité de $(g \circ f)$ d'où l'injectivité de f .

Exercice 12 : Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et g n'est pas injective.

Correction : Considérer $x \mapsto (e^x)^2$.

Exercice 13 (Important) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

Montrer que f est injective si, et seulement si il existe $h : F \mapsto E$ telle que $h \circ f = id_E$.

Correction : Si h existe alors, on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f est injective. Il nous faut construire la fonction h :

Soit $y \in F$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f dans E si y a un antécédent (on sait alors qu'il est unique par injectivité de f) et si y n'a pas d'antécédent par f on choisit ce qu'on veut pour $h(y)$ dans E .

Chaque élément de F ayant une image unique, la fonction h est donc bien définie.

On vérifie alors que pour tout $x \in F$, $h(f(x)) = x$ car x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f .

VII.2 Surjection

Théorème 16 :

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection.

On fera la même remarque sur la surjectivité de f dans la seconde assertion du **théorème (12)** que dans celle du **théorème (15)**.

Preuve :

1. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g sur G , il existe $y_z \in F$ tel que $z = g(y)$.

Par surjectivité de f sur F , il existe aussi $x_y \in E$ tel que $y = f(x)$.

Par définition de $(g \circ f)$, on a donc trouvé $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ i.e. $(g \circ f)$ est surjective sur G .

2. Réciproquement soit $z \in G$.

Par surjectivité de $(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ i.e. $f(x) \in F$ tel que $g(f(x)) = z$ donc g est surjective sur G .

Exercice 14 : Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et f n'est pas surjective.

Correction : Considérer $x \mapsto \ln(e^x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (Important) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

Montrer que f est surjective si, et seulement si il existe $h : F \mapsto E$ telle que $f \circ h = id_F$.

Correction : Si h existe alors on sait que f est surjective.

Réciproquement, si f est surjective, on construit h de même qu'à l' [exercice \(13\)](#) : soit $y \in F$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f que l'on peut choisir car il en existe par la surjectivité de f .

On vérifie alors que pour tout $y \in F$, $(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y$ car $h(y)$ est un antécédent de x par f .

VII.3 Bijection

Définition 22 : Soient E, F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une *bijection* (ou application bijective) lorsque tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x).$$

Dire que tout élément de F a un unique antécédent revient à dire que tout élément de F a au moins un antécédent et au plus un antécédent.

Par conséquent dire que f est bijective revient à dire que f est surjective et injective.

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective et surjective.}$$

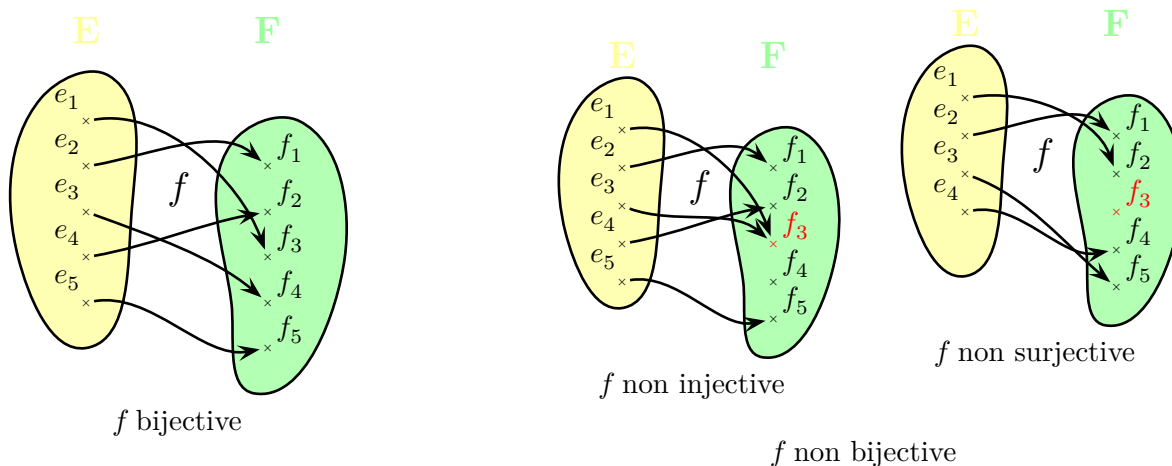


Figure IV.20 – Diagramme sagittal d'une fonction bijective.

Vocabulaire : Deux ensembles reliés par une bijection sont dit *équipotents*.

Exemples 21 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_E est une bijection.
- $f : [0; +\infty[\mapsto [0; +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \mapsto]0; +\infty[$ et $\ln :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^x$ n'est pas une bijection.

— Si $f : E \mapsto F$ est injective, alors f induit une bijection de E vers $im f$ qui est $\tilde{f} : E \mapsto im f$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle I .

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones affirme que toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur son image $f(I)$:

$$\forall y \in f(I), \exists ! x \in I / y = f(x).$$

Il dit, en fait, un peu plus que ça ...

Théorème 17 (Théorème de la bijection) :

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$.

Si f est continue^[6] et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(I)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\longrightarrow f(I) \text{ est bijective.} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

De plus, $f(I)$ est un **intervalle** d'un des types suivants :

	I	$[a; b]$	$[a; b[$	$]a; b]$	$]a; b[$
$f(I)$	f croissante	$[f(a); f(b)]$	$[f(a); \lim_{b^-} f[$	$] \lim_{a^+} f; f(b)]$	$] \lim_{a^+} f; \lim_{b^-} f[$
	f décroissante	$[f(b); f(a)]$	$] \lim_{b^-} f; f(a)]$	$[f(b); \lim_{a^+} f[$	$] \lim_{b^-} f; \lim_{a^+} f[$

ATTENTION

Il existe des bijections non continues.

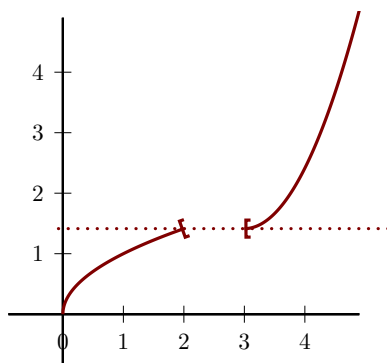


Figure IV.21 – Fonction bijective sur son ensemble de définition, non continue.

Remarques :

[6]. et donc définie sur I .

- Ne pas confondre f et $\tilde{f}$ ($\tilde{f}$ étant appelé corestriction de f à son ensemble image).

Ces deux fonctions sont définies sur I mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée. $\tilde{f}$ est bijective alors que f ne l'est pas forcément (sauf si $f(I) = \mathbb{R}$).

- Bien comprendre la nuance : dire que la fonction f établit une bijection de I sur son ensemble image $f(I)$ ne signifie pas que f est bijective mais que $\tilde{f}$, la corestriction de f à son ensemble image, l'est.

Exemples 22 :

- $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sin$ induit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.

VIII/ Réciproque

VIII.1 Bijection réciproque

Définition 23 : Si $f : E \mapsto F$ est une bijection, alors on peut considérer l'application qui va de F vers E et qui à tout élément x de F associe son unique antécédent par f , cette application est appelée *bijection réciproque* de f , on la note f^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y \text{ défini par } f(y) = x. \end{aligned}$$

ATTENTION | La notation f^{-1} n'a de sens que lorsque f est bijective.

Exemples 23 :

- Si E est un ensemble non vide, alors id_E est une bijection et la bijection réciproque est $\text{id}_E^{-1} = \text{id}_E$.
- $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$ dont la bijection réciproque est la fonction logarithme népérien.

Exemple 24 (Fondamental) : La fonction carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car, par exemple, $1^2 = (-1)^2 = 1$.

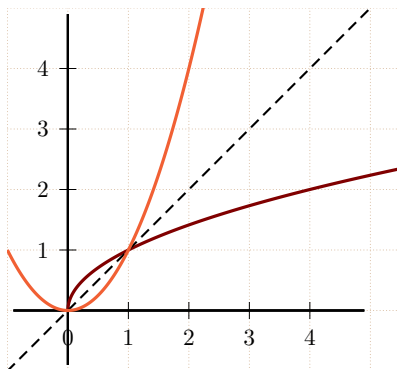
Cependant, considérons sa restriction f sur $\mathbb{R}_+$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de la bijection affirme alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ qui est la fonction racine carrée :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Figure IV.22 – $x \mapsto x^2$ et sa réciproque $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.**Théorème 18 :**

Soit $f : E \mapsto F$ une bijection.

— On a $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.

De plus f^{-1} est une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.

— Si $g : F \mapsto G$ est une autre bijection, alors la composée $g \circ f$ est une bijection de E vers G , et sa bijection réciproque est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

aux ensembles de départ et d'arrivée dans la première assertion du théorème.

ATTENTION

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \quad \text{MAIS} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln x} = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x.$$

Preuve : Soit $f : E \mapsto F$ une bijection.

— La composée $f^{-1} \circ f$ existe et est définie de E dans E .

De plus, tout x de E est l'unique antécédent de $f(x)$ par f par définition donc

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i.e.} \quad f^{-1} \circ f = id_E.$$

De même $f \circ f^{-1}$ existe et va de F dans F et on a $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ car $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f d'après la **définition (23)** de f^{-1} .

D'où $f \circ f^{-1} = id_F$.

— Soient $g : F \mapsto G$ une autre bijection et $y \in G$.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, (g \circ f)(x) = y &\iff g(f(x)) = y \iff f(x) = g^{-1}(y) \\ &\iff x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y). \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarques : Dans une structure algébrique, l'inversibilité d'un élément a se traduit par l'existence de b tel que $ab = ba = 1$ (ou 1 est le neutre multiplicatif de la structure).

Si on a seulement l'existence de b tel que $ab = 1$, on parle d'inversibilité à droite de a , et de même, d'inversibilité à gauche si $ba = 1$.

Pour une fonction $f : E \mapsto F$, l'exercice (13) et l'exercice (15) montrent que les propriétés d'injectivité, surjectivité et bijectivité peuvent être vues comme des propriétés dans $\mathcal{F}(E; F)$ d'inversibilité à gauche, droite et bilatéral respectivement :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) / g \circ f = id_E \iff f \text{ est inversible à gauche dans } F^E. \\ f \text{ est surjective} &\iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E) / f \circ g = id_F \iff f \text{ est inversible à droite dans } F^E. \\ \text{et si } E = F, \\ f \text{ est bijective} &\iff \exists g \in \mathcal{F}(E, E) / f \circ g = g \circ f = id_E \iff f \text{ est inversible dans } E^E. \end{aligned}$$

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$.

— On dit que f est une *involution* si $f \circ f = id_E$.

Dans ce cas f est bijective et est sa propre réciproque : $f^{-1} = f$.

Exemples 25 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

— On dit que f est *idem-potente* si $f \circ f = f$.

Exemples 26 :

- Dans le plan, toute projection est idem-potente.
- L'identité, la valeur absolue (le module dans $\mathbb{C}$) ou la partie entière, vérifient cette propriété.

Exercice 16 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{aligned} 1. f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & 2. g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) &\longmapsto (x + y; x - y) & (x; y) &\longmapsto (x + y; xy) \end{aligned}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Pour montrer que f est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 5 (Montrer qu'une fonction est bijective) :

On montre que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que f est continue sur I et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective.

Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f .

Exercice 17 : Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 0]$.

Méthode 6 (Montrer qu'une fonction est bijective) :

Pour tout $y \in F$, on montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) possède une unique solution qui est, par définition, $x = f^{-1}(y)$.

Cette méthode, en général plus compliquée que la précédente, permet néanmoins d'obtenir l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f .

Exercice 18 : Montrer que la fonction $g :]-1; +\infty[\rightarrow]-\infty; 1[$ définie par $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

VIII.2 Courbe représentative

Proposition 19 :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I sur J .

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

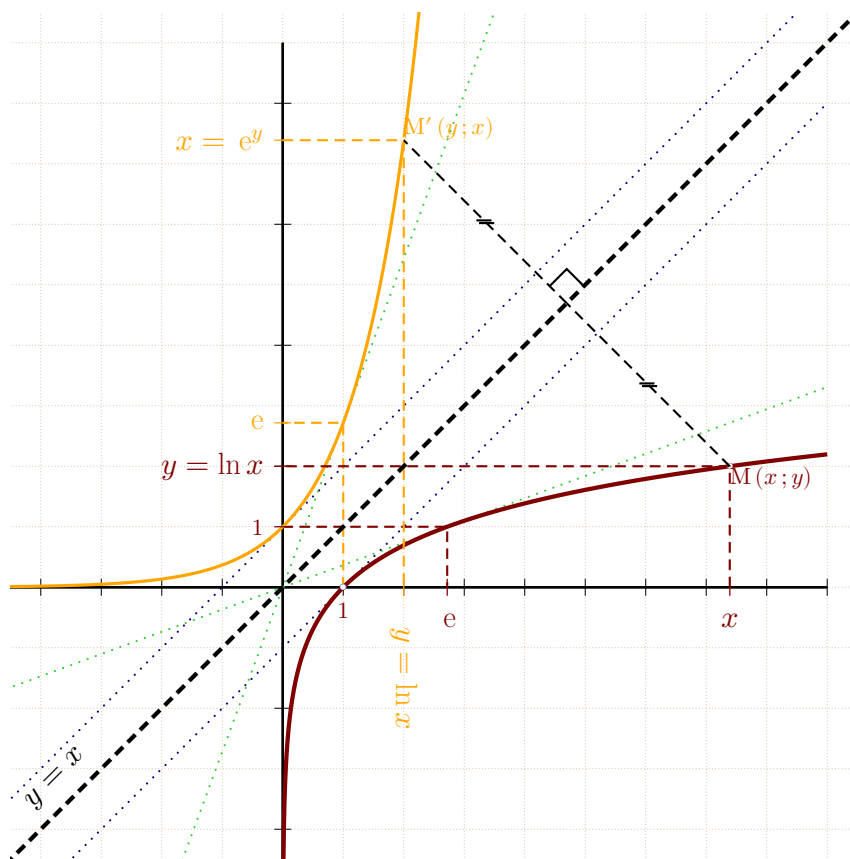


Figure IV.23 – Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Preuve : Notons $\mathcal{G}$ le graphe de f et $\mathcal{G}'$ celui de f^{-1} .

Soit $M(x; y) \in \mathcal{G}$. Alors $y = f(x)$.

Le symétrique de M par rapport à la première bissectrice est :

$$(y; x) = (f(x); x) = (f(x); f^{-1}(f(x))) \in \mathcal{G}'.$$

Réciproquement, si $M(x; y) \in \mathcal{G}'$, $y = f^{-1}(x)$.

M est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point

$$(y; x) = (f^{-1}(x); x) = (f^{-1}(x); f(f^{-1}(x))) = (x; f(x)),$$

donc d'un point de $\mathcal{G}$.

Exercice 19 : Tracer l'allure de la courbe représentative de $\arccos = (\cos)^{-1}$ à partir du graphe de $\cos$ sur $[0; \pi]$.

VIII.3 Dérivabilité et Continuité

Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

1. **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie.
2. **Continuité :** Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J .
3. **Dérivabilité :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall b \in J, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Preuve : Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection i.e. $\forall y \in J, \exists! x \in I$ tel que $y = f(x)$.

1. On se place dans le cas d'une fonction strictement croissante (La démonstration se fait facilement par analogie lorsque la fonction est strictement décroissante).

Soit $(y_1, y_2) \in J^2$ tel que $y_1 < y_2$, et soient $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ i.e. $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$

On a donc $f(x_1) < f(x_2)$.

Comme f est strictement croissante, si l'on avait $x_1 \geq x_2$ alors on aurait $f(x_1) \geq f(x_2)$ ce qui n'est pas possible.

Donc $x_1 < x_2 \iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante.

2. Admis pour l'instant.
3. Soient $b = f(a) \in J$, $y \in J \setminus \{b\}$ et $x \in I$, l'unique antécédent de y par f .

On a :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}},$$

où $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ par injectivité de f^{-1} .

De plus, par continuité de f^{-1} sur J , $f^{-1}(y) = x$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b :

$$= \frac{1}{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$

où $f(x) \neq f(a)$ par injectivité de f .

Comme f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \neq 0$, on obtient :

$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

$$f^{-1} \text{ est donc dérivable en } b \text{ et } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

La dérivabilité étant une notion locale, si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 27 : La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction $\exp$ est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $M(a; b)$ où $b = f(a)$.

Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $M(b; a)$.

En particulier f^{-1} n'est pas dérivable en b .

Exemple 28 : $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$ ne s'annulant que pour $x = 0$.

Ainsi, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

On retrouve que la réciproque de la fonction carrée n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine.

Exercice 20 : Soit $\varphi : x \mapsto x + e^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J .
3. Déterminer $(\varphi^{-1})'(1)$.

Applications

I/ Sémantique

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leq f(b)$, alors $a \leq b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leq f(b)$, alors $a \leq b$.
4. $[\forall u, v \in \mathbb{R}, (u < v \implies f(u) \leq f(v))] \iff [\forall u, v \in \mathbb{R}, (u \leq v \implies f(u) \leq f(v))]$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x < y < z$ tels que :

$$\{f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\} \text{ ou } \{f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\}.$$

Correction : Il est déjà clair que s'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$ et que l'une des conditions $f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$, ou $f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z)$ est satisfaite, la fonction ne peut être ni croissante, ni décroissante donc encore moins monotone.

Montrons alors la contraposée de la réciproque en supposant f monotone. Sans perte de généralité, on peut supposer, par exemple, que f est croissante.

Considérons trois réels x, y, z quelconques tels que $x < y < z$ alors $f(x) < f(y) < f(z)$ i.e. aucune des deux conditions $(f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z))$ et $(f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z))$ ne peut être satisfaite et le résultat est ainsi montré.

Exercice 3 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est majorée par M .	4. f n'admet pas de minimum global.
2. f est minorée.	5. f n'admet pas de minimum local.
3. f est bornée sur I .	

Exercice 4 : Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

1. $\mathbb{R}_+$	3. $[0; 1]$	5. $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2. $\mathbb{Z}$	4. $]0; 1]$	

II/ Fonctions

Exercice 5 : Dédurre des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (2x + 3)^2 - 2$.

3. $h : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.

2. $g : x \mapsto 1 - \frac{2}{x-3}$.

4. $j : x \mapsto 2|x+2| - 1$.

Exercice 6 :

1. Soient les fonctions définies par $f(x) = (1-x)^2$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.

Déterminer les fonctions $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$ ainsi que leur domaine de définition respectif.

2. Même question avec $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = |x|$.

Exercice 7 : Déterminer deux applications f et g telles que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 8 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f_i suivantes définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f_4(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

$$f_5(x) = \sqrt{\frac{16x^2-2x+8}{x^2+5x+6}}$$

$$f_6(x) = \sqrt{\frac{2-5x}{x^2-6x+5}}$$

$$f_7(x) = \ln(2x+3).$$

$$f_8(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

$$f_9(x) = \ln(\cos(x)).$$

$$f_{10}(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$f_{11}(x) = \ln(x-2) - \ln(x-1)$$

$$f_{12}(x) = \ln(x-2) - \ln(1-x)$$

$$f_{13}(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f_{14}(x) = \sqrt{\ln(x+3)}$$

$$f_{15}(x) = \frac{1}{\cos(2x)}.$$

Exercice 9 : Étudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x(3x^2 - 1).$$

$$g(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$$

$$h(x) = e^{|x|}.$$

$$i(x) = \ln(x^2 + 1).$$

$$j(x) = \frac{1}{(x^3 - 2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$k(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 - 1}.$$

$$l(x) = x \sin(x) + 1.$$

$$m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$n(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

$$o(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$p(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right).$$

$$q(x) = x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Exercice 10 :

1. Montrer que si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.
3. Montrer que si f est dérivable et T-périodique, alors f' est T-périodique.

Exercice 11 : Soit $f : x \mapsto \ln|x^2 - 4x + 3|$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $f(2-x) = f(2+x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : La droite (Δ) d'équation $x = 2$ est la médiatrice du segment $[MN]$ où M, d'abscisse $a+x$ et N, d'abscisse $a-x$ sont des points de $\mathcal{C}_f$ i.e. l'axe de symétrie de la courbe.

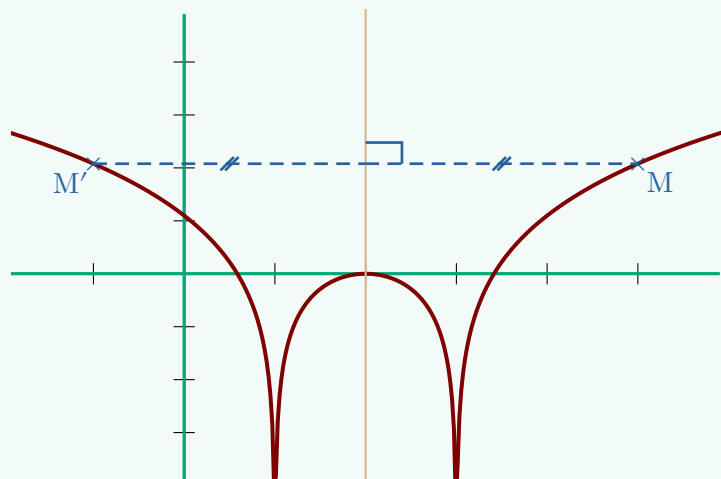


Figure IV.24 – $(\Delta) : x = 2$ est axe de symétrie de la courbe de $x \mapsto \ln|x^2 - 4x + 3|$.

Exercice 12 : Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(1+x) + f(1-x) = -6$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : Le point $A(1; -3)$ est donc le milieu du segment $[MN]$ où M , d'abscisse $1+x$ et N , d'abscisse $1-x$ sont des points de $\mathcal{C}_f$ i.e. le centre de symétrie de la courbe.

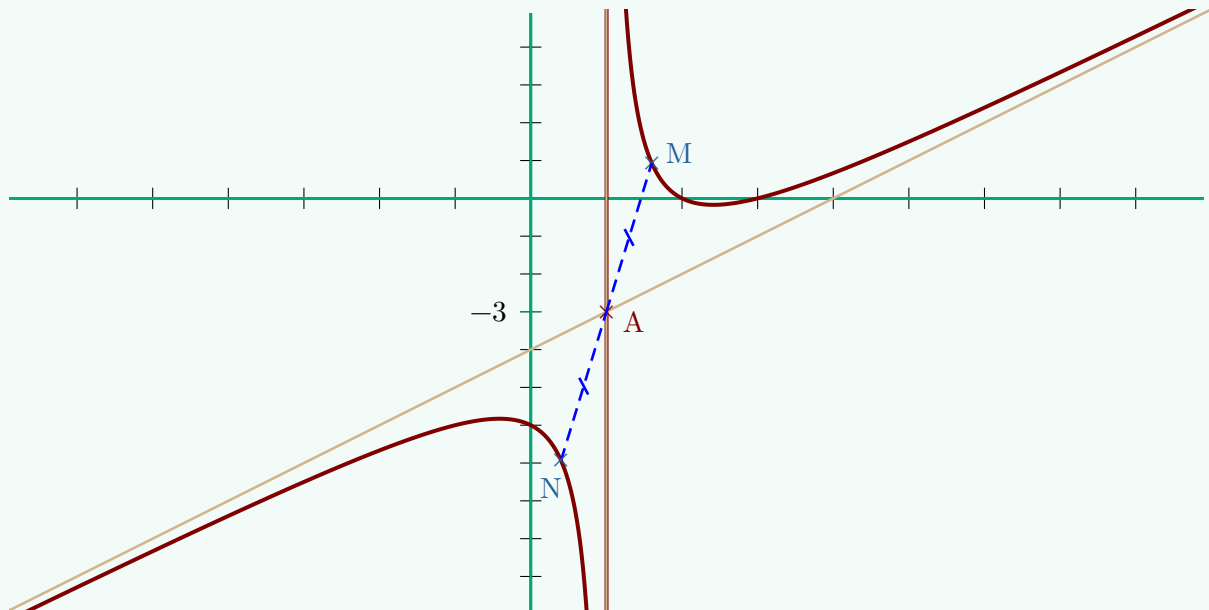


Figure IV.25 – $A(1; -3)$ est centre de symétrie de la courbe de $x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Méthode 1 (Axe et centre de symétrie) :

(Hors-Programme)

Soient a, b deux réels et f une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à a .

Pour montrer que la courbe de f admet :

— la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie, on montre que :

$$f(a-x) - f(a+x) = 0.$$

— le point $\Omega(a; b)$ comme centre de symétrie, on montre que :

$$f(a-x) + f(a+x) = 2b.$$

Exercice 13 :

(Hors-Programme)

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie.
2. Soit $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un centre de symétrie.

Exercice 14 : Soit $f : x \mapsto \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

1. Montrer que $I(-1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (Hors-Programme)
2. Étudier les variations de f .
3. Discuter graphiquement l'équation $f(x) = m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 15 : Donner la dérivée des fonctions définies par leur expression suivante :

(Il s'agit d'un exercice d'entraînement technique à la différentiation donc ne se préoccupera ici et exceptionnellement pas du domaine de dérivabilité)

Commentaires : *Pour toutes vos recherches de dérivées, je vous conseille vivement de vérifier vos calculs avec des applis telles que dcode.*

$f_1(x) = (x-4)^2.$	$f_{11}(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$	$f_{23}(x) = (1-5x^2)^3.$
$f_2(x) = \frac{1}{(5x-3)^3}.$	$f_{12}(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}.$	$f_{24}(x) = \sin^2(x).$
$f_3(x) = \cos\left(\frac{x-1}{2x+1}\right).$	$f_{13}(x) = (x^2 + 2x - 9)^3.$	$f_{25}(x) = \sin(x^2).$
$f_4(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$	$f_{14}(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3.$	$f_{26}(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$
$f_5(x) = \tan(3x).$	$f_{15}(x) = (4x^3 + 2x - 1)^4.$	$f_{27}(x) = e^{4x+1}.$
$f_6(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}.$	$f_{16}(x) = \sqrt{1-x^2}.$	$f_{28}(x) = e^x \sin(x).$
$f_7(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$	$f_{17}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3.$	$f_{29}(x) = e^{-x} + x^{-1}.$
$f_8(x) = \frac{x-1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$	$f_{18}(x) = \sqrt{\cos(x)}.$	$f_{30}(x) = \frac{1}{e^x}.$
$f_9(x) = \ln(x + \sqrt{1-x^2}).$	$f_{19}(x) = \cos((x^2 - 5)^3).$	$f_{31}(x) = \frac{e^{3x^2+5x-3}}{e^x + 1}.$
$f_{10}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$	$f_{20}(x) = \cos\left(\sqrt{2 + \sin(x)}\right).$	$f_{32}(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}.$
	$f_{21}(x) = \frac{5}{3(x-2)^4}.$	$f_{33}(x) = e^{5x^3+7x+4}.$
	$f_{22}(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}.$	$f_{34}(x) = (x+1)e^{-x+1}.$
		$f_{35}(x) = e^{\frac{2x+3}{x-2}}.$
$f_{36}(x) = x e^{\frac{1}{x}}.$	$f_{43}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$	$f_{49}(x) = \ln(\ln(x)).$
$f_{37}(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}.$	$f_{44}(x) = \frac{\cos(\pi x - 1)}{\cos(x - \pi)}.$	$f_{50}(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$
$f_{38}(x) = \frac{2e^x - 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$	$f_{45}(x) = (3x^2 - 2) \sin^2(x).$	$f_{51}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
$f_{39}(x) = (x^2 - 4) e^{x-2}.$	$f_{46}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$	$f_{52}(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4.$
$f_{40}(x) = e^{\frac{4}{2x-1}}.$	$f_{47}(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right).$	$f_{53}(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$
$f_{41}(x) = \frac{2 \cos(x) + 3}{2 \cos(x) - 3}.$	$f_{48}(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}.$	$f_{54}(x) = x e^{-x}.$
$f_{42}(x) = \sin(x) (1 + \cos(x)).$		

Exercice 16 : Étudier le domaine de dérivabilité des fonctions définies par leur expression suivante :

$$f_1(x) = \cos^6(x)$$

$$f_2(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f_3(x) = e^{\sin(x)}.$$

$$f_4(x) = \sqrt{(x^2 - 1)^3}.$$

$$f_5(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{(x + 1)^{3/2}}.$$

$$f_6(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$f_7(x) = \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right).$$

$$f_8(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}.$$

Exercice 17 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

III/ Bijection et réciproque _____

Exercice 18 : Déterminer une fonction réelle bijective qui ne vérifie pas toutes les conditions du théorème de la bijection.

Exercice 19 : Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Montrer que f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans un intervalle à préciser, et expliciter sa réciproque f^{-1} .

Exercice 20 : Considérons la fonction $f :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f . Peut-on en conclure que $f^{-1} = f$?

Exercice 21 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

$$1. f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

$$2. f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$$

$$3. f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$$

$$4. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x$$

$$5. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$6. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice 22 : Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^{-1}\left(\frac{35}{12}\right) = \frac{1}{2}$ puis calculer $(f^{-1})'\left(\frac{35}{12}\right)$.

Exercice 23 : Définir la fonction arcsin, réciproque de sin sur des intervalles à préciser et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.

IV/ Propriétés algébriques

Exercice 24 (À retenir) : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto E$ deux applications telles que :

$$f \circ g = id_F \text{ et } g \circ f = id_E.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Correction : On sait que id_F et id_E sont injectives, on en déduit que g et f sont injectives.

On sait aussi que id_F et id_E sont surjectives, on en déduit que f et g sont surjectives.

Ce sont donc deux bijections, d'où $f = g^{-1} \circ id_E = g^{-1}$.

Exercice 25 : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications et A une partie de E .

Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Correction : $z \in g(f(A)) \iff \exists y \in f(A), z = g(y) \iff \exists x \in A, z = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \iff z \in (g \circ f)(A).$

Exercice 26 :

1. Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications et B une partie de G .

Montrer que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$

2. Montrer que $f : E \mapsto F$ est injective si, et seulement si pour tout partie A de E on a :

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

Correction : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. $x \in (g \circ f)^{-1}(B) \iff g(f(x)) \in B \iff f(x) \in g^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(B)).$
2. Supposons f injective et considérons A une partie de E .

On sait que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Si $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$.

comme f est injective, on obtient alors $x = y$ et donc $x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) = A$.

Réciproquement, si pour tout partie A de E on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

En particulier, pour tout $x \in E$, on a $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

D'où, si $f(y) = f(x) \in f^{-1}(f(\{x\}))$ alors $y \in \{x\}$ i.e. $y = x$.

L'application f est donc injective.

Exercice 27 : Soient E, F et G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E; F)$, $g \in \mathcal{F}(F; G)$ et on définit l'application $h \in \mathcal{F}(E; F \times G)$ par :

$$\forall x \in E, h(x) = (f(x); g(x)).$$

1. Démontrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 28 : Soient E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(E; E)$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 29 : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers $\mathcal{P}(E)$.

En considérant la partie $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.

Correction : Par l'absurde, supposons f est surjective *i.e.* il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = A$.

x_0 ne peut appartenir qu'à A ou $\complement_E A$:

- Si $x_0 \in A$, alors $x_0 \in f(x_0)$ et donc $x_0 \notin A$ (par définition de A), ce qui est absurde.
- Si $x_0 \notin A$ alors $x_0 \notin f(x_0)$ et donc $x_0 \in A$, ce qui est de nouveau absurde.

Par conséquent f ne peut pas être surjective.

Applications

Compléter :

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

- *Réflexive* lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

- *Antisymétrique* lorsque :

$$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

- La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si 3 divise $y - x$ est réflexive, symétrique et transitive.
- La relation $\parallel$ est réflexive, symétrique et transitive.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 3 : Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E .

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que :

- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x$.
- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in A, \forall x \in A, x \leq b$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $x > 1$.

Donc $\mathcal{D}_f =]1; +\infty[$.

Définition 8 (Coïncidence) : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : E' \mapsto F'$ deux applications.

On dit que f et g *coïncident* sur une partie A de $E \cap E'$ si $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Exercice 5 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(x) \qquad x \mapsto (x-1)^2.$$

Déterminer la fonction $g \circ f$ et préciser son domaine de définition.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, domaine de définition de g donc la fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$(g \circ f)(x) = (\ln(x) - 1)^2.$$

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x-a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{i}$.
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a .

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \ln((x-1)^2 + 1)$.

La fonction logarithme est croissante sur son domaine de définition donc f a les mêmes variations que $x \mapsto (x-1)^2 + 1$ qui est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable en a* si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a, x \neq a$.

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- (i) Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(ii) Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont le dénominateur ne s'annule pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Théorème 10 :

Soient I un (seul) intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset I$ avec $a < b$.

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I .

- (i) Si $f(I) \subset J$ et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Théorème 12 :

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve :

1. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g sur G , il existe $y_z \in F$ tel que $z = g(y)$.

Par surjectivité de f sur F , il existe aussi $x_y \in E$ tel que $y = f(x)$.

Par définition de $(g \circ f)$, on a donc trouvé $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ i.e. $(g \circ f)$ est surjective sur G .

2. Réciproquement soit $z \in G$.

Par surjectivité de $(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ i.e. $f(x) \in F$ tel que $g(f(x)) = z$ donc g est surjective sur G .

Théorème 13 (Théorème de la bijection) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(I)$.

De plus, $f(I)$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a; b]$	$[a; b[$	$]a; b]$	$]a; b[$
$f(I)$	f croissante	$[f(a); f(b)]$	$\left[f(a); \lim_{b^-} f\right[$	$\left]\lim_{a^+} f; f(b)\right]$	$\left]\lim_{a^+} f; \lim_{b^-} f\right[$

Exercice 8 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, donner la forme la plus simple possible de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

2. $g : x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 1} - x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad g'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.
 \end{aligned}$$

Applications

Compléter :

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même.

On dit que $\mathcal{R}$ est :

— *Symétrique* lorsque le graphe de $\mathcal{R}$ est symétrique :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

— *Transitive* lorsque :

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Exemples 2 : Sur les ensembles adéquats :

- L'égalité est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation $<$ est seulement transitive.
- La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation $\perp$ est symétrique.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 2 : Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E .

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 4 (Parties bornées) : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0; +\infty]$ ne s'annulant que pour $x = 1$ et ne valant 1 que pour $x = 0$ ou $x = 2$ là où $\ln$ s'annule.

Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$.

Définition 10 (Prolongement) : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Si $E \subset E'$, on appelle *prolongement* de f à E' , notée en général $\tilde{f}$, l'application $\tilde{f} : E' \mapsto F$ qui coïncide avec f sur E .

Exercice 5 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(x) \qquad x \mapsto (x-1)^2.$$

Déterminer la fonction $f \circ g$ et préciser son domaine de définition.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$.

La fonction $f \circ g$ est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $(f \circ g)(x) = \ln((x-1)^2)$.

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur $\mathcal{C}_f$) :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$.

Exercice 7 : Sans calcul de dérivée, donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{(x-1)^2}$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc f a les mêmes variations que $x \mapsto (x-1)^2$ qui est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Proposition 8 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- (i) Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

- (ii) L'inverse d'une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Théorème 10 :

Soient I un (seul) intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Alors :

- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si f' est négative sur I et non identiquement nulle sur tout intervalle $[a; b] \subset I$ avec $a < b$.

Définition 21 : Soient f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est *continue en a* si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Proposition 11 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I .

- (i) Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Théorème 15 :

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Preuve :

1. Soient $x, y \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.

Par définition de la composée, on a alors $g(f(x)) = g(f(y))$ qui entraîne $f(x) = f(y)$ par injectivité de g puis $x = y$ par celle de f .

Donc $x = y$ et $(g \circ f)$ est injective.

2. Réciproquement, soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.

Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ en composant (à gauche) par g puis $x = y$ par injectivité de $(g \circ f)$ d'où l'injectivité de f .

Théorème 16 (Théorème de la bijection) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle induit une bijection de I sur $f(I)$.

De plus, $f(I)$ est un intervalle d'un des types suivants :

	I	$[a; b]$	$[a; b[$	$]a; b]$	$]a; b[$
$f(I)$	f décroissante	$[f(b); f(a)]$	$\left] \lim_{b^-} f; f(a) \right]$	$\left[f(b); \lim_{a^+} f \right[$	$\left] \lim_{b^-} f; \lim_{a^+} f \right[$

Exercice 8 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, donner la forme la plus simple possible de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2. $g : x \mapsto \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} - x)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad g'(x) &= \frac{(-\sin(x) - \cos(x))(\cos(x) + \sin(x)) - (\cos(x) - \sin(x))(-\sin(x) + \cos(x))}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\
 &= -\frac{(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2}{(\cos(x) + \sin(x))^2} \\
 &= -\frac{2}{(\cos(x) + \sin(x))^2}.
 \end{aligned}$$

Arithmétique et applications

Exercice 1 – Étude complète de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x \ln |x||.$$

(Domaine de définition, domaine d'étude, branches infinies, dérivabilité notamment en 0 et 1, courbe représentative.)

Exercice 2 – On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p} .

4. Montrer que $\forall n, m > 2, F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.

5. Montrer que, si $n > 5$ et F_n est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie ? (On pourra chercher sur internet, une liste des 20 premiers nombres de Fibonacci.)

6. **(Hors-programme)** Vérifier que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7, puis montrer que F_n est divisible par 7 si et seulement si n est un multiple de 8.

(Indication : On pourra calculer dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.)

Arithmétique et Applications

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x \ln |x||. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1 –

1. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $x \mapsto |x|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

$\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

Commentaires : Ne soyez pas bébés et n'oubliez pas la symétrie du domaine de définition svp !

On étudiera donc f seulement sur $\mathcal{D}_e = \mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.

2. D'après les théorèmes sur les limites de composées et de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Commentaires : Si vous donnez les limites en $-\infty$ pensez à le faire par symétrie et ne les recalculez pas !

D'après les théorèmes sur les croissances comparées $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Le prolongement est alors continu sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto \ln |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule pour $x = 1$.

D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|(1+h) \ln |1+h||}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Pour $(-1 <) h < 0$, $1+h < 1$ donc $\ln(1+h) < 0$ et $|\ln(1+h)| = -\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|(1+h) \ln |1+h||}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ± 1 .

Regardons la limite du taux d'accroissement en 0 :

Pour $0 < h (< 1)$, $\ln(h) < 0$ d'où,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|h \ln |h||}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} -\ln(h) = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Sa courbe y admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Commentaires : *Le fait que nous puissions prolonger f par continuité en 0 nous autorise à s'interroger sur sa dérivabilité en ce point.*

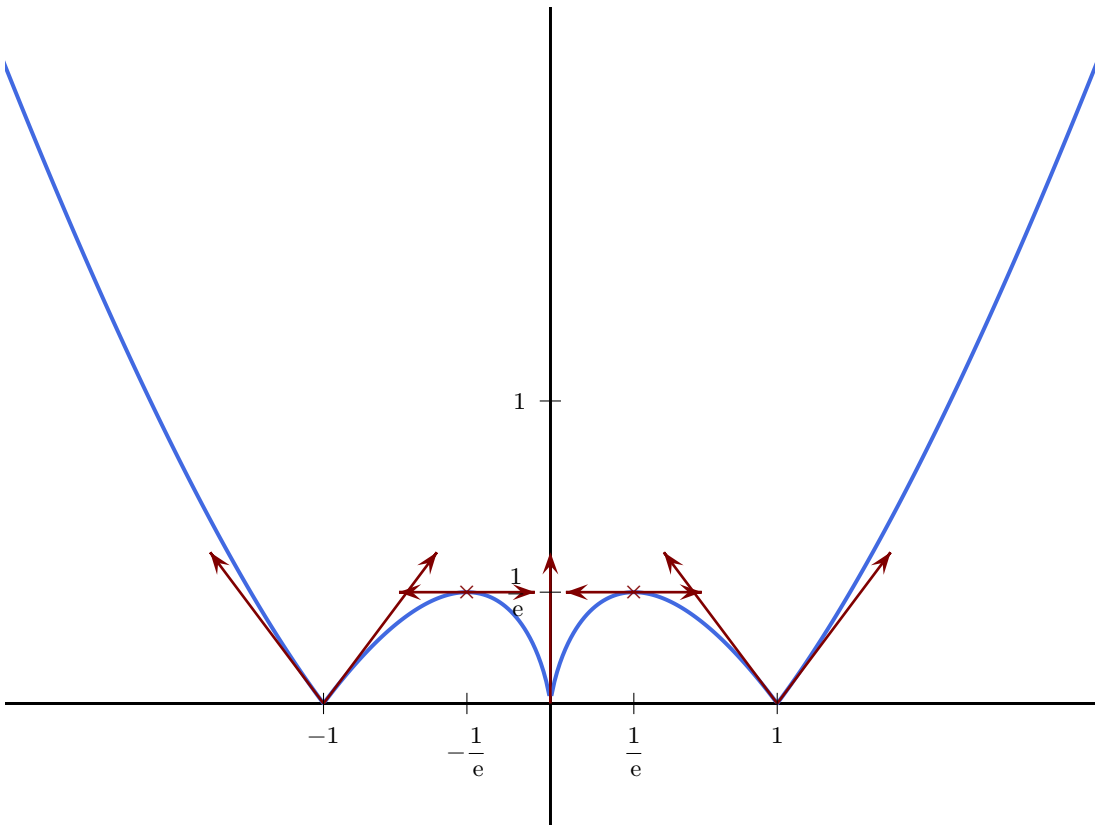
Enfin,

- (a) $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- (b) $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = -\ln(x) - 1$ qui s'annule en $\frac{1}{e}$.

On en déduit la tableau de variation complet de f par symétrie :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$			
$f'(x)$	-		+	0	-	+	0	-	+	
f	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.



Correction de l'exercice 2 –

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété.

Pour $n = 1$, on a $F_2F_0 - F_1^2 = 1$ i.e. $0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$. La propriété est vraie.

Supposons qu'il existe un rang n fixé, tel que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

On a alors, en utilisant la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 + F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) \end{aligned}$$

Or, $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$, on a donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée pour $n = 1$, elle est donc vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \geq 1, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

2. Il est clair, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.

Soit d un diviseur de F_n et F_{n+1} . Alors, par compatibilité de la relation de divisibilité avec les combinaisons linéaires entières, $d \mid (-1)^n$ i.e. $d = \pm 1$.

Les nombres F_n et F_{n+1} sont donc premiers entre eux.

Commentaires : *Sans se servir de la question précédente, on pouvait aussi revenir à la définition et dire que $F_n \wedge F_{n-1} = \dots = F_1 \wedge F_0 = 1$.*

3. Montrons, par récurrence double sur $p \geq 1$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 1$, grâce aux valeurs de F_0 et F_1 , on a

$$F_n F_0 + F_{n+1} F_1 = F_n \cdot 0 F_{n+1} \cdot 1 = F_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 2$, par la relation de récurrence et les valeurs de F_1 et F_2 , on a

$$F_n F_1 + F_{n+1} F_2 = F_n \cdot 1 + F_{n+1} \cdot 1 = F_{n+2}.$$

La propriété est donc initialisée sur les deux premiers rangs.

Supposons que pour un entier p fixé, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p \text{ et } F_{n+p+1} = F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1}.$$

Considérons le rang $p + 2$. Grâce à la relation de récurrence, on a :

$$F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p}$$

En utilisant la double hypothèse de récurrence,

$$F_{n+p+2} = F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1} + F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p = F_n (F_p + F_{p-1}) + F_{n+1} (F_{p+1} + F_p).$$

Soit

$$F_{n+p+2} = F_n F_{p+1} + F_{n+1} F_{p+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence double, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p.$$

Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur commun à F_n et F_p .

D'après la relation précédente, $d|F_{n+p}$ donc $d|F_n \wedge F_{n+p}$ qui entraîne $F_n \wedge F_p | F_n \wedge F_{n+p}$.

De même, $F_{n+p} - F_n F_{p-1} = F_{n+1} F_p$ entraîne que tout diviseur d commun à F_n et F_{n+p} divise $F_{n+1} F_p$. Comme F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux, d , diviseur de F_n est aussi premier avec F_{n+1} donc divise F_p et encore $d|F_n \wedge F_p$ puis $F_n \wedge F_{n+p} | F_n \wedge F_p$.

Conclusion, $F_n \wedge F_p = F_n \wedge F_{n+p}$.

4. Supposons $m > n$ (les autres cas en découle) et posons $m = n + p$. La relation précédente, s'écrit :

$$F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n+p} = F_n \wedge F_p.$$

Si la division euclidienne de m par n s'écrit $m = np + r_0$ avec $0 \leq r_0 < n$ alors, en itérant le raisonnement, on obtient :

$$F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n+p} = F_n \wedge F_{r_0}.$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ll} m = np + r_0 & F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{r_0} \\ n = r_0 p_0 + r_1 & F_n \wedge F_{r_0} = F_{r_0} \wedge F_{r_1} \\ r_0 = r_1 p_1 + r_2 & F_{r_0} \wedge F_{r_1} = F_{r_1} \wedge F_{r_2} \\ \vdots & \\ r_k = r_{k+1} p_{k+1} + m \wedge n & F_{r_k} \wedge F_{r_{k+1}} = F_{r_{k+1}} \wedge F_{m \wedge n} \\ r_{k+1} = r_{k+2} \times (m \wedge n) + 0 & F_{r_{k+1}} \wedge F_{m \wedge n} = F_{m \wedge n} \wedge F_0. \end{array}$$

Par transitivité de l'égalité, on obtient $F_n \wedge F_m = F_{m \wedge n} \wedge F_0 = F_{m \wedge n} \wedge 0 = F_{m \wedge n}$.

5. Montrons la contraposée de ce résultat en supposant $n = n_1 n_2$ avec n_1, n_2 deux entiers supérieurs à 2. On a alors :

$$F_n \wedge F_{n_1} = F_{n \wedge n_1} = F_{n_1}.$$

Il est clair que la définition de F_n entraîne que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc F_{n_1} est un diviseur strict de F_n qui n'est donc pas premier.

La réciproque est fausse, mais il faut aller chercher $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$, comme premier contre-exemple...

6. On calcule modulo 7, les termes de la suite et on obtient :

$$\begin{array}{llllll} F_0 \equiv 0[7] & F_1 \equiv 1[7] & F_2 \equiv 1[7] & F_3 \equiv 2[7] & F_4 \equiv 3[7] & F_5 \equiv 5[7] \\ F_6 \equiv 1[7] & F_7 \equiv 6[7] & F_8 \equiv 0[7] & F_9 \equiv 6[7] & F_{10} \equiv 6[7] & F_{11} \equiv 5[7] \\ F_{12} \equiv 4[7] & F_{13} \equiv 2[7] & F_{14} \equiv 6[7] & F_{15} \equiv 1[7] & F_{16} \equiv 0[7] & F_{17} \equiv 1[7] \end{array}$$

On remarque de $F_0 \equiv F_{16}[7]$ et $F_1 \equiv F_{17}[7]$. La suite modulo 7 est donc périodique de période 16.

On remarque aussi que pour $k \in [0, 15]$, seule F_0 et F_8 sont divisible par 7.

On conclut que F_8 est le premier terme non nul de la suite divisible par 7 et que F_n est divisible par 7 si, et seulement si n est un multiple de 8.

Raisonnement, Arithmétique et Applications

14 mars 2025

Durée : **3** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **4** exercices indépendants.

Exercice 1 – Énoncer pour chaque proposition $\mathcal{P}$ qui suit, la proposition (non $\mathcal{P}$).

1. S'il pleut alors je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçons.
5. Dans la classe, il y a autant de filles que de garçons.

Exercice 2 – Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions rationnelles.

Pour ce faire, on raisonne par l'absurde.

1. Écrire la supposition initiale de ce raisonnement. On notera $\frac{a}{b}$ la solution réduite.
2. Montrer que $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$.
3. En déduire que b divise a^3 et a divise b^3 .
4. Montrer alors que $a = b$ puis conclure.

Exercice 3 – On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2e^x + 3}{e^x + 1} \end{aligned}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et en donner leurs interprétations graphiques correspondantes.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire le tableau de variation complet de f .
4. Calculer $f(0)$ et justifier que le graphe de f admet une tangente en 0 dont on donnera l'équation.
5. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
6. Préciser les variations de f^{-1} sur J . Comment obtient-on le graphe de f^{-1} en fonction de celui de f ?
7. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et donner, pour tout $x \in J$, l'expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$.
8. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} en $\frac{5}{2}$.
9. Sur la feuille donnée en annexe et À RENDRE AVEC LA COPIE, tracer les graphes de f , f^{-1} ainsi que TOUTES les droites particulières trouvées précédemment.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $(f(x))^2 - 5f(x) + 6$.
11. En déduire pour $x \in J$, une expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x .
12. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

13. En déduire f^{-1} .
14. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 4 – Soient A et B deux parties d'un ensemble E , on définit la différence symétrique de A et B par

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}),$$

en notant $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les complémentaires respectifs de A et B dans E :

$$\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\} \quad \text{et} \quad \bar{B} = \{x \in E, x \notin B\}.$$

1. Donner une définition de la différence symétrique $A\Delta B$ par compréhension.
2. Soit A une partie de E . Donner $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, et $A\Delta A$.
3. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. L'opération est-elle commutative ?

On admettra dans la suite de cet exercice que l'opération Δ est associative.

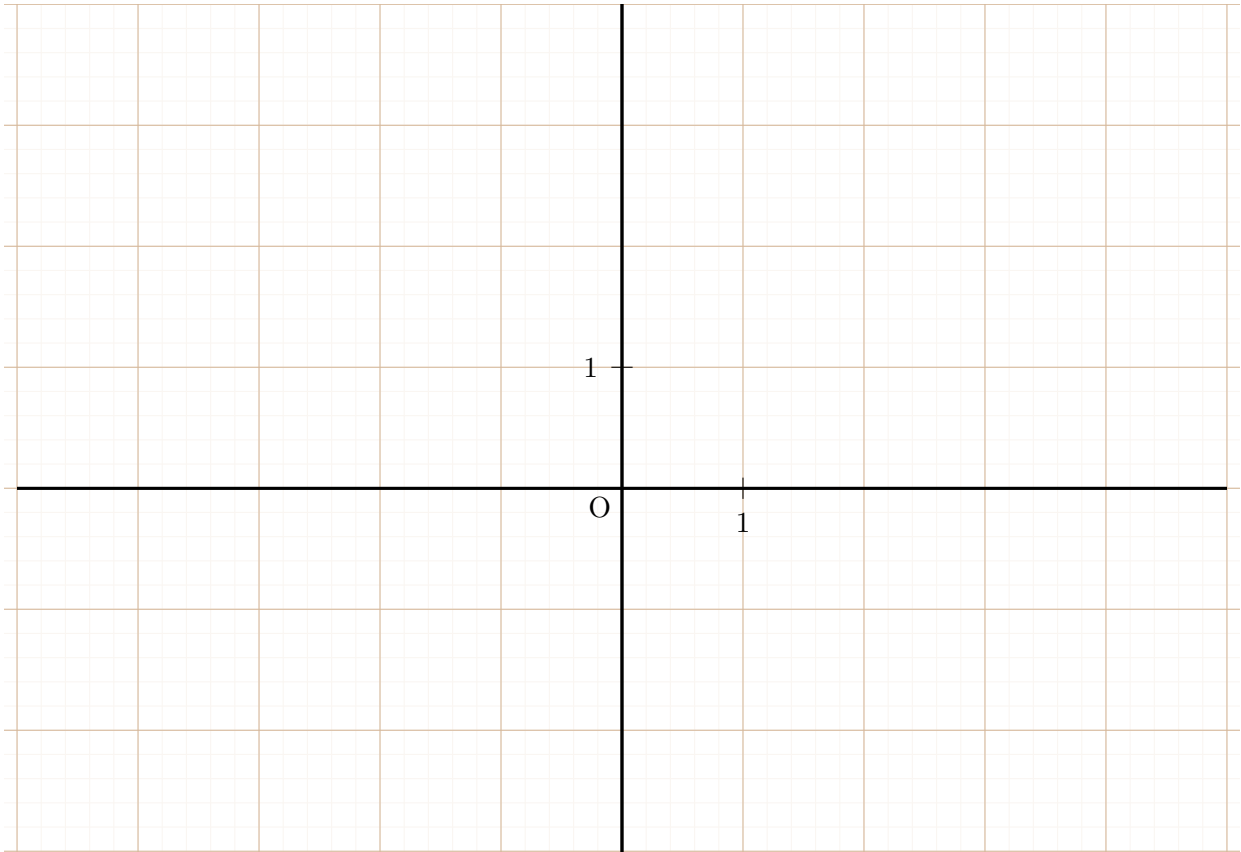
5. Soit C une partie de E . Montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
6. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $A\Delta X = \emptyset$.
7. Montrer que l'application $\varphi : X \mapsto A\Delta X$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Quelle est la réciproque de cette application ?

Nom :

Prénom :

ANNEXE

Exercice 3 –



Raisonnement, Arithmétique et Applications

Commentaires : *Pensez à vous connecter si vous voulez voir vos notes.*

Commentaires : **AUTO-DICTÉE** : une *tangente*, s'*annule*, une *fonction défini*t, une *fonction est défini*e, *quotient*, on *conclut*, la *dérivée est non nulle*, un *raisonnement*, à *valeurs* dans, un *rationnel*, une *solution rationnelle*

Correction de l'exercice 1 –

1. $\neg \Rightarrow$: Il pleut et je ne prends pas mon parapluie.
2. $\neg \exists$: Il y a eu un été où il n'a pas plu en Bretagne.
3. $\neg \forall$: L'été dernier, il y a eu un jour où il n'a pas plu en Bretagne.
4. $\neg \wedge$: Dans la classe, il n'y a pas 16 filles, ou il n'y a pas 18 garçons. (ou inclusif)
5. $\neg =$: Dans la classe, il y a un nombre différent de filles et de garçons.

Correction de l'exercice 2 –

1. Supposons que $x^3 + x + 1$ admette une racine rationnelle de la forme $\frac{a}{b}$ où $(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
2. Par hypothèse, on a donc $\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} + 1 = 0$ puis $\frac{a^3 + ab^2 + b^3}{b^3} = 0$ en réduisant au même dénominateur.

Comme $b \neq 0$, ceci est équivalent à $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$

Commentaires : *Si vous ne dites pas que le dénominateur est nul, la nullité d'une fraction n'est pas équivalente à celle de son numérateur.*

3. D'après l'équation précédente, on a $a^3 = -(ab^2 + b^3) = b(-ab - b^2)$ donc b divise a^3 .

De même, $b^3 = -(ab^2 + a^3) = a(-b^2 - a^2)$ entraîne a divise b^3 .

Commentaires : *La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est un problème multiplicatif donc pas de fractions.*

4. Comme $\text{pgcd}(a, b) = 1$, on a aussi $\text{pgcd}(b, a^3) = 1$.

Or, b divise a^3 . Donc, $b = 1$.

De la même manière $\text{pgcd}(a, b^3) = 1$ avec a divise b^3 entraîne à son tour $a = 1$.

On aurait alors $\frac{a}{b} = 1$ racine de $x^3 + x + 1$ ce qui n'est pas et la contradiction.

Conclusion : $x^3 + x + 1$ est un polynôme qui n'admet aucune racine rationnelle.

Commentaires : *Méthode Solal : D'après (2), $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$.*

Avec $a = b$, on aurait $3b^3 = 0 \Rightarrow b = 0$ qui est impossible.

Correction de l'exercice 3 –

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'après les théorèmes sur les limites de sommes et de produits, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. La courbe de f admet en donc en $-\infty$ la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2e^x \left(1 + \frac{3}{2e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 \left(1 + \frac{3}{2e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} \text{ car } e^x \neq 0.$$

D'après les théorèmes sur les limites de sommes $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1$.

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. La courbe de f admet en donc en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote.

2. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0$, la fonction f quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit son tableau de variations :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	—
f	3 2

4. Un simple calcul donne $f(0) = \frac{5}{2}$.

Comme f est dérivable en 0, sa courbe admet une tangente (T_0) d'équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$:

$$(T_0) : y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}.$$

Commentaires : C'est toujours appréciable de voir un élève qui justifie l'existence d'un objet avant de le chercher : ici la tangente existe car f est dérivable sinon vous pouvez toujours chercher. Au mieux, vous en aurez deux moitiés.

Au passage, c'est f qui est dérivable et $\mathcal{C}_f$ qui admet une tangente.

5. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]2; 3[$, d'après le théorème de la bijection, elle y établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]2; 3[$.

Commentaires : Dites bien que $J = f(\mathbb{R}) = !$

De plus, f n'admet rien du tout mais établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Bien sûr, on fera attention à bien mettre les bornes de $f(\mathbb{R})$ dans l'ordre sous peine d'affirmer que f arrive dans $\emptyset$ et de perdre des points.

6. Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de f^{-1} sur $J = f(\mathbb{R}) =]2; 3[$.

Commentaires : La propriété porte sur le « strictement » donc les points aussi !

Le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par la symétrie d'axe la première bissectrice d'équation $y = x$.

7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

8. Comme $f(0) = \frac{5}{2}$, alors $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ et $(f^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = -4$.

Donc,

$$\left(T'_{\frac{5}{2}}\right) : y = -4\left(x - \frac{5}{2}\right) = -4x + 10.$$

Commentaires : Lorsque ces éléments existent, le fait que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ montre bien que la dérivée de la réciproque n'est pas la réciproque de la dérivée non ? Ce serait un peu trop simple !

9. Voir ANNEXE.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (f(x))^2 - 5f(x) + 6 &= \left(\frac{2e^x + 3}{e^x + 1}\right)^2 - 5\frac{2e^x + 3}{e^x + 1} + 6 \\ &= \frac{(2e^x + 3)^2 - 5(2e^x + 3)(e^x + 1) + 6(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} = f'(x). \end{aligned}$$

11. D'après la question précédente, on a alors :

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(f(f^{-1}(x)))^2 - 5f(f^{-1}(x)) + 6} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

12. Il est clair que $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$.

Raisonnons par analyse-synthèse en supposant qu'un tel couple $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ existe.

Alors, d'une part $(x - 3)(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x - 2}$ et, d'autre part, $(x - 3)(f^{-1})'(x) = a + \frac{b}{x - 2}(x - 3)$. Ces fonctions sont alors parfaitement définies en $x = 3$ où l'on peut évaluer pour avoir :

$$\frac{1}{3 - 2} = a \iff a = 1.$$

De même en $x = 2$, on a $(x - 2)(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x - 3} = \frac{a}{x - 3}(x - 2) + b$ qui entraîne, pour $x = 2$:

$$\frac{1}{2 - 3} = b \iff b = -1.$$

Réciproquement, pour la synthèse, on vérifie que $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{(x - 3)(x - 2)} = (f^{-1})'(x)$.

Conclusion, $\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}$.

13. f^{-1} est la primitive de $(f^{-1})'$ sur J qui s'annule en $\frac{5}{2}$. Donc, $\forall x \in J$, $f^{-1}(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$0 = \ln \left| \frac{\frac{5}{2} - 3}{\frac{5}{2} - 2} \right| + \lambda \iff 0 = \ln \left| \frac{-1}{1} \right| + \lambda \iff \lambda = 0.$$

donc,

$$\forall x \in]2; 3[, f^{-1}(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| = \ln \left(\frac{3-x}{x-2} \right).$$

14. Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in]2; 3[$ et posons $y = f(x)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2e^x + 3}{e^x + 1} \\ &\iff (e^x + 1)y = 2e^x + 3, \quad \text{car } e^x + 1 \neq 0 \\ &\iff (y - 2)e^x = 3 - y \\ &\iff e^x = \frac{3 - y}{y - 2} \\ &\iff x = \ln \left(\frac{3 - y}{y - 2} \right) \quad \text{car } \frac{3 - y}{y - 2} > 0, \forall y \in]2; 3[. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in]2; 3[, f^{-1}(x) = \ln \left(\frac{3 - x}{x - 2} \right).$

Correction de l'exercice 4 –

1. Par définition,

$$A \Delta B = \left\{ x \in E, \left((x \in A) \wedge (x \notin B) \right) \vee \left((x \notin A) \wedge (x \in B) \right) \right\}.$$

2. — $A \Delta \emptyset = (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \cup \emptyset = A.$
 — $A \Delta E = (A \cap \overline{E}) \cup (E \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}.$

Autrement dit, $A \Delta E$ est le complémentaire de A dans E .

— $A \Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$

3. Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

Si $x \in A$ alors $x \notin B$ car $x \notin A \cap B$ donc $(x \in A) \wedge (x \notin B)$ i.e. $x \in A \Delta B$. Le raisonnement est analogue si $x \in B$ donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$.

Réciproquement, soit $x \in A \Delta B$.

Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \notin B$ entraîne $x \notin A \cap B$ donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. De même si $x \in B$ donc $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Par double inclusion, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Commentaires : Avec la distributivité de $\cap$ et $\cup$:

$$\begin{aligned} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) &= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) \\ &= \left((A \cup B) \cap \underbrace{(\overline{B} \cup B)}_{=E} \right) \cap \left(\underbrace{(A \cup \overline{A})}_{=E} \cap (B \cup \overline{A}) \right) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap A)} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

Ethane l'a montré avec les tables de vérité. Ça marche aussi.

4. Par commutativité de $\cup$ et $\cap$, il est clair que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B\Delta A$.

L'opération Δ est donc commutative.

5. Si $B = C$, le résultat est clair.

Réciproquement, soit $x \in B$. Par disjonction de cas :

- Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B = A\Delta C$ qui entraîne $x \in C$.
- Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B = A\Delta C = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$ donc $x \in A \cap C \subset C$ et encore $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in B \implies x \in C$ donc $B \subset C$.

Par symétrie du rôle joué par B et C , l'inclusion réciproque s'obtient de la même manière.

Donc $B = C$.

En conclusion, $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$.

6. On sait déjà, d'après (2), que A est solution.

Réciproquement, d'après la question (3), $A\Delta X = \emptyset \implies (A \cup X) \setminus (A \cap X) = \emptyset$.

Cela signifie que $A \cup X = A \cap X$ qui n'est vraie que si, et seulement si $X = A$, car sinon il existerait un élément dans $A \cup X$ qui n'est pas dans $A \cap X$.

Ainsi, la seule solution est $X = A$.

7. (a) Par définition, de $A\Delta B$, φ est une fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$.
 (b) D'après (5) et par commutativité de l'opération Δ , $A\Delta X = A'\Delta X$ entraîne $A = A'$ donc φ est bien une application.
 (c) Toujours d'après (5), $\varphi(X) = \varphi(Y) \iff A\Delta X = A\Delta Y$ entraîne $X = Y$ donc φ est injective sur $\mathcal{P}(E)$.
 (d) Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$ et cherchons $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\varphi(X) = Y$.

Par associativité et commutativité de Δ , en composant à gauche par A et d'après les résultats de (2), on a :

$$\begin{aligned} \varphi(X) = Y &\iff A\Delta X = Y \\ &\implies A\Delta(A\Delta X) = A\Delta Y \\ &\implies (A\Delta A)\Delta X = A\Delta Y \\ &\implies \emptyset\Delta X = A\Delta Y \\ &\implies X = A\Delta Y. \end{aligned}$$

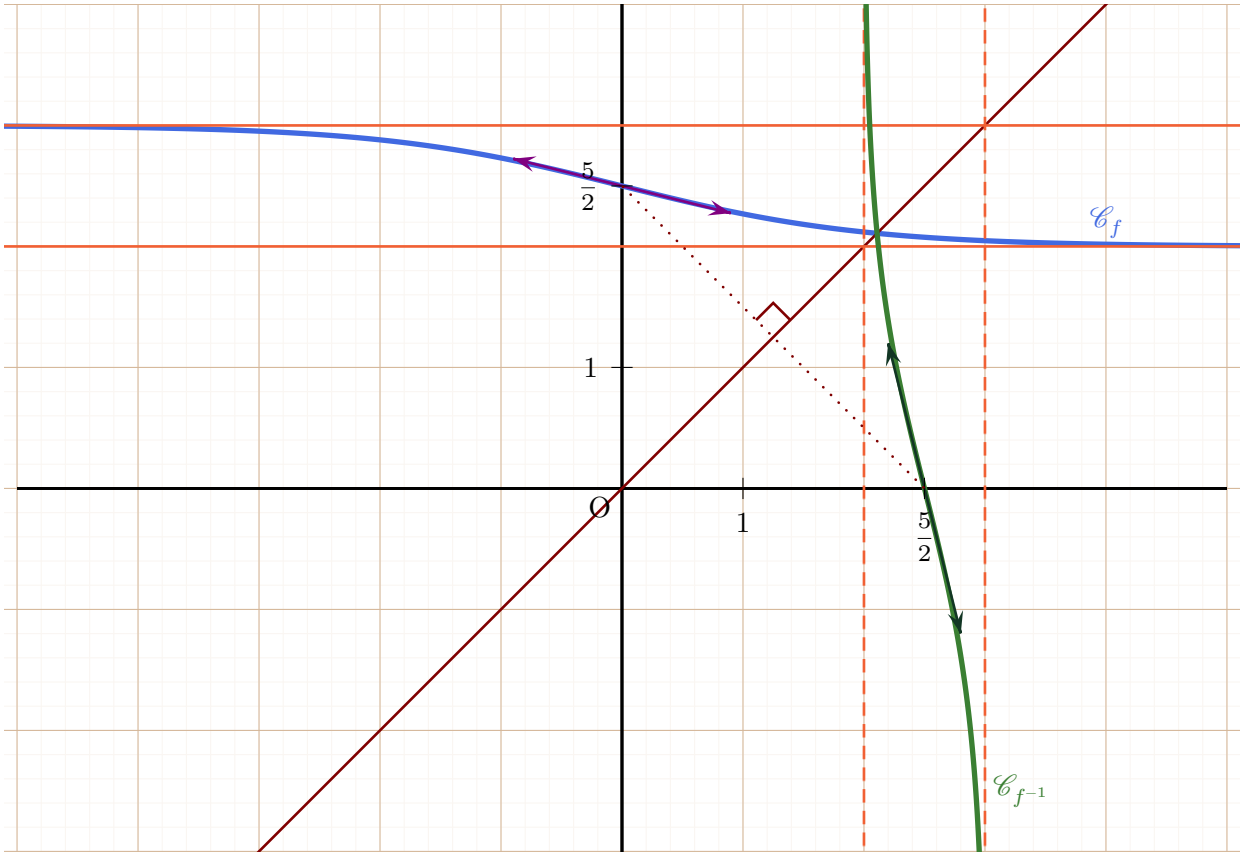
$X = A\Delta Y \in \mathcal{P}(E)$ est donc un antécédent de Y . L'application φ est surjective sur $\mathcal{P}(E)$.

En conclusion, correctement définie, injective et surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, l'application φ est une bijection.

Sa réciproque φ^{-1} est donnée par $\varphi^{-1} : Y \mapsto A\Delta Y$ autrement dit $\varphi = \varphi^{-1}$ est involutive.

ANNEXE

Exercice 3 –



Arithmétique et Applications

1. divisibilité dans $\mathbb{N}$:

- Diviseurs, multiples.
- Théorème de la division euclidienne.
- PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. PPCM.
- Algorithme d'Euclide.

2. Nombre premier.

- Théorème d'Euclide : L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.
- Application au calcul du PGCD et du PPCM.

3. Applications

- Application d'un ensemble dans un ensemble.
- Graphe d'une application. Image directe et Image réciproque.
- Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
- Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

4. Généralités sur les fonctions

- Ensemble de définition. Représentation graphique.
- Effet sur la représentation graphique de f de transformations simples, comme $x \mapsto f(x + a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
- Parité, imparité. Interprétation géométrique. Réduction du domaine d'étude.
- Somme, produit, quotient.
- Monotonie (large et stricte).
- Fonctions majorées, minorées, bornées. Traduction géométrique.

5. Dérivation

- Dérivée d'une fonction. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Résultat admis à ce stade.
- Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Résultat admis à ce stade.
- Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

6. Théorèmes admis pour l'instant :

- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire des fonctions strictement monotones.
- Théorème de la bijection.
- Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque.

Questions de cours possibles ^[7] :

1. (★) Existence et unicité d'un couple $(q; r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
2. L'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Existence de la décomposition en facteurs premiers.
4. (★) Le pgcd est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.
5. Démontrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$.
6. Montrer que la composée de deux fonctions injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective et la réciproque partielle avec un contre-exemple).
7. Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.
8. (★) Dérivabilité de la fonction réciproque sous les hypothèses *ad hoc* qui devront être énoncées clairement.

[7]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Fonctions de référence

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- ...

1. Généralités sur les fonctions

- Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction.
- Tracé du graphe.
- Applications : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
- Périodicité. Interprétation géométrique. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Dérivées d'ordre supérieur.

2. Fonctions usuelles

- Fonctions polynomiale et rationnelle. Factorisation par identification et par division euclidienne, racines, pôles et asymptotes.
- Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissance. Relations fondamentales
- Dérivée, variations, représentation graphique.
- Logarithme décimal, logarithme en base 2.
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.
- Inégalités $\exp(x) \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$.
- Fonctions hyperboliques sh et ch : Dérivée, variations, représentation graphique.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.



Fonctions de référence

Conformément au programme, ce chapitre a pour but de réveiller les souvenirs des années passées sur les fonctions, dites usuelles, dont les propriétés seront rappelées brièvement avant de creuser la théorie dans les chapitres ultérieurs.

L'étude des fonctions devra toujours se dérouler de la même manière dans un plan logique afin d'aboutir à l'allure de la courbe représentative.

Méthode 1 (Plan d'étude d'une fonction) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f *i.e.* on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.
2. On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas *i.e.* on ne travaille pas pour rien.
3. On détermine les limites de f aux extrémités du domaine d'étude avant de les étendre au domaine de définition tout entier par symétrie ou translations.

On effectue ici l'étude *asymptotique* de la fonction en dégagant les asymptotes éventuelles à la courbe.

4. On effectue l'étude *locale* en précisant les variations de la fonction.

Dans le cas d'une fonction dérivable (ce que l'on justifiera) on calcule et on factorise f' afin d'en étudier le signe. On détermine également les points d'annulation de la dérivée afin d'avoir les lieux des tangentes « horizontales ».

5. On dresse le tableau de variation de f en y reportant toutes les informations obtenues et, selon les cas, ses extrema, des valeurs remarquables, ...
6. On trace l'allure de la courbe représentative de f :
 - (a) On trace les asymptotes à la courbe si elles existent.
 - (b) On place les extrema locaux avec leur tangente « horizontale » et les demies-tangentes « verticales » s'il y en a.
 - (c) On place quelques points essentiels : ni trop, ni trop peu et suffisamment pour donner une idée de la courbe.
 - (d) Le coude dans la concavité, on trace une jolie courbe, sans lever le crayon si la courbe est continue ni repasser et en s'appliquant bien à rendre **la courbe tangente aux extrema locaux**.

CONTENU

I	Les fonctions polynomiales	212
I.1	Généralités	212
I.2	Racines et factorisation	214
I.3	Limites, Continuité et Dérivabilité	215
II	Les fonctions rationnelles	216
II.1	Généralités	216
II.2	Limites, Continuité et Dérivabilité	217
III	La fonction logarithme népérien	218
III.1	Le logarithme est défini pour tout x strictement positif	219
III.2	Le logarithme est strictement croissant	219
III.3	Composée	220
III.4	Le logarithme transforme les produits en sommes	220
III.5	Le logarithme réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$	222
III.6	Le logarithme est dominé par les fonctions polynômes	223
III.7	Le logarithme est au-dessous de ses tangentes	224
III.8	Courbe représentative	225
IV	La fonction exponentielle népérienne	225
IV.1	L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$	226
IV.2	L'exponentielle est strictement croissante	228
IV.3	Composée	229
IV.4	L'exponentielle transforme les sommes en produits	229
IV.5	L'exponentielle est prépondérante sur les polynômes	231
IV.6	L'exponentielle est au-dessus de ses tangentes	233
IV.7	Courbe représentative	234
V	Les fonctions puissances	234
V.1	Fonction exponentielle de base $a > 0$	234
V.2	Fonction puissance réelle	237
VI	La fonction logarithme décimal	240
VII	Les fonctions hyperboliques	242
VIII	Tableau récapitulatif	246
	Feuille d'exercices n°5 : Fonctions de référence	247
	Test n°5 : Fonctions de référence	256
	Test n°6 : Fonctions de référence 2	264
	Devoir en temps libre n°4 : Une fonction sympathique	272
	Correction	273
	Programme du chapitre VI	278

I/ Les fonctions polynomiales

I.1 Généralités

Définition 1 : On appelle *fonction polynomiale* une fonction de la forme :

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0
 \end{aligned}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels.

Si $a_n \neq 0$,

- n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ;
- a_n est le **coefficient dominant** ;
- $a_n x^n$ est le **monôme dominant**.

On dit qu'un réel α est une **racine** (ou un **zéro**) de la fonction polynomiale lorsque $f(\alpha) = 0$.

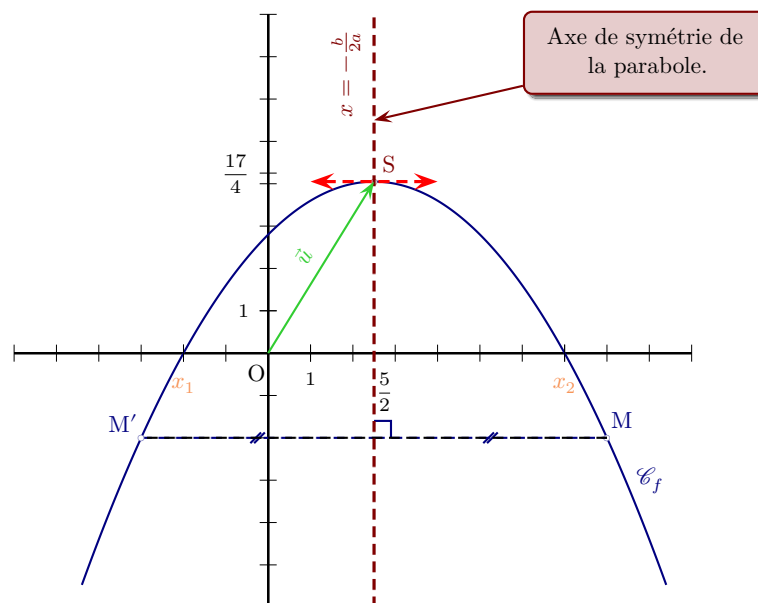


Figure V.1 – Courbe représentative de
 $x \mapsto -\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} = -\frac{1}{5}(x+2)(x-7)$.

Exemples 1 :

- Les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ sont dites *affines*.
- Le produit de deux fonctions affines est un polynôme du second degré appelé aussi *trinôme*. Leur courbe est une *parabole*.

Dans le cas où $a \neq 0$, on a :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Forme canonique

$$= a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{si } \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ avec } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= a(x - x_0)^2 \quad \text{si } \Delta = 0 \text{ avec } x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Forme factorisée

- Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ne sont pas polynomiales.

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$2ax + b$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	0	$+\infty$

Figure V.2 – Tableau de variation d'un trinôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans le cas où $a > 0$ et $\Delta > 0$.

I.2 Racines et factorisation

Théorème 1 (Admis pour l'instant) :

- Une fonction polynomiale de degré $n > 0$ a au plus n racines distinctes.
- Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

a est une racine de f si, et seulement si on peut factoriser $f(x)$ par $(x - a)$.

Autrement dit, a est une racine de f polynomiale de degré n si, et seulement si il existe une fonction polynomiale Q (de degré $n - 1$) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - a)Q(x).$$

Méthode 2 (Factoriser un polynôme) :

Connaissant une racine d'un polynôme, il y a deux méthodes essentielles pour factoriser un polynôme connaissant une racine :

1. Par identification.
2. Par division euclidienne.
3. Par l'algorithme de Hörner^[1], que nous verrons plus tard.

Exemple 2 (Division euclidienne) : Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ dont 1 est racine.

Effectuons la division euclidienne de f par $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 1x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 & x - 1 \\
 \underline{-(x^4 - x^3)} & 1x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
 6x^3 + 5x^2 - 5x - 6 & \\
 \underline{-(6x^3 - 6x^2)} & 11x^2 - 5x - 6 \\
 11x^2 - 5x - 6 & \\
 \underline{-(11x^2 - 11x)} & 6x - 6 \\
 6x - 6 & \\
 \underline{-(6x - 6)} & 0
 \end{array}$$

[1]. William George Hörner (Bristol, Angleterre, 9 juin 1786 – Bath, Angleterre, 22 septembre 1837) est un mathématicien britannique.

Hörner est connu pour sa méthode (déjà publiée par Zhu Shijie vers 1300, mais aussi utilisée (en Angleterre par Isaac Newton 150 ans avant Hörner), qui permet d'évaluer rapidement un polynôme en un point et pour son invention en 1834 du zootrope, un appareil optique donnant l'illusion du mouvement.

On obtient donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$.

Et l'on peut poursuivre...

$$\begin{aligned} &= (x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

Exercice 1 : Factoriser les expressions suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$$A(x) = (x-3)^2 - 16$$

$$B(x) = x^3 - 1$$

I.3 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 2 :

- Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction polynomiale de coefficient dominant a_n .

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{signe}(a_n) \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n.$$

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction polynomiale est celle de son monôme de plus haut degré.

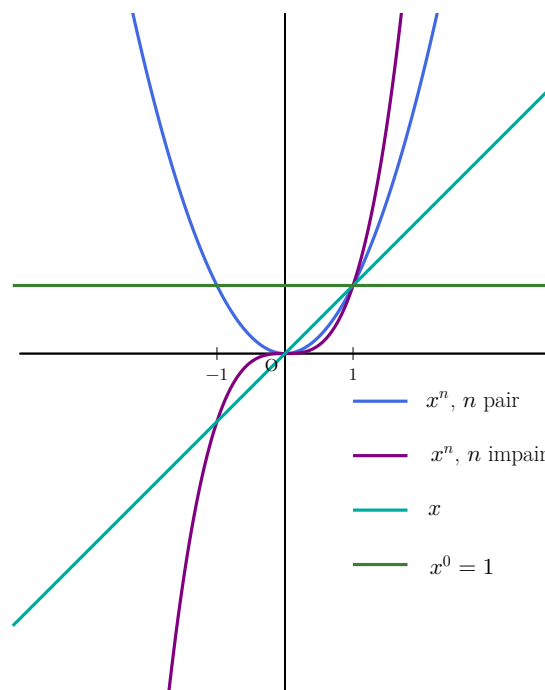


Figure V.3 – Limites en l'infini des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Il suffit pour cela de factoriser par le monôme prépondérant (avec $a_n \neq 0$) et d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right). \end{aligned}$$

Les théorèmes sur les sommes et produits de limites suffisent à conclure.

Exercice 2 : Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions polynomiales définies par :

$$f_1(x) = x^2 + 3x - 5$$

$$f_2(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2x + 1.$$

$$f_3(x) = 3x^6 - x^4 + 2x + 3.$$

$$f_4(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2.$$

II/ Les fonctions rationnelles

II.1 Généralités

Définition 2 : On appelle *fonction rationnelle* tout quotient de fonctions polynomiales de la forme :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \end{aligned}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_m$ sont des réels.

- Les racines du numérateur sont toujours appelées les racines de f .
- Les racines du dénominateur sont appelées les *pôles* de f .
- Si $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on prolonge la notion de degré d'une fonction polynomiale aux fonctions rationnelles en posant : $\deg(f) = n - m$.

Remarque : Une fonction rationnelle aura au plus autant d'asymptotes verticales que ce qu'elle a de pôles.

Exemple 3 : On appelle fonction *homographique* toute fonction rationnelle définie par le quotient de deux fonctions affines $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto cx + d$ non proportionnelles i.e. $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c}}{cx + d}.$$

- Sa courbe, appelée *hyperbole* (équilatère^[2]), admet deux asymptotes d'équation $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ dont le point d'intersection est le centre de symétrie de la courbe.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ et, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	-		
f	$\frac{a}{c} \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow \frac{a}{c}$	

Figure V.4 – Tableau de variation d’une fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ dans le cas où $ad-bc < 0$ et $c \neq 0$.

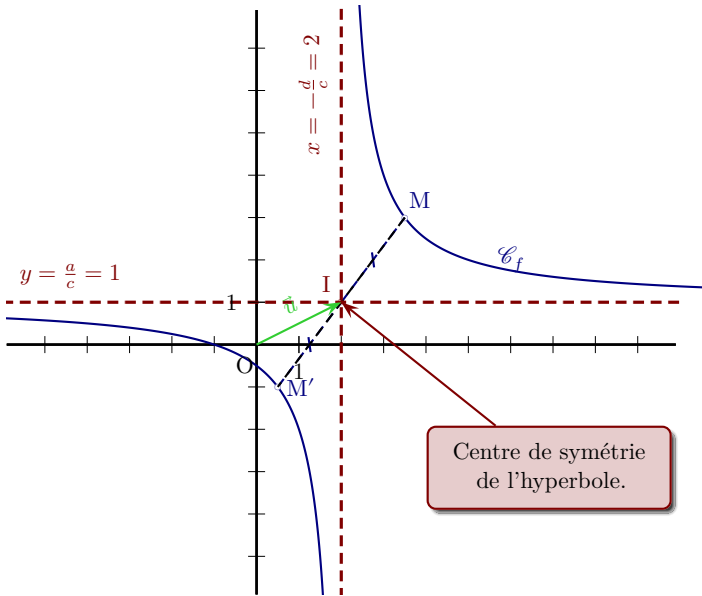


Figure V.5 – Courbe représentative de $x \mapsto \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$.

II.2 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 3 :

- Les fonctions rationnelles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ privé de leurs pôles.
- Soit f une fonction rationnelle de la forme $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ de degré $r = n - m \in \mathbb{Z}$ et $b_m \neq 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{signe} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^r$.

Autrement dit, la limite en l’infini d’une fonction rationnelle est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

[2]. Hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Remarque : Une fonction rationnelle admet une asymptote horizontale si, et seulement si son degré est négatif ou nul et, dans ce cas, son équation est $y = 0$ ou $y = \frac{a_n}{b_n}$ respectivement.

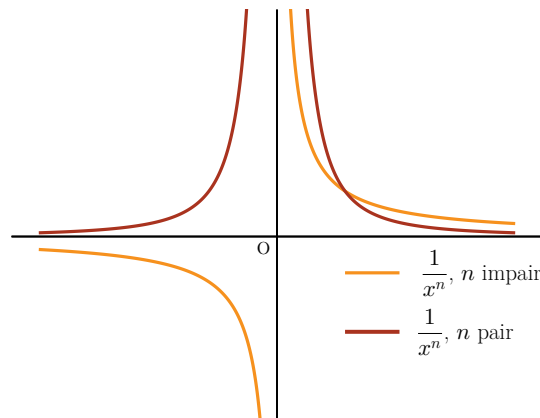


Figure V.6 – Limite en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + x + 6}{2x^2 + 5x + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 8}{x^2 - x - 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{-x^2 + x + 6}$

III/ La fonction logarithme népérien _____

L'invention de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle.

La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII^{ème} siècle du nom de John Napier avant qu'il soit anobli et prenne celui de John Néper. Il cherchait une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers.

Se basant sur les travaux déjà effectués sur les fonctions trigonométriques, il inventa alors une fonction qui transforme le produit en somme *i.e.*

$$\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(ab) = f(a) + f(b). \quad (\text{V.1})$$

C'est cette fonction, écho à la fonction exponentielle, qui est l'objet de ce paragraphe.

Remarque : L'approche consistant à développer d'abord la fonction exponentielle se vaut tout autant sachant que toutes deux souffrent, pour l'instant, d'un postulat :

- l'existence d'une fonction f vérifiant les axiomes $f' = f$ et $f(0) = 1$ si l'on veut commencer par l'exponentielle.
- l'existence de la primitive d'une fonction continue si l'on veut commencer par le logarithme népérien.

J'ai donc choisi une approche qui suit le fil de l'histoire et qui vous changera de l'approche standard que vous avez sûrement eue.

III.1 Le logarithme est défini pour tout x strictement positif

Rappel 1 : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$, l'unique primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\mathcal{D}_{\ln} =]0; +\infty[.$$

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln(5x - 3)$$

$$f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right)$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 1)$$

III.2 Le logarithme est strictement croissant

Théorème 4 (Variations) :

1. $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
2. $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Ce résultat a déjà été établi pour $x > 0$, et il reste valable pour $x < 0$ car on a alors :

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

En conséquence, $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

On récupère déjà toute une série de relations à connaître :

Corollaire 4.1 :

Soient a et b deux réels **strictement positifs**.

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.
- $\ln(a) = 0 \iff a = 1$ et $\ln(a) > 0 \iff a > 1$.

Exemple 4 : Résoudre $\ln(2 - 2x) = \ln 2$.

Tout d'abord les conditions d'existence. Cette équation ne sera valide que si $2 - 2x > 0$ i.e. $x \in]-\infty ; 1[$.

Il suffit alors de résoudre en appliquant les propriétés ci-dessous :

$$\ln(2 - 2x) = \ln 2 \iff 2 - 2x = 2 \iff x = 0.$$

Comme $0 < 1$, on a $\mathcal{S} = \{0\}$.

III.3 Composée

Théorème 5 :

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

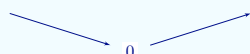
Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Comme u est nécessairement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u' i.e. les fonctions $\ln u$ et u ont le même sens de variations sur I .^[3]

En mieux, $\ln$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, composée par elle ne change pas la monotonie.

Exemple 5 : La fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ a les mêmes variations que $x \mapsto 1 + x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

III.4 Le logarithme transforme les produits en sommes

Proposition 6 (Propriétés algébriques) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$1. \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

$$3. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

$$2. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$4. \forall n \in \mathbb{Q}, \ln(a^n) = n \ln(a).$$

La relation 1 est appelée *relation fondamentale* du logarithme. Elle va imposer une croissance très, très, très faible.

[3]. Attention! Elles peuvent ne pas avoir et n'ont sûrement pas le même domaine de définition.

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln(x).$

Preuve :

1. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln(bx) - \ln(x) - \ln(b).$$

Cette fonction est constante à $f(1) = 0$.

En évaluant en a , on obtient la relation cherchée.

2. $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
 3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots$
 4. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ ce résultat sachant qu'il est initialisé pour $n = 0$.

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a).$$

D'où l'hérédité et la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\ln(a^n) = -\ln(a^{-n})$, on étend ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$.

Enfin, soit $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\ln(a^n)^q = nq \ln(a)$ d'une part car $nq \in \mathbb{Z}$ et $\ln(a^n)^q = q \ln(a^n)$ d'autre part car $a^n \in \mathbb{R}_+^*$.

Une petite division par $q \neq 0$ et on obtient $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

La formule est ainsi prolongée à tout $n \in \mathbb{Q}$.

Exemples 6 :

1. $\ln 50 = \ln(5^2 \times 2) = 2 \ln 5 + \ln 2$.
 2. $\ln \sqrt{12} = \frac{1}{2} \ln(2^2 \times 3) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$.

Ces deux premiers exemples montrent, qu'à l'époque bénie où les calculatrices n'existaient pas, une simple table avec les valeurs approchées des logarithmes des 10 premiers entiers suffisait à faire bien des calculs !

3. Déterminons l'entier n tel que $2^n > 10000$.

$$2^n > 10000 \quad \underset{\text{ln str. croissante}}{\iff} \quad n \ln 2 > \ln(10000) = 4 \ln(10) \iff n > 4 \frac{\ln(10)}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0!.$$

Comme $4 \frac{\ln(10)}{\ln 2} \simeq 13,3$, l'entier n devra être supérieur à 14.

Corollaire 6.1 :

Pour tout réels strictement positifs, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}\right) &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n) - \ln(b_1) - \ln(b_2) - \dots - \ln(b_m) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(a_k) - \sum_{k=1}^m \ln(b_k). \end{aligned}$$

Cette propriété est souvent utilisée pour linéariser les expressions.

Exemple 7 : L'image d'une suite géométrique par la fonction logarithme est une suite arithmétique.

En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_0 i.e.

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} \end{cases} = qu_n.$$

Alors $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln q$. La suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $\ln u_0$.

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leq 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

III.5 Le logarithme réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

En particulier, l'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe de $\ln$ en 0^+ .

Preuve :

1. La fonction $\ln$ est croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone que nous verrons plus tard, ou bien elle admet une limite finie L en $+\infty$, ou bien elle tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n \ln(2)$.

Or, comme $\ln$ est strictement croissante, $\ln(1) = 0$ impose $\ln 2 > 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(2) = +\infty$. La fonction $\ln$ ne peut donc être majorée et le résultat.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'où,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\lim_{u = \frac{1}{x}} \ln(u) = -\infty.$$

Théorème 8 :

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Comme la fonction $\ln$ est continue (car dérivable) et strictement monotone sur $]0; +\infty[$, d'après le théorème du même nom, elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\ln]0; +\infty[=]-\infty; +\infty[$.

En particulier, 1 admet un unique antécédent par $\ln$, noté e :

$$\ln(e) = 1 \quad \text{et} \quad e \simeq 2,71828.$$

III.6 Le logarithme est dominé par les fonctions polynômes

Théorème 9 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-.$$

On aura bien mieux avec la **proposition (23)**.

Preuve : Commençons par montrer ces résultats pour $n = 1$:

— On étudie la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier sur $[1; +\infty[$ où elle y est décroissante car :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x} \leq 0.$$

Comme $f(1) = -2$, la fonction f ne prend que des valeurs négatives et on obtient :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient le résultat cherché d'après le théorème d'encadrement.

— Un petit changement de variable $u = \frac{1}{x}$ donne le résultat :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ **fixé**. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{\substack{\uparrow \\ u=x^n}} \frac{\ln u^{\frac{1}{n}}}{u} = \frac{1}{n} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Le raisonnement est identique pour $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

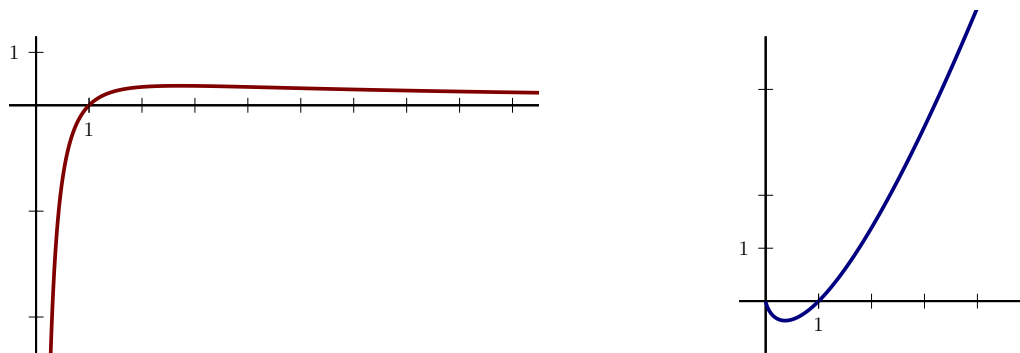


Figure V.7 – Courbes représentatives de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et $x \mapsto x \ln(x)$.

Au voisinage des bornes, la fonction $\ln$ est « écrasée » par les fonctions polynômes qui lui imposent leur limite.

Exemple 8 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

III.7 Le logarithme est au-dessous de ses tangentes

Proposition 10 (Tangentes) :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1. \quad 2. \forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Preuve :

1. On reconnaît un taux d'accroissement. Comme la fonction $\ln$ est dérivable en 1, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln 1}{x - 1} = (\ln)'(1) = \left(\frac{1}{x}\right)(1) = 1.$$

À partir de la limite précédente, on pose $h = 1 + x$:

$$\text{D'où, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{h=1+x} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln(h)}{h-1} = 1.$$

2. La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(x) - (x - 1)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ où l'on a $\varphi'(x) = \frac{1-x}{x}$.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
φ		0	—

La fonction φ admet donc 0 comme maximum.

En particulier, $\forall x \in]0; +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

Remarque : Par une petite translation, on obtient du même coup que, pour tout $x \in]-1; +\infty[,$

$$\ln(1 + x) \leq x.$$

III.8 Courbe représentative

D’après les sections précédentes, on déduit le tableau de variations de $x \mapsto \ln(x)$ à partir du signe de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

On peut alors tracer sa courbe représentative (V.17) ainsi que ^[4] son asymptote et sa tangente en 1 d’équation :

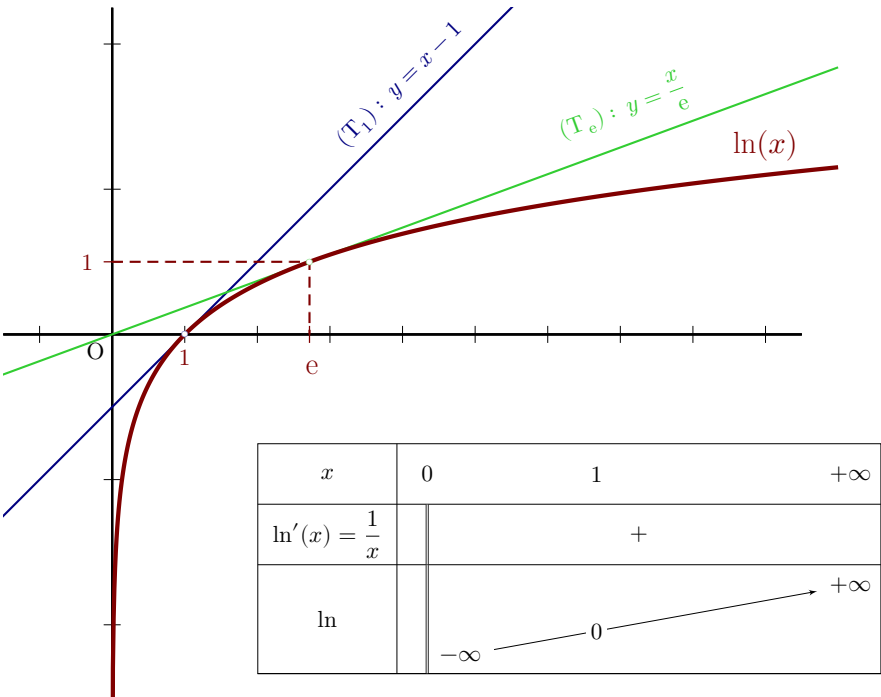
$$(T_1) : y = x - 1.$$


Figure V.8 – Courbe représentative de $x \mapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.

IV/ La fonction exponentielle népérienne

À la toute fin du XIX^{ème}siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs comme l’uranium, le polonium et le radium.

Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence. Partant d’une quantité initiale N_0 , si on désigne par $N(t)$ la quantité d’atomes de radium à l’instant t et $N'(t)$ la variation de celle-ci alors on peut montrer

[4]. Les asymptotes et les tangentes avant la courbe!!!

que cette variation à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présents :

$$\begin{cases} N(0) &= N_0 \\ N'(t) &= -kN(t). \end{cases}$$

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant t le nombre d'atome $N(t)$. Ceci est, par exemple, appliqué pour la datation de matière organique au carbone 14 qui est un isotope radioactif du carbone : connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'a pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

La quantité $N(t)$ est donc solution de l'équation différentielle^[5] $f' = -kf$, ou, sous sa forme simplifiée :

$$f' = f. \quad (\text{V.2})$$

La fonction que nous cherchons est une *solution particulière* de cette équation...

IV.1 L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Rappel 2 : La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

On peut donc envisager sa fonction réciproque.

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de $\ln$, notée $\exp$ telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} \exp(y) = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow]0; +\infty[\\ y &\longmapsto x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0. \quad (\text{V.3})$$

Rapidement, en utilisant la définition d'une fonction réciproque, on obtient :

Théorème 11 :

1. L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

[5]. Une équation liant une fonction à sa dérivée (sa différentielle).

Exercice 6 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \ln(1 - e^x)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 2}{e^{x-2} - 2}$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{5 - e^x}$$

Corollaire 11.1 :

Dans un repère orthonormal, les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve : Notons respectivement $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}_{\ln}$ i.e. $y = \ln(x)$ avec $x \in]0; +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$. Par définition, on a aussi $x = e^y \iff M'(y; x)$ est un point de $\mathcal{C}_{\exp}$. Les courbes $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ se déduisent donc l'une de l'autre par une symétrie d'axe la première bissectrice d'équation $y = x$.

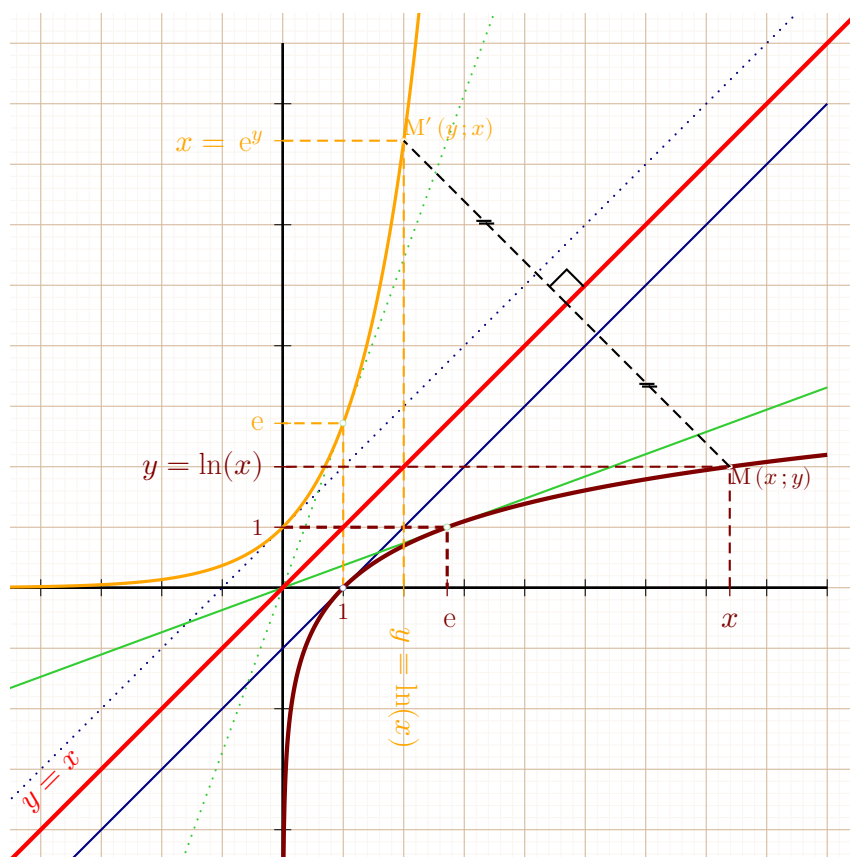


Figure V.9 – Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

IV.2 L'exponentielle est strictement croissante

Théorème 12 (Variations) :

1. La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \exp(x). \quad (\text{V.4})$$

Preuve :

1. Il est inutile d'utiliser la dérivée pour montrer que $\exp$ est strictement croissante. Les propriétés des fonctions réciproques d'une fonction strictement croissante suffisent.
2. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ est bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable et dont la dérivée $\ln' : x \mapsto \frac{1}{x} \neq 0$ ne s'annule pas.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $\exp$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

La fonction $\exp$ est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Remarque 1 : Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.3) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve : En effet, soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. Montrons que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme produit de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x).$$

Or, $f' = f$.

$$= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$. La fonction f ne peut s'annuler et on a la propriété supplémentaire :

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}. \quad (\text{V.6})$$

Remarque 2 : Il n'existe qu'une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.3).

Preuve : En effet Supposons qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant les conditions $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$.

Comme g ne s'annule pas d'après la remarque précédente, on peut définir la fonction h par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sous les hypothèses $f' = f$ et $g' = g$, on a :

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{h} = 0.$$

La fonction h est donc constante à $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.

L'unicité est ainsi prouvée.

Corollaire 12.1 :

Soient a et b deux réels.

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$.
- $\exp(a) = 1 \iff a = 0$ et $\exp(a) > 1 \iff a > 0$.

IV.3 Composée

Proposition 13 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors :

$$(e^u)' = u' \times e^u.$$

Exercice 7 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée des fonction définies par :

$$f_1(x) = e^{-x}$$

$$f_2(x) = \ln(1 + e^x)$$

$$f_3(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)$$

IV.4 L'exponentielle transforme les sommes en produits

Proposition 14 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = e \simeq 2,7182818284590452353602874713526624977572 \\ 4709369995957496696762772407663035354759 \dots$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$1. \exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

$$3. \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

$$2. \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

$$4. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{Q}, \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

Preuve : On démontre le premier point. Les autres s'en déduisent aisément. On s'appuie, pour cela, sur la définition de exp.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. La fonction $\ln$ étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux uniques réels strictement positifs x et y tels que $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$ i.e., de manière équivalente, $x = \exp(a)$ et $y = \exp(b)$.

On a alors :

$$\exp(a + b) = \exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(xy)) = xy = \exp(a) \times \exp(b).$$

Remarques :

- Pour tout rationnel r , la dernière propriété s'écrit $\exp(r) = \exp(1.r) = (\exp(1))^r = e^r$. On étend alors cette expression à tout réel x , en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x.$$

- Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :

- que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 = \exp(0) = \exp(x - x) = e^x \times e^{-x} \implies \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0.$$

En particulier, $\exp(x)$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour tout x .

- que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

On retrouve alors le résultat de (V.1).

Exercice 8 : On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^x + 30e^{-x} = 17$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x - 3) = \ln(17x - 30)$.

Correction :

- Il suffit de factoriser. En remarquant que 2 est racine, on a successivement :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15)$$

On remarque encore que -3 est racine :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15) = (x - 2)(x + 3)(2x - 5).$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{2, -3, \frac{5}{2}\right\}.$$

- En multipliant les deux membres de l'équation par $e^x \neq 0$, on reconnaît $P(e^x) = 0$.

Les seules solutions restantes, par injectivité de $\exp$ sont $\ln(2)$ et $\ln(5) - \ln(2)$.

- Cette équation n'est valide que si $x \in \mathcal{D} =]0; +\infty[\cap \left] \frac{51}{34}; +\infty[\cap \left] \frac{60}{34}; +\infty[= \left] \frac{60}{34}; +\infty[\right.$

$$\left. = \left] \frac{30}{17}; +\infty[\right.$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, 2\ln(x) + \ln(2x - 3) = \ln(17x - 30) &\iff \ln(x^2(2x - 3)) = \ln(17x - 30) \\ &\iff x^2(2x - 3) = 17x - 30 \\ &\iff P(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \left\{ \frac{34}{17}, \frac{85}{34} \right\} = \left\{ 2, \frac{5}{2} \right\}.$$

IV.5 L'exponentielle est prépondérante sur les polynômes

Théorème 15 :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+.$$

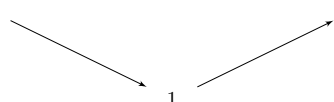
En particulier, l'axe des abscisses est *asymptote* à la courbe en $-\infty$.

Preuve :

1. On va utiliser les théorème de comparaison, en étudiant la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^x - x$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on a $\varphi'(x) = e^x - 1$.

La fonction exp est strictement croissante et on a $e^0 = 1$ d'où le signe de la dérivée et le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	—	0	+
φ			

Du tableau de variation, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0 \iff e^x > x$.

D'après le théorème de comparaison, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$$2. \text{ Enfin, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0^+.$$

Théorème 16 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^{[6]}.$$

[6]. Si nécessaire, on peut affiner un peu suivant la parité de n : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynômes en $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^-$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur $\frac{1}{x^n}$ en $-\infty$.

Ces considérations auront des conséquences sur la représentation graphique et il faudra bien donner l'impression que la courbe « monte ou descend » très vite.

Remarque : On aura bien mieux avec la **proposition (23)**.

Preuve : On commence par démontrer ce résultat pour $n = 1$.

— L'idée est la même que pour la démonstration du **théorème (15)**. On compare cette fois $\exp(x)$ à $\frac{x^2}{2}$ en posant ψ la fonction définie par $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ clairement dérivable sur $\mathbb{R}$.^[7]

On a $\psi'(x) = e^x - x = \varphi(x) > 0$ d'après la démonstration du **théorème (15)** donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et minorée par $\psi(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x > \frac{x^2}{2} \iff \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

— Enfin, pour la deuxième limite, on se ramène à la précédente par un changement de variable judicieux :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X}} = 0.$$

— Considérons alors $n \in \mathbb{N}$ **fixé**, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u = \frac{x}{n}}} \left(\frac{e^u}{nu} \right)^n = \frac{1}{n^n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^u}{u} \right)^n = +\infty.$$

On montre de même la dernière proposition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^-$.

En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$.

Exemple 9 : Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x}$.

On a $x + e^{-x} = e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} + 1 \right) = e^{-x} (x e^x + 1)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$, d'après les théorèmes sur les sommes de limites, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x + 1) = 1$ puis, d'après les théorèmes sur les produits de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (x e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \times 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u = -x}} e^u = +\infty.$$

Exercice 9 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} e^{-x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x - 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

IV.6 L'exponentielle est au-dessus de ses tangentes

Théorème 17 :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1.$

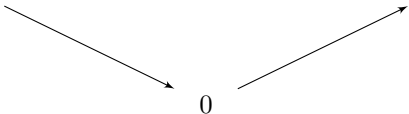
Comme pour le logarithme, la première assertion exprime que la fonction exp se comporte comme la fonction $x \mapsto x + 1$ [8] au voisinage de 0.

Preuve :

1. On reconnaît un taux d'accroissement d'une fonction dérivable en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (\exp)'(0) = e^0 = 1.$$

2. La fonction $\varphi : x \mapsto e^x - (x + 1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ où l'on a $\varphi'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ			

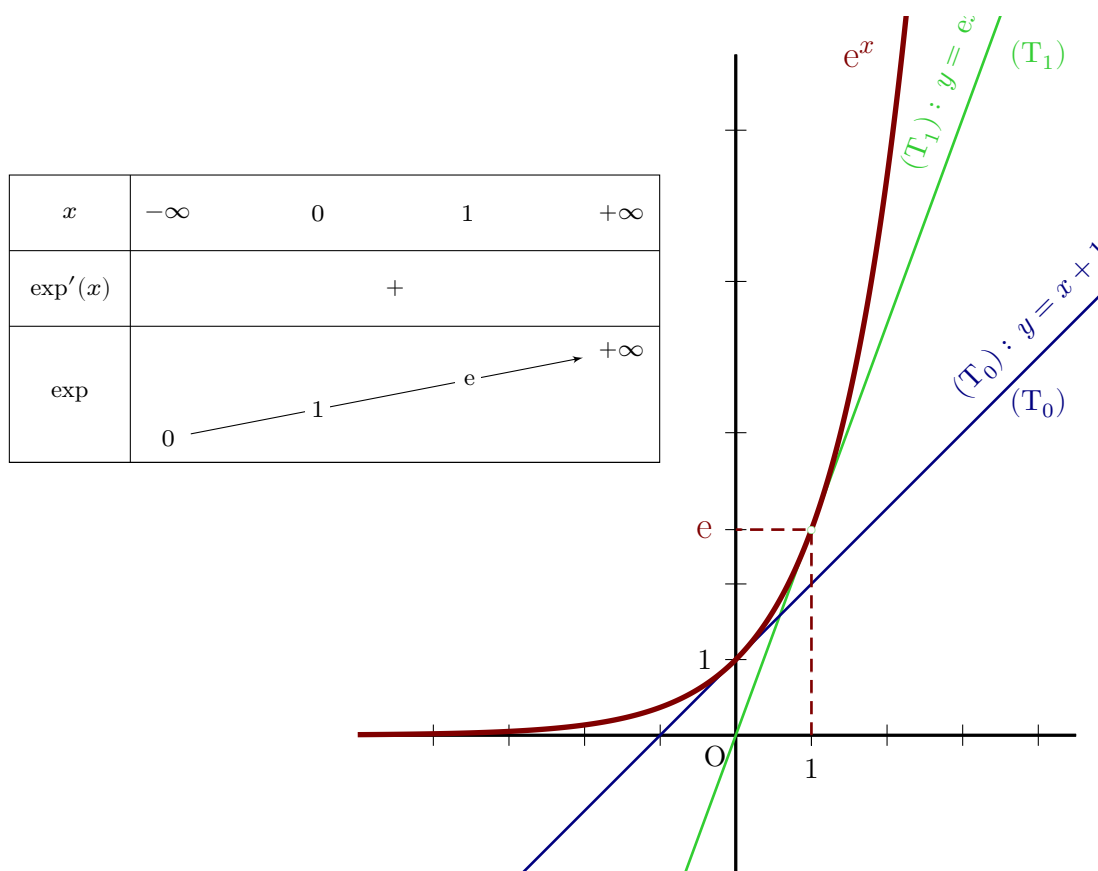
La fonction φ admet donc 0 comme minimum.

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1.$

Remarque : Avec la convexité qui n'est pas au programme, on aurait directement ce résultat.

[8]. Sa tangente en 0 donc.

IV.7 Courbe représentative

Figure V.10 – Courbe représentative de $x \mapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.

V/ Les fonctions puissances

Lorsque n n'est plus entier, la notation $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$, introduite en 4^{ème} ne suffit plus. En effet, que penser de $2^{\frac{5}{3}}$, 3^π ou $7^{\sqrt{2}}$?

Lorsque n est un entier (et a strictement positif),

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \dots \times e^{\ln(a)}}_{n \text{ fois}} = e^{\overbrace{\ln(a) + \ln(a) + \dots + \ln(a)}^{n \text{ fois}}} = e^{n \ln(a)}.$$

V.1 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Définition 5 (Exponentielle de base a) : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x , on pose :

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

On retrouve alors la définition du collège. Cette notation est donc bien cohérente. Cela ne s'arrête pas là puisque l'on récupère aussi toutes les propriétés des puissances entières comme nous le verrons à la [proposition \(20\)](#)

Remarque : $a > 0$ s'impose par le fait que figure $\ln(a)$ dans l'expression.

Exemples 10 : À la calculatrice, on obtient :

$$— 2^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3} \ln 2} \simeq 3,2$$

$$— 3^\pi = e^{\pi \ln 3} \simeq 31,5$$

$$— 7^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 7} \simeq 15,7$$

Exercice 10 : Simplifier les écritures suivantes :

1. $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$.

2. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

3. $27^{\frac{5}{3}}$

Théorème 18 :

Soit a un réel strictement positif fixé.

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(a) a^x.$$

Preuve : La fonction $\exp$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de même que la fonction linéaire $x \mapsto x \ln(a)$.

Par composition, la fonction $x \mapsto e^{x \ln(a)}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, d'après les formules de dérivation d'une fonction composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(a) a^x.$$

Le signe de la dérivée dépend donc de la position de a relativement à 1.

Afin de compléter le tableau de variation, cherchons les limites aux bornes du domaine de définition. Tout dépend de la position de a vis à vis de 1 :

Proposition 19 :

Soit a un réel strictement positif fixé.

$$a > 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0^+.$$

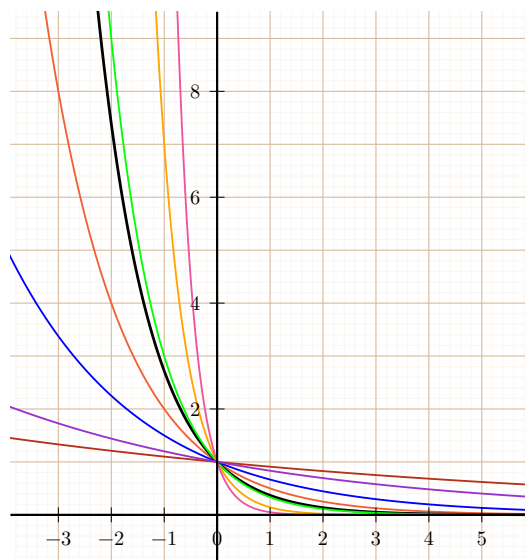
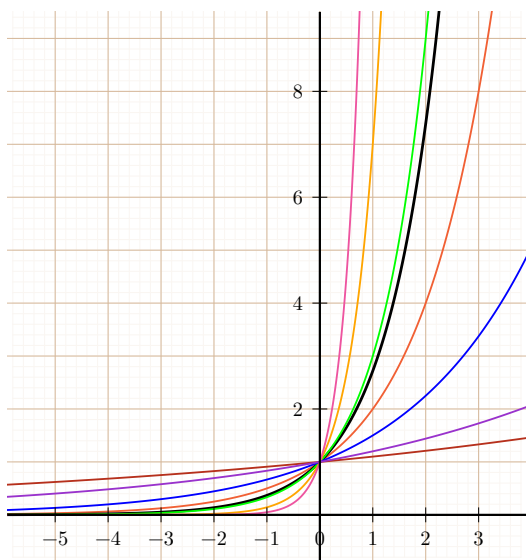
$$a < 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		+	
a^x	0	1	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		-	
a^x	$+\infty$	1	0

Figure V.11 – La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \mapsto a^x$.**Proposition 20 (Propriétés algébriques) :**Pour tous réels a et b strictement positifs et quels que soient les réels r et s , on a :

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$
2. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^r \times b^r = (ab)^r$
5. $\ln(a^r) = r \ln(a)$

La relation 5 est une généralisation de la relation 4 de la proposition (6) .

Preuve : Il suffit d'écrire et d'utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme que l'on connaît :

1. $a^r \times a^s = e^{r \ln(a)} \times e^{s \ln(a)} = e^{(r+s) \ln(a)} = a^{r+s}$.
2. $a^{-r} = e^{-r \ln(a)} = e^{-\ln(a^r)} = \frac{1}{e^{\ln(a^r)}} = \frac{1}{a^r}$.
3. $(a^r)^s = e^{s \ln(a^r)} = e^{s r \ln(a)} = e^{r s \ln(a)} = a^{rs}$.
4. $a^r \times b^r = e^{r \ln(a)} \times e^{r \ln(b)} = e^{r \ln(ab)} = (ab)^r$.
5. $\ln(a^r) = \ln(e^{r \ln(a)}) = r \ln(a)$.

Méthode 3 :Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, u à valeur strictement positive, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle $e^{v(x) \ln u(x)}$ pour en simplifier l'étude.

ATTENTION

La définition (5) permet donc de prolonger les propriétés de a^n en remplaçant $n \in \mathbb{Z}$ par $x \in \mathbb{R}$ ce qui est bien mais ce prolongement a un prix à payer : a doit nécessairement être strictement positif. On ne peut pas tout avoir !

V.2 Fonction puissance réelle

Définition 6 : Pour tout réel α et tout réel x strictement positif, on pose :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Remarque : Comme pour la partie précédente, la présence de $\ln$ restreint le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ à $\mathbb{R}_+^*$. Ce n'est donc qu'un prolongement **partiel** des fonctions polynômiales x^n ou rationnelles $\frac{1}{x^n}$ que vous connaissez.

Exercice 11 : Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants :

1. 3^{-x}

3. $\sqrt{x}$

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$

5. x^x

2. x^2

6. x^{x^x}

Théorème 21 :

Soit α un réel fixé.

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Remarque : Nouvelle preuve de la cohérence de cette notation, on retrouve ici encore la dérivée d'une fonction polynôme lorsque n est entier : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Preuve : La fonction $\ln$ est définie et dérivable de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\exp$ l'est sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $x \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est donc définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a, d'après les formules de dérivation d'une fonction composée :

$$\forall x \in]0; +\infty[, (e^{\alpha \ln(x)})' = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Le signe de la dérivée dépend donc de celui de α .

Afin de compléter le tableau de variation, cherchons les limites aux bornes du domaine de définition. Tout dépend du signe de α :

Proposition 22 :Soit α un réel fixé.

$$\alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

$$\alpha < 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

Rien d'étonnant à ce que l'on retrouve les limites des fonctions $x \mapsto x^n$ pour n entier.

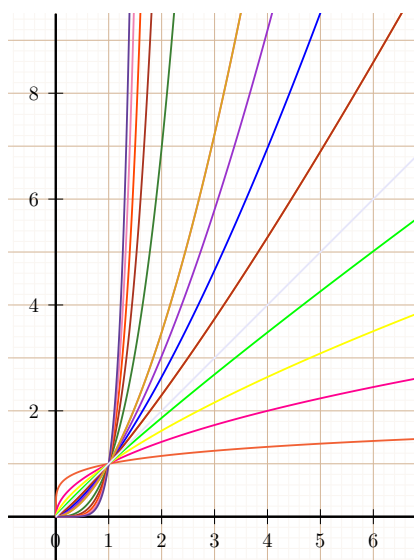
Prolongement par continuité : Dans le cas, $\alpha > 0$, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 0 en posant naturellement $0^\alpha = 0$.

On dit alors que l'on a *prolongé la fonction puissance par continuité* en 0.

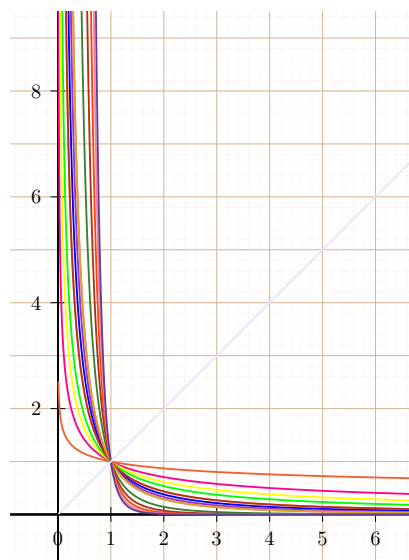
Cette nouvelle fonction puissance qui coïncide avec l'ancienne sur $]0; +\infty[$ est alors définie sur $[0; +\infty[$. On les confondra désormais.

Cas $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0; 1[$) :

x	0	1	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		+	
x^α	0	1	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$:

x	0	1	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		-	
x^α	$+\infty$	1	0

Figure V.12 – Les fonction puissances $x \mapsto x^\alpha$.**ATTENTION**

Pour $\alpha \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, signe qu'elle N'est PAS dérivable en 0. C'est typiquement ce qui arrive à la fonction racine carrée.

Réciprocité : Pour tout réel α non nul et tout $x > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection^[9] de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

La fonction f admet donc une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$ que l'on vérifiera coïncider avec la fonction :

$$f^{-1} : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$$

$$x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$$

[9]. son prolongement plutôt

Enfin, comme pour les courbes de $\ln$ et $\exp$, les courbes des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

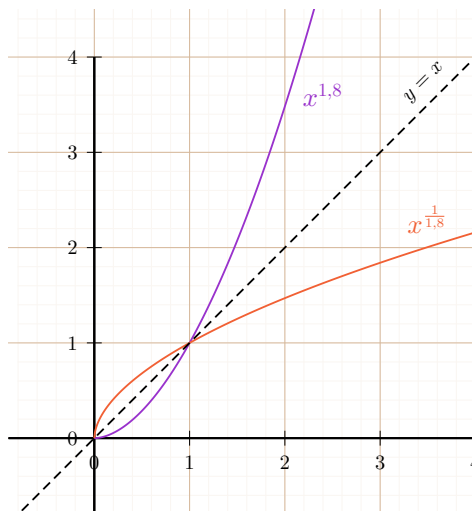


Figure V.13 – Les courbes représentatives de $x \mapsto x^\alpha$ et de sa réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction racine n -ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n -ième*, la réciproque de $f : x \mapsto x^n$ sur $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{} : [0; +\infty[&\longrightarrow [0; +\infty[\\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

De plus, on remarquera que pour tout x strictement positif et $n \geq 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Enfin, si n est impair, on prolonge la définition à $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement *asymptotique* des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. On parle de croissances comparées

Proposition 23 (Croissances comparées) :

Pour tous α, β strictement positifs.

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

Preuve : On s'appuie sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ que l'on connaît déjà.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta} \ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \right)^\alpha.$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \lim_{u = x^{\frac{\beta}{\alpha}} \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \frac{\ln u}{u} = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = \lim_{u = \frac{1}{x}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\ln u)^\alpha}{u^\beta} = 0.$
- $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = e^{\alpha x - \beta \ln(x)} = e^{\left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x}\right)x}$ qui ne pose aucun soucis avec les théorèmes sur les limites.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = \lim_{u = -x} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^{\alpha u}}{u^\beta}} = 0.$

Remarque : Ces résultats nous permettent d'avoir en tête un « classement » des prépondérances en $+\infty$:

$$1 \prec (\ln(x))^\alpha \prec_{\alpha < \alpha'} (\ln(x))^{\alpha'} \prec x^\beta \prec_{\beta < \beta'} x^{\beta'} \prec e^x \prec_{e < f} f^x.$$

Exercice 12 : Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty.$$

$$f_2 : x \mapsto x \ln \sqrt{x} \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty.$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + x^2} \text{ en } \pm\infty.$$

VI/ La fonction logarithme décimal

Définition 7 : On appelle *logarithme décimal*, la fonction, notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Le logarithme népérien est ainsi la « fonction logarithme de base e », la fonction $\log$, celle de base 10 ». Pour tout réel $a > 0$, on peut ainsi définir n'importe quel logarithme de base a que l'on note $\log_a$.

Exemple 11 (Nombre de chiffres en écriture décimale) :

Un nombre $N \geq 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 *i.e.*

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, / 10^p \leq N < 10^{p+1} \quad \text{i.e. } N \text{ possède } p + 1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction $\log$ est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{aligned} \log 10^p &\leq \log N < \log(10)^{p+1} \\ p &\leq \log N < p + 1. \end{aligned}$$

On a donc : $E(\log N) = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $E(\log N) + 1$.

Par exemple, comme $\log(2024^{2025}) \simeq 6695,1$. Le nombre 2024^{2025} s'écrit avec 6696 chiffres !

Un autre, $\log(46!) \simeq 57,76$. On en déduit que $46!$ est un nombre à 58 chiffres !

Proposition 24 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \log(10^x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; +\infty[, 10^{\log(x)} = x.$$

$$\log(10) = 1 \text{ et, d'une manière générale } \forall n \in \mathbb{N}, \log(10)^n = \frac{\ln(10)^n}{\ln(10)} = n \times \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = n.$$

Mieux, la fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel x , associe $e^{x \ln(10)} = 10^x$.

Exercice 13 : Montrer que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 25 :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \text{et} \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$
- $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log(y).$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \log(x^n) = n \log(x) \quad \text{et} \quad \log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log(x).$

Comme $\ln(10) > 0$, les fonctions $\log = \frac{1}{\ln(10)} \times \ln$ et $\ln$ ont les mêmes variations et les mêmes limites.

Proposition 26 :

La fonction $\log$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \log'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}.$$

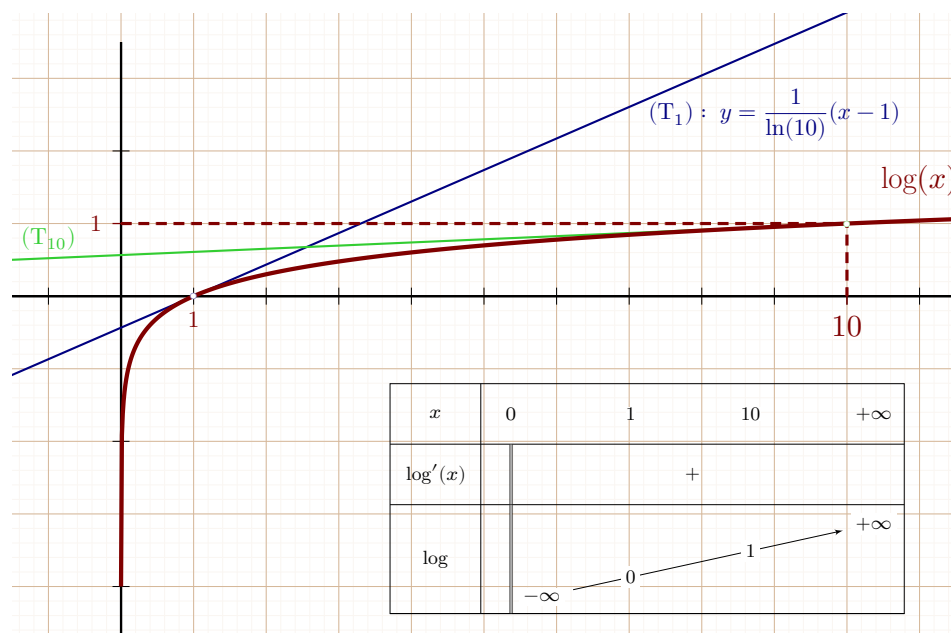


Figure V.14 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \log(x)$ et sa tangente en 1.

Exercice 14 : Exprimer en fonction de $\log(2)$ les nombres suivants :

1. $\log(20)$
2. $\log(2000)$
3. $\log(0,008)$
4. $\log(1,024)$
5. $\log\left(\frac{1}{0,00064}\right)$
6. $\log(1,28 \times 2^{27})$

Parfois, on utilise des unités logarithmiques, c'est-à-dire dont la valeur est le logarithme du rapport entre deux valeurs (v_{min} et v_{max}) d'une grandeur. La base logarithmique choisie dépend des habitudes de la discipline qui les utilisent :

- le logarithme népérien, dont la base est e , facilite certains calculs, mais ne permet pas d'accéder intuitivement à l'ordre de grandeur décimal (cf exemple 11).
- le logarithme décimal (base 10) donne directement une notion de l'ordre de grandeur puisque la caractéristique, c'est-à-dire le signe et la partie avant la virgule, le donne directement.

Par exemple, une échelle, qui va dans la réalité de 10^{-10} à 10^{10} , sera représentée sur un axe allant de -10 à 10 . Très utile en astronomie, statistiques, intensité sonore, magnitude d'un séisme, calcul du pH,...

VII/ Les fonctions hyperboliques

Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.

C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

Plus proche de notre vie quotidienne : la forme d'un câble suspendu dans le vide entre deux points est une chaînette d'équation :

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{où } a > 0.$$

Cette section s'attache à étudier les fonctions hyperboliques définies comme partie paire et impaire de l'exponentielle.

Rappel 3 : Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

— On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la partie paire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

— On appelle fonction *sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

En particulier et par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x).$$

(V.7)

De plus, on a l'identité, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

Remarque : De même que pour les fonctions circulaires, les fonctions « hyperboliques » ch et sh permettent de paramétrer l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$ par :

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch}(t) \\ y = \operatorname{sh}(t) \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15 : Résoudre :

1. $\operatorname{ch}(x) = 2$.

2. $5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$.

3.
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 4 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 1 \end{cases}.$$

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \iff e^x - 4 + e^{-x} = 0 \xrightarrow{e^x} (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$$

$$\iff e^x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } e^x = 2 - \sqrt{3} \xrightarrow{2 \pm \sqrt{3} > 0} x = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Donc $\mathcal{S} = \{\ln(2 + \sqrt{3}); \ln(2 - \sqrt{3})\}$.

Comme ch est strictement positive, la fonction sh sera strictement croissante.

Comme elle s'annule en 0, d'après le théorème de la bijection, elle sera donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ d'où la stricte monotonie de la fonction ch sur ces deux intervalles.

Proposition 27 (Cosinus hyperbolique) :

1. $\operatorname{ch}(0) = 1$.
2. La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.
3. La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} = 0.$$

De même, on a :

Proposition 28 (Sinus hyperbolique) :

1. $\operatorname{sh}(0) = 0$.
2. La fonction sh est impaire.
3. La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$		$-$	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

Figure V.15 – Tableaux de variation de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

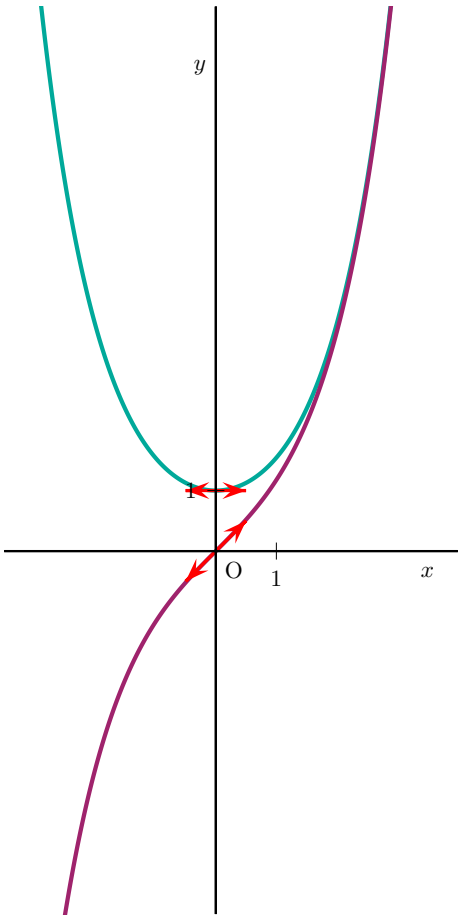


Figure V.16 – Courbes représentatives de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ et leur tangente en 0.

On remarquera, en particulier, que :

1. Les droites d'équation $y = 1$ et $y = x$ sont respectivement tangentes en 0 aux courbes de ch et sh .
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = 0$ entraîne que les courbes des cosinus et sinus hyperboliques ont même *direction asymptotique* qui est celle de $\frac{e^x}{2}$.

Exercice 16 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x) \cos(x) + \operatorname{sh}(x) \sin(x)$.

2. $g : x \mapsto \operatorname{ch}^4(x) \operatorname{sh}^2(x)$.

Exercice 17 : Pour $a > 0$, exprimer $\operatorname{ch} \left(\ln \left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1} \right) \right)$ à l'aide de $\sqrt{a+1}$ uniquement.

VIII/ Tableau récapitulatif _____

$f(x)$	Domaine de définition		Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			0
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$			nx^{n-1}
$x^\alpha, \alpha \in]1; +\infty[$	$\mathbb{R}_+$			$\alpha x^{\alpha-1}$
$x^\alpha, \alpha \in]0; 1[$	$\mathbb{R}_+$		$\mathbb{R}_+^*$	
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$			
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$			$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$				$\frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$			e^x
$a^x, 0 < a$				$\ln(a) \times a^x$
$\operatorname{ch}(x)$				$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{sh}(x)$				$\operatorname{ch}(x)$

Fonctions de référence

I/ Calculs, équations et limites

Exercice 1 :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.
À partir de quel indice n a-t-on $u_n \leq 10^{-3}$?
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9$.

Correction :

1. Par définition, on a $u_n = u_0 \times q^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Il suffit donc de résoudre l'inéquation $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$.

Comme tous les nombres sont strictement positifs, cette équation est équivalente à

$$n \ln \left(\frac{4}{5}\right) \leq -3 \ln 10$$

$$n \geq -\frac{3 \ln 10}{\ln \left(\frac{4}{5}\right)} \qquad \frac{4}{5} < 1 \iff \ln \left(\frac{4}{5}\right) < 0!!!$$

De tête, $-\frac{3 \ln 10}{\ln \left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 30,96$.

Donc, le plus petit indice cherché est $n = 31$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ d'où,

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9 \iff 5^{n+1} \geq 4 \times 10^9 + 1$$

$$\iff n \geq \log_5 (4 \times 10^9 + 1) - 1 \simeq 12,7$$

$$\iff n \geq 13.$$

Exercice 2 : Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x^2 + x + 1$
2. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 19x - 7$ par $x^2 + 3x - 1$
3. $x^5 - x^2 + 2$ par $x^2 + 1$

Exercice 3 : Factoriser les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$$A(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$B(x) = x^2 - 16 + (x - 4)(5x + 7)$$

$$C(x) = 5x^2 - 2x - 3$$

$$D(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$E(x) = x^3 + 1$$

$$F(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$G(x) = x^4 + 1$$

$$H(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 2$$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \ln(0,5) + \ln(2)$$

$$2. \ln(9\sqrt{3})$$

$$3. \frac{e^{-5\ln 2}}{e^{3\ln 5-1}}$$

$$4. \frac{2e}{e^{2+\ln 5}}$$

$$5. \frac{2e}{\sqrt{e}}$$

$$6. 3\ln(e^{-2}) + 4e^{-5\ln e^2}$$

$$7. -5e^{-4} \times (\sqrt{e})^3 \times 2e^2$$

$$8. (0,25)^{(1,5)}$$

$$9. \sqrt[3]{2^4} \sqrt[3]{2^6}$$

$$10. \ln(\sqrt{10} + 3)^4 + \ln(\sqrt{10} - 3)^4$$

$$11. e^{-10x+2} \times (e^{-x-2})^{-2} \times (e^{3x-2})^3$$

$$12. \sqrt{e^{2x}}$$

$$13. \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$14. \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

Exercice 5 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur un domaine à préciser :

$$1. \ln(-2 - 3x) \geq 0$$

$$2. \exp(-2x + 1) > 0$$

$$3. \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$$

$$4. \ln\left(\frac{3}{x}\right) \geq \ln 3$$

$$5. \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$$

$$6. e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$$

$$7. (\ln(x) - 3)(\ln(x) + 1) = 0$$

$$8. e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$$

$$9. \frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$$

$$10. \frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^x + 1} \geq 0$$

$$11. \frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1} = 1$$

$$12. 2^x = 3^{2x+1}$$

$$13. \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$$

$$14. 5^{1-3x} = \frac{1}{125}$$

$$15. 4^x - 6^x = 2 \times 9^x$$

$$16. 2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$$

$$17. x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$$

$$18. 2^{x^3} = 3^{x^2}$$

$$19. 2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$$

$$20. \operatorname{ch}(x) = 2.$$

$$21. 5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$$

Exercice 6 : Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant le système d'équations.

$$1. \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(100) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(60) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4(\log_x(y) + \log_y(x)) = 17 \\ xy = 243 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 7(\log_x(y) + \log_y(x)) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$$

Exercice 7 (Trigonométrie hyperbolique) : Soient a et b deux réels.

Montrer que :

1. Formule d'addition :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) & \text{et} & & \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b). \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) & \text{et} & & \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b). \end{aligned}$$

2. Formule de linéarisation : $\operatorname{ch}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2}$ et $\operatorname{sh}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2}$.

3. Formule de duplication : $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a)$ et $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a)$
 $= 2\operatorname{ch}^2(a) - 1$
 $= 1 + 2\operatorname{sh}^2(a).$

4. Formule de (factorisation par) l'angle moitié

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{et} & & \operatorname{ch}(a) - \operatorname{ch}(b) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right). \\ \operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(b) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{et} & & \operatorname{sh}(a) - \operatorname{sh}(b) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

II/ Étude de fonctions _____

Exercice 8 : On pose $f : x \mapsto e^x$

Représenter l'allure des courbes des fonctions définies par $x \mapsto f(x)-3$, $x \mapsto f(x-2)$, $x \mapsto f(2-x)$, $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ et $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 9 : Étudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{(x+2)^2}$$

$$j : x \mapsto (x+1)e^{-x}$$

$$p : x \mapsto e^{x+1} \times e^{1-x}$$

$$g : x \mapsto \frac{3-5x}{-x^2-x+2}$$

$$k : x \mapsto \frac{e^x}{x}$$

$$q : x \mapsto e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$h : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$l : x \mapsto e^{-x+1}$$

$$r : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$$

$$i : x \mapsto \frac{3x^2-x-2}{x^2-1}$$

$$m : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$$

$$s : x \mapsto \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$$

$$n : x \mapsto \frac{e^{-3x}}{3x-1}$$

$$t : x \mapsto \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$$o : x \mapsto e^{-2x} - e^{-x}$$

$$u : x \mapsto e^{-x} \ln(1+e^x)$$

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 1}$.

- Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$ dont on précisera l'équation.
- Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ) .

Remarque : Une fraction rationnelle admet une *asymptote oblique* si, et seulement si son degré est égal à 1.

Exercice 11 : Soit $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

- Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \neq 1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
- En déduire les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12 :

- Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\text{sh}(x) \geq x$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 13 : Dans chaque cas, calculer la dérivée en précisant rapidement le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes définies par :

$$f_1(x) = \exp(x) \sin(x)$$

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$f_3(x) = \ln(1 - 5x)$$

$$f_4(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$$

$$f_5(x) = \ln^3(1 + 2x)$$

$$f_6(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_7(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$f_8(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f_9(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f_{10}(x) = \frac{3 - 2\ln(x)}{x - 1}$$

$$f_{11}(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$f_{12}(x) = (2 - \ln(x))(1 - \ln(x))$$

$$f_{13}(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$f_{14}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$f_{15}(x) = \frac{x+1}{e^{x-1}}$$

Exercice 14 : En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

$$1. f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

$$2. f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$$

$$3. f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$$

$$4. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x$$

$$5. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$6. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$$

$$7. f : \mathbb{R} \rightarrow]0; 3[\\ x \mapsto \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$$

Exercice 15 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in]0; +\infty[, f(xy) = f(x) + f(y), \quad (\text{V.1})$$

- Déterminer $f(1)$.
- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\beta}{x}$ pour un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.
- En déduire que $f = \beta \ln$.
- Montrer que toute fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant la relation (V.1) est proportionnelle à la fonction logarithme népérien.

Correction : Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent.

- Pour $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$ (nécessairement).
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant par rapport à $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$xf'(xy) = f'(y).$$

- Pour $y = 1$, on obtient $f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{\beta}{x}$ où $\beta = f'(1)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors $f(x) = \beta \ln(x) + \gamma$ où $\gamma = f(1) - \beta \ln(1) = f(1) = 0$.
- En conclusion, on a nécessairement $f(x) = \beta \ln(x)$.

Réciproquement, si f est définie par une expression de la forme $\beta \ln(x)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ alors f vérifie la relation (V.1).

La relation (V.1) est une propriété caractéristique des fonctions logarithmes comme fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ la vérifiant.

Ce théorème caractérise le logarithme népérien comme le générateur de toutes les fonctions dérivables vérifiant la relation (V.1).

L'ensemble de celles-ci est alors une droite vectorielle dirigée par $\ln$.

Exercice 16 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) \times f(y), \quad (\text{V.2})$$

- Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- En déduire $f(0)$.
- Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à préciser.
- En déduire que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (V.2) est une puissance de l'exponentielle de base e i.e. s'écrit sous la forme :

$$f(x) = (e^x)^k = e^{kx}, \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Correction : Considérons une fonction f vérifiant (V.2).

- S'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors f est la fonction nulle car, dans ce cas :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) \times f(x - x_0) = 0.$$

- Si f n'est pas la fonction nulle alors elle ne peut donc pas s'annuler et on obtient en particulier :

$$f(x) = f(0) \times f(x) \iff f(0) = 1.$$

- Soit x fixé dans $\mathbb{R}$, en dérivant par rapport à y , on obtient $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$. Ce qui donne, pour $y = 0$:

$$f'(x) = f'(0) \times f(x) = \lambda f(x).$$

- La fonction f cherchée est donc solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ dont les fonctions $x \mapsto \exp(\lambda x)$ sont solutions.

Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle et les fonctions du type $x \mapsto \exp(\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifient la relation (V.2).

Exercice 17 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

- Domaine de définition.
- Limites aux bornes du domaine de définition.
- Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
- Courbe représentative.

Correction :

- La fonction f est définie si, et seulement si $1 + \frac{1}{x} > 0$ donc

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

- On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X=\frac{1}{x}} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de composées :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e.$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = e$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X=\frac{1}{x}} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} \ln \left(1 + \frac{1}{X}\right) = 0$. D'après les théorèmes sur les limites de composées, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow -1^-} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{u=1+\frac{1}{x}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{u-1} = +\infty$. Par composition, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $x = -1$.

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$.

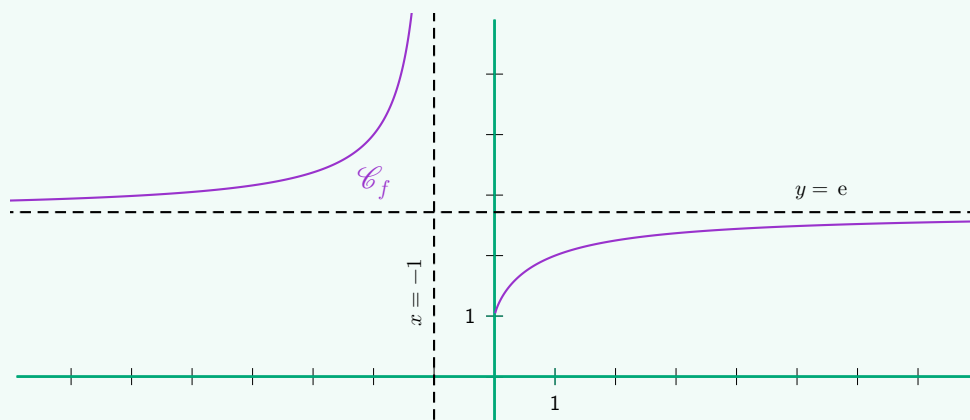
On pose alors $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ qui est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et où :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	e	$+\infty$	1	e

On trace les deux asymptotes puis la courbe représentative :



Exercice 18 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = |\ln |x||$.

1. Domaine de définition et domaine d'étude.

2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité. Dérivabilité en 1 et -1 . Tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Correction :

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

$\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

On étudiera donc f seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.

2. D'après les théorèmes sur les limites de composées, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$. La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.
3. $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto \ln |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Par symétrie, f est dérivable sur $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|\ln |1+h||}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Pour $(-1 <) h < 0$, $1+h < 1$ donc $\ln(1+h) < 0$ et $|\ln(1+h)| = -\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|\ln |1+h||}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ± 1 .

Enfin,

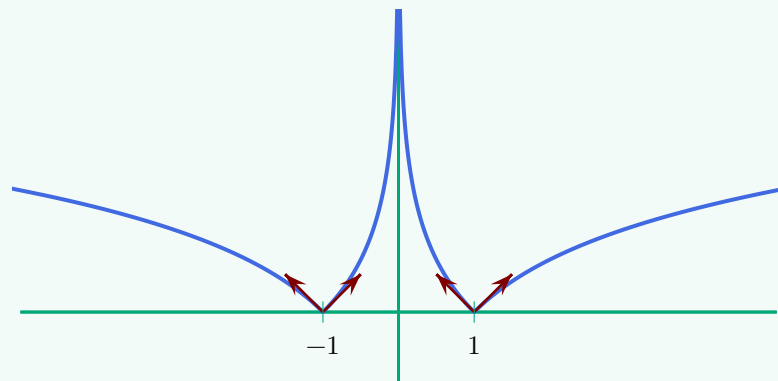
(a) $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Donc, f est strictement croissante.

(b) $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{x}$. Donc, f est strictement décroissante.

On en déduit la tableau de variation complet par symétrie :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-	+
f	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0		0		0	

4.



Exercice 19 : Soit f l'application définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1$, déterminer le signe de $f'(x)$.

3. Étudier les variations de f ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que f établit une bijection de $[0; +\infty[$ dans lui-même.
(b) Sans aucun calcul, donner les propriétés de l'application réciproque f^{-1} (continuité, dérivabilité, variations). Préciser les valeurs $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormal f et f^{-1} .

Exercice 20 : Étude complète de la fonction th définie par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

On montrera, notamment, que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser et on s'interrogera sur la dérivabilité de sa réciproque.

Bonus : Simplifier les expressions $A = \frac{\text{ch}(\ln(x)) + \text{sh}(\ln(x))}{x}$ et $B = \ln\left(\sqrt{\frac{1 + \text{th}(x)}{1 - \text{th}(x)}}\right)$.

Fonctions de référence

Compléter :

Rappel 1 : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée $\ln$, l'unique primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\mathcal{D}_{\ln} =]0; +\infty[.$$

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$

$x \mapsto \frac{2-x}{x-1}$ est définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $x \in]1; 2[$ donc $\mathcal{D}_f =]1; 2[$.

Théorème 4 (Variations) :

- $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
- $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 5 :

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Exercice 2 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée de $f : x \mapsto \ln \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right)$.

$x \mapsto \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ est définie si, et seulement si $x \neq 0$ et du signe de son dénominateur.

Donc $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

Sur cet intervalle $x \mapsto \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et à valeurs strictement positives donc f est dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)(e^{2x} - 1)}.$$

Commentaires : Vous venez de montrer que $(\ln(\operatorname{th}(x)))' = \frac{2}{\operatorname{sh}(2x)}$.

Proposition 6 (Propriétés algébriques) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

4. $\forall n \in \mathbb{Q}, \ln(a^n) = n \ln(a)$.

Exercice 3 : Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7}$.

Par croissance du logarithme :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7} \iff -n \ln(3) \leq -7 \ln(10) \iff n \geq 7 \frac{\ln(10)}{\ln(3)} \text{ avec } \ln(3) > \ln(1) > 0!$$

Sans calculatrice, $\ln(10) > \ln(e^2) = 2$ et $\ln(3) \simeq \ln(e) = 1$. On prendra pour n un peu plus que 2×7 soit $n = 15$.

Exercice 4 : On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^x + 30e^{-x} = 17$.

1. Il suffit de factoriser. En remarquant que 2 est racine, on a successivement :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15)$$

On remarque encore que -3 est racine :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15) = (x - 2)(x + 3)(2x - 5).$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{2, -3, \frac{5}{2}\right\}$.

2. En multipliant les deux membres de l'équation par $e^x \neq 0$, on reconnaît $P(e^x) = 0$.

Les seules solutions restantes, par injectivité de $\exp$, sont $\ln(2)$ et $\ln(5) - \ln(2)$.

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

$$— \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

$$— \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

En particulier, l'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe de $\ln$ en 0^+ .

Théorème 8 :

La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 9 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$— \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-.$$

$$— \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+.$$

Exemple 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$

Proposition 10 (Tangentes) :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

$$2. \forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

La courbe représentative de $\ln$ admet pour tangente :

- en 1, la droite d'équation $(T_1) : y = x - 1$.
- en e , la droite d'équation $(T_e) : y = \frac{1}{e}x$.

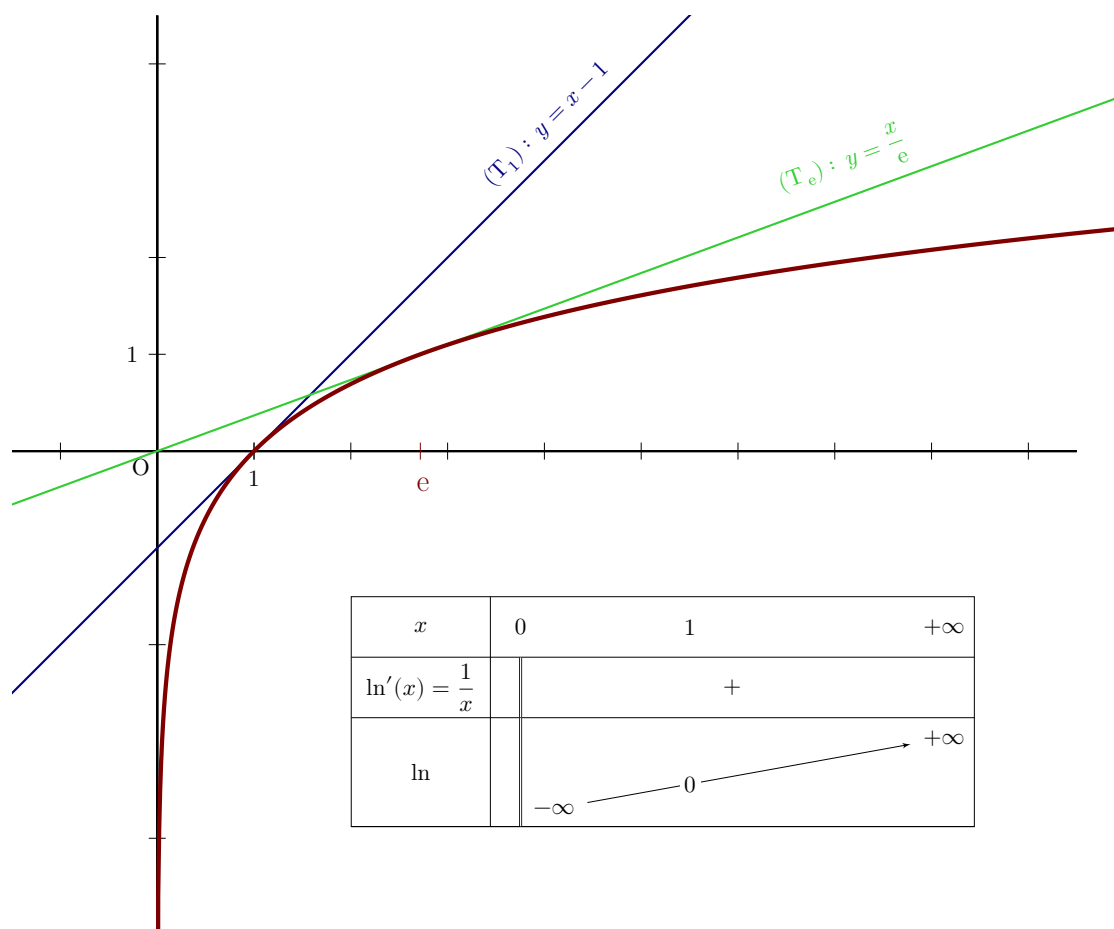


Figure V.17 – Courbe représentative de $x \mapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e .

Fonctions de référence

Compléter :

Rappel 1 : La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de $\ln$, notée $\exp$ telle que :

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\longrightarrow]0; +\infty[\\ y &\longmapsto x \text{ tel que } \ln(x) = y.\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0. \quad (\text{V.1})$$

Rapidement, en utilisant la définition d'une fonction réciproque, on obtient :

Théorème 11 :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{5 - e^x}$.

$x \mapsto 5 - e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives si, et seulement si $x \leq \ln(5)$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; \ln(5)[$.

Théorème 12 (Variations) :

- La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \exp(x). \quad (\text{V.2})$$

La fonction $\exp$ est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Proposition 13 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors :

$$(e^u)' = u' \times e^u.$$

Exercice 2 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée de $f : x \mapsto \ln \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right)$.

$x \mapsto \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ est définie si, et seulement si $x \neq 0$ et du signe de son dénominateur.

Donc $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

Sur cet intervalle $x \mapsto \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et à valeurs strictement positives donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)(e^{2x} - 1)}.$$

Commentaires : Vous venez de montrer que $(\ln(\operatorname{th}(x)))' = \frac{2}{\operatorname{sh}(2x)}$.

Proposition 14 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = e \simeq 2,7182818284590452353602874713526624977572$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$1. \exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

$$3. \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

$$2. \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

$$4. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{Q}, \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

Exercice 3 : On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x - 3) = \ln(17x - 30)$. On pensera au domaine de définition !

1. Il suffit de factoriser. En remarquant que 2 est racine, on a successivement :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15)$$

On remarque encore que -3 est racine :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x - 2)(2x^2 + x - 15) = (x - 2)(x + 3)(2x - 5).$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{2, -3, \frac{5}{2}\right\}$.

2. Cette équation n'est valide que si $x \in \mathcal{D} =]0; +\infty[\cap \left] \frac{51}{34}; +\infty[\cap \left] \frac{60}{34}; +\infty[= \left] \frac{60}{34}; +\infty[= \left] \frac{30}{17}; +\infty[.$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}, 2\ln(x) + \ln(2x - 3) = \ln(17x - 30) &\iff \ln(x^2(2x - 3)) = \ln(17x - 30) \\ &\iff x^2(2x - 3) = 17x - 30 \\ &\iff P(x) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \left\{\frac{34}{17}, \frac{85}{34}\right\} = \left\{2, \frac{5}{2}\right\}.$

Théorème 15 :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+.$$

En particulier, l'axe des abscisses est *asymptote* à la courbe en $-\infty$.

Théorème 16 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Exemple 1 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(x e^x + 1) = +\infty.$

Théorème 17 :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$$

La courbe représentative de $\exp$ admet pour tangente :

- en 0, la droite d'équation $(T_0) : y = x + 1$.
- en 1, la droite d'équation $(T_1) : y = ex$.

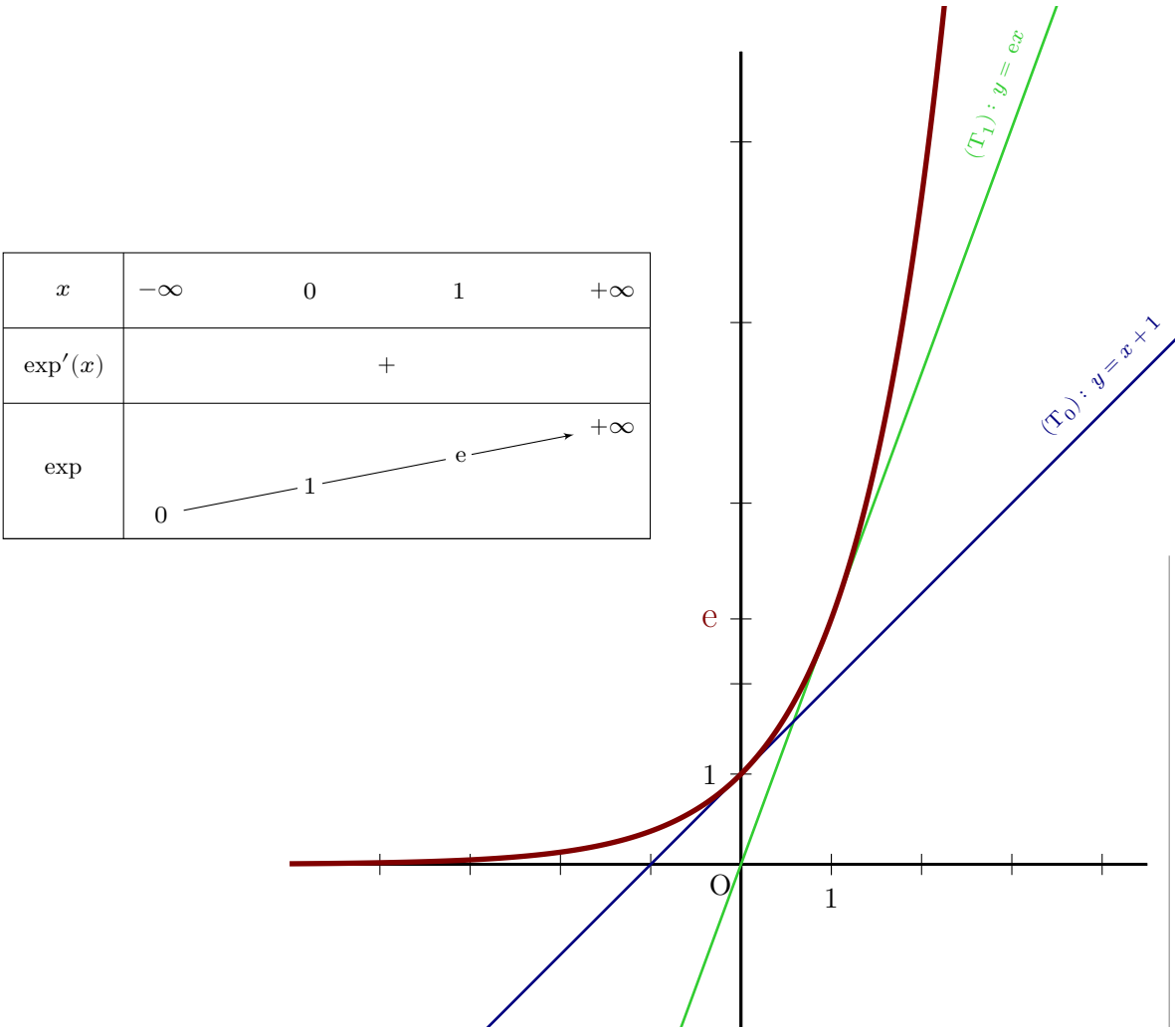


Figure V.18 – Courbe représentative de $x \mapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.

Fonctions de référence 2

Compléter :

I/ Fonction exponentielle de base a _____

Définition 5 (Exponentielle de base a) : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x , on pose :

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Théorème 18 :

Soit a un réel strictement positif fixé.

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(a) a^x.$$

Proposition 19 :

Soit a un réel strictement positif fixé.

$$a > 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0^+.$$

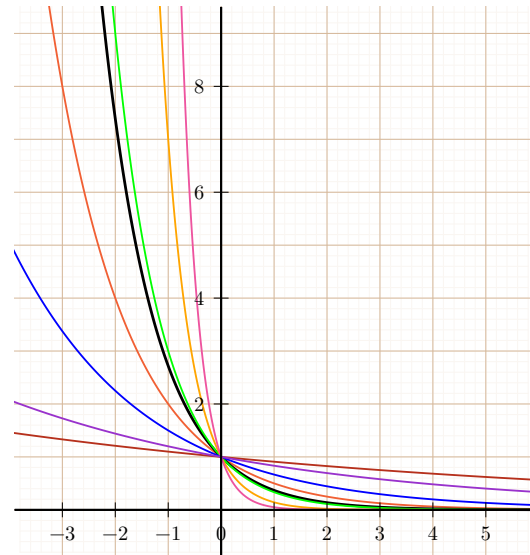
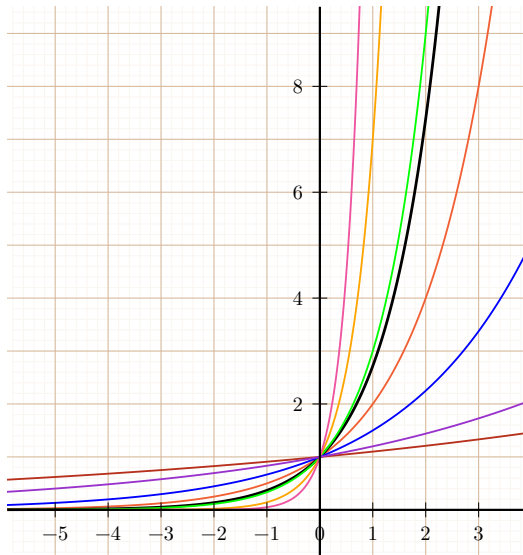
$$a < 1 : \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		+	
a^x	0	1	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		-	
a^x	$+\infty$	1	0

Figure V.19 – La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \mapsto a^x$.**Proposition 23 (Croissances comparées) :**Pour tous α, β strictement positifs :

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0.$$

II/ Les fonctions hyperboliques**Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :**

— On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la partie paire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x).$$

Proposition 27 (Cosinus hyperbolique) :

$$1. \operatorname{ch}(0) = 1.$$

2. La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.

3. La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} = 0.$$

On considère $f : x \mapsto f(x) = \ln \left(\frac{1 + e^x}{1 - e^x} \right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

La fonction $x \mapsto \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$ est définie si, et seulement si $e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

La fonction $\ln$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on résout rapidement

$$\frac{1 + e^x}{1 - e^x} > 0 \Leftrightarrow (-1 <) e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Prenant l'intersection des deux ensembles précédents, on trouve donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[$.

2. Déterminer et justifier rigoureusement $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Pour tout réel strictement négatif x , $e^x < 1$ donc $1 - e^x > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - e^x = 0^+$.

Comme $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$, d'après les théorèmes sur les limites de composées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - e^x} = +\infty.$$

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de produits,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 - e^x} \times (1 + e^x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1 - e^x} = +\infty.$$

Enfin, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$ et les théorèmes sur les composées de limites, entraînent

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

Sur $]-\infty; 0[$, $x \mapsto \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$, fonction homographique de dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et à valeurs strictement positives d'après la première question donc f y est également dérivable et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{2e^x}{1 - e^{2x}}.$$

4. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

D'après la question précédente, la dérivée de f est du signe de $1 - e^{2x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

On pouvait aussi remarquer que f est la composée de $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$, strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec les fonctions strictement croissantes $\ln$ et $\exp$. On retrouvait le même résultat.

La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image $(\mathbb{R}_+^*)$. Elle y établit donc une bijection.

5. Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \ln \left(\frac{1 + e^x}{1 - e^x} \right) \iff \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = e^y \underset{1 - e^x \neq 0}{\iff} (1 + e^y) e^x = e^y - 1 \underset{1 + e^y \neq 0}{\iff} e^x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1} > 0 \iff x = \ln \left(\frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right).$$

Donc, $f^{-1} : x \mapsto \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $]0; +\infty[$ en déterminant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Fonctions de référence

Compléter :

I/ Fonction puissance réelle _____

Définition 6 : Pour tout réel α et tout réel x strictement positif, on pose :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Théorème 21 :

Soit α un réel fixé.

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

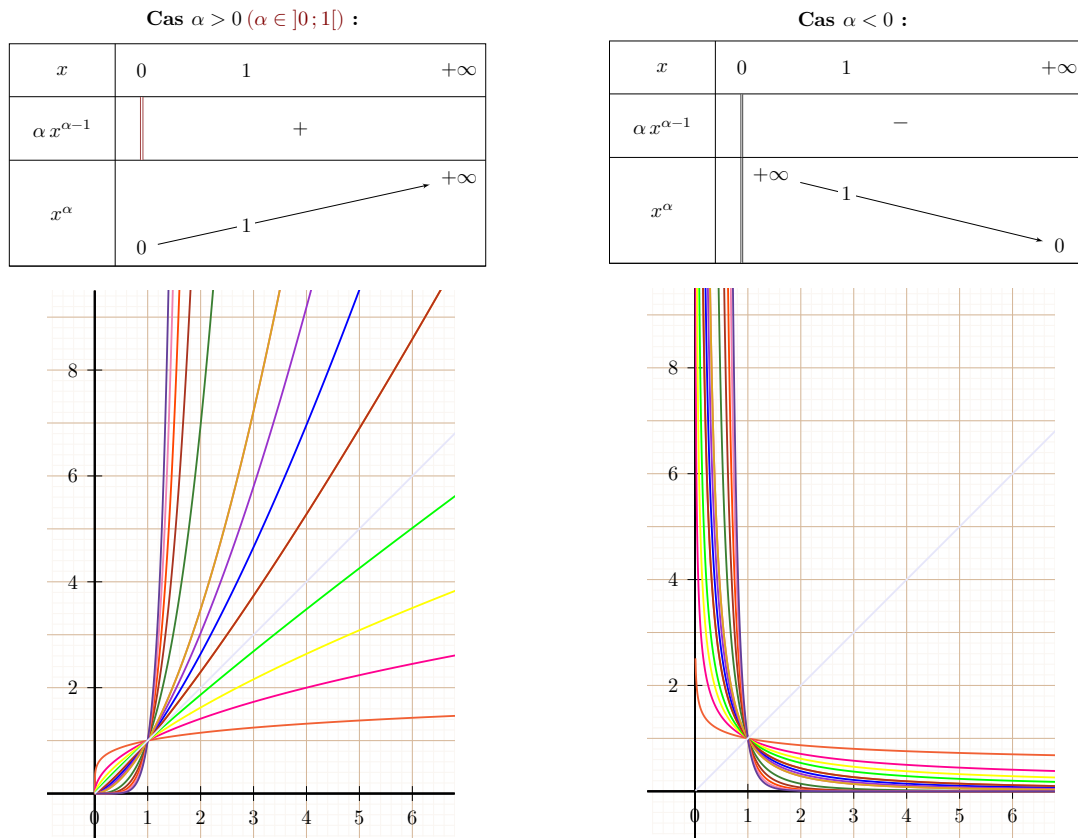
$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Proposition 22 :

Soit α un réel fixé.

$$\alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

$$\alpha < 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

Figure V.20 – Les fonction puissances $x \mapsto x^\alpha$.**Proposition 23 (Croissances comparées) :**

Pour tous α, β strictement positifs .

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

II/ Les fonctions hyperboliques**Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :**

— On appelle fonction *sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De plus, on a l'identité, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

Proposition 28 (Sinus hyperbolique) :

1. $\operatorname{sh}(0) = 0$.
2. La fonction sh est impaire.

3. La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty.$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty.$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1.$

On considère $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\ln(1 - e^x)}.$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

La fonction $\ln$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$ donc on résout rapidement $1 - e^x > 0 \iff x < 0$.

De plus, $e^x \neq 0 \iff 1 - e^x \neq 1 \iff \ln(1 - e^x) \neq 0$.

Donc, $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[$.

2. Déterminer et justifier rigoureusement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Pour tout $x < 0$, $e^x > 0$ donc $1 - e^x < 1$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^x = 1^-.$$

Comme $\lim_{u \rightarrow 1^-} \ln(u) = 0^-$, d'après les théorèmes sur les composées de limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - e^x) = 0^-.$$

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, d'après les mêmes théorèmes, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

Sur $]-\infty; 0[$, $x \mapsto 1 - e^x$ est dérivable et à valeurs strictement positives donc $x \mapsto \ln(1 - e^x)$ y est également dérivable. Ne s'annulant pas, son inverse f est également dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{e^x}{(1 - e^x)(\ln(1 - e^x))^2}.$$

4. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

Par composition, il est tout à fait évident que f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$. Il est donc tout à fait inutile d'avoir recours au signe de la dérivée, de la question précédente même si celle-ci, du signe de $1 - e^x > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ confirme notre réponse.

La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-$ sur son image ($\mathbb{R}_-$). Elle y établit donc une bijection.

5. Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_-$.

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \frac{1}{\ln(1 - e^x)} \neq 0 \iff 1 - e^x = e^{\frac{1}{y}} \iff 0 < e^x = 1 - e^{\frac{1}{y}} \iff x = \ln\left(1 - e^{\frac{1}{y}}\right).$$

Donc, $f^{-1} : x \mapsto \ln \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $] -\infty ; 0[$ en déterminant $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^-$.

Une fonction sympathique

1. Faire l'étude complète de la fonction :

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}. \end{aligned}$$

(Domaine de définition, domaine d'étude, branches infinies, dérivabilité, tangente en 0, courbe représentative.)

2. (a) Pour tout x réel, exprimer $\text{th}(2x)$ en fonction de $\text{th}(x)$.

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$.

- (c) (★) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression plus simple sur $\mathbb{R}$ de

$$S_n(x) = \text{th}(x) + 2\text{th}(2x) + \dots + 2^{n-1}\text{th}(2^{n-1}x).$$

3. (a) Montrer que th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. On notera argth cette réciproque.
 (b) Montrer que argth est dérivable sur J . Préciser sa dérivée et l'équation de sa tangente en 0.
 (c) Sur le même graphique que celui de la courbe représentative de th , tracer (en justifiant) celle de argth .

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln \left(\sqrt{\frac{1 + \text{th}(x)}{1 - \text{th}(x)}} \right) = x.$$

En déduire une expression explicite de $\text{argth}(x)$ sur J .

5. (a) Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, $\text{th}(p+q) = \frac{\text{th}(p) + \text{th}(q)}{1 + \text{th}(p)\text{th}(q)}$.
 (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\text{th}(5x)$ en fonction de $\text{th}(x)$.

Une fonction sympathique

Commentaires : *Cessez d'écrire « la fonction $\text{th}(x)$, $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$ » ! C'est dramatique de ne pas faire la différence en prépa entre une valeur et un objet ! Même remarque pour ceux qui confondent la fonction et sa courbe. Faites un effort avant que je barre !*

1. Les fonctions sh et ch sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1 > 0$ donc th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

De plus, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine et, par parité et imparité respectivement de ch et sh , la fonction th est impaire.

Commentaires : *Dernière fois que je tolère que vous ne parliez pas de la symétrie de l'intervalle de définition !*

On l'étudiera donc sur $[0; +\infty[$ et on complètera la courbe par symétrie de centre O.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ d'après les théorèmes sur les limites de somme puis de quotient.

En particulier, la courbe de th admet respectivement les asymptotes d'équation $y = \pm 1$ en $\pm\infty$.

La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0.$$

(ou $= 1 - \text{th}^2(x)$.)

En particulier, la tangente en 0, a pour équation $(T_0) : y = x$.

On en déduit le tableau de variations ainsi que la courbe représentative :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\text{th}'(x)$	+	
th	-1	1

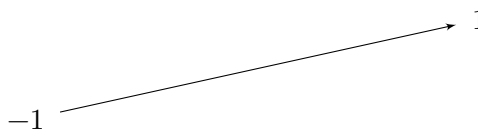
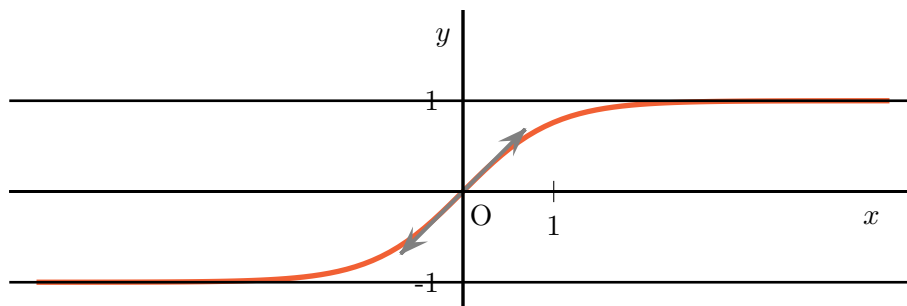


Figure V.21 – Tableau de variation $x \mapsto \text{th } x$ sur $\mathbb{R}$.

Figure V.22 – Courbe représentative de $x \mapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(2x) &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{\frac{1}{2}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2)} \\ &= \frac{2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + 1} = \frac{2\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}^2(x) + 1}. \end{aligned}$$

- (b) On peut factoriser le membre de droite de l'égalité voulue mais aussi se servir de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}^2(x) + 1} \iff \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} = \frac{\operatorname{th}^2(x) + 1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

$$\text{Donc, } \forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

- (c) Pour $x = 0$, il est clair que $S_n(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \operatorname{th}(x) + 2\operatorname{th}(2x) + \dots + 2^{n-1}\operatorname{th}(2^{n-1}x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} \right) \\ &= \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{2^0}{\operatorname{th}(2^0 x)} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique.} \\ &= \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion, } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Commentaires : On verra plus tard, que cette expression se prolonge par continuité pour $x = 0$.

3. (a) D'après la première question, th est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème du même nom, elle établit donc une bijection tout aussi strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur son image $J = \operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1; 1[$.

Sa bijection réciproque, notée argth , est donc définie sur $] -1; 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Commentaires : Cessez de me parler d'injectivité et de surjectivité. Le théorème de la bijection est bien plus fort que ça et il ne demande que trois choses et les seules que je veux voir dans votre rédaction :

CONTINUE, STRICTEMENT CROISSANTE
(ou décroissante) et INTERVALLE!

- (b) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ où sa dérivée ne s'y annule pas donc argth est dérivable sur tout J et on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{(x \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(x)) (\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Comme $\operatorname{th}(0) = 0$ alors $\operatorname{argth}(0) = 0$ et on a $\operatorname{argth}'(0) = 1$.

L'équation de la tangente en 0 à la courbe de argth est donc $y = x$.

Commentaires : Les courbes de th et argth sont donc, toutes deux, tangentes à la première bissectrice en 0.

- (c) De l'étude précédente, on en déduit le tableau de variations ainsi que la courbe représentative.

En particulier, $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \operatorname{argth}(x) = \pm \infty$. Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes à la courbe de argth .

x	-1	1
$\operatorname{argth}'(x)$		+
argth	$-\infty$	$+\infty$

Figure V.23 – Tableau de variation $x \mapsto \operatorname{argth} x$ sur $\mathbb{R}$.

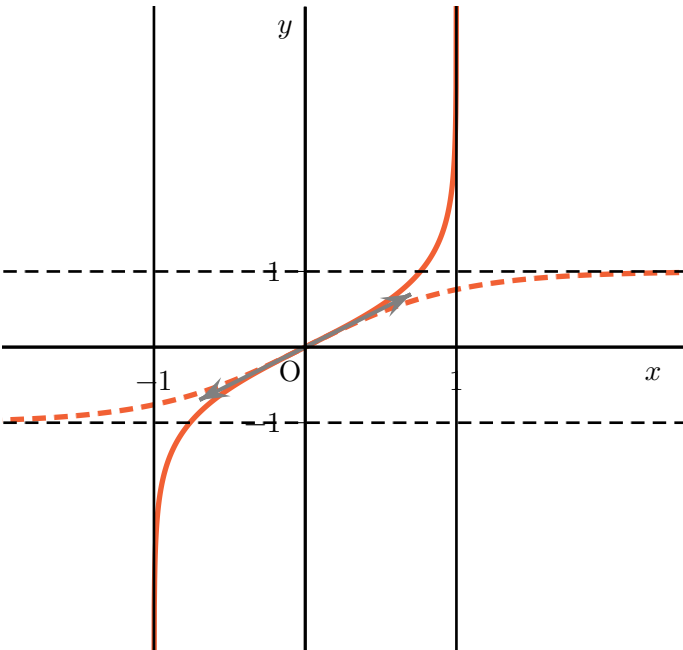


Figure V.24 – Courbe représentative de $x \mapsto \operatorname{argth} x$ sur $] -1 ; 1 [$.
En dash, la courbe de th et ses asymptotes.

4. D'après la première question, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) \neq 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positive si, et seulement si $\operatorname{th}(x) \in]-1; 1[$.

L'expression $\ln \left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)}} \right)$ est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)}} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2e^x}{2e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) \\ &= x. \end{aligned}$$

Conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{th}(x)}{1 - \operatorname{th}(x)}} \right) = x$.

Pour tout $x \in]-1; 1[$, $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

5. (a) Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Toutes les expressions sont définies car $|\operatorname{th}(p)\operatorname{th}(q)| < 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(p+q) &= \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch}(p+q)} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(p)\operatorname{ch}(q) + \operatorname{sh}(q)\operatorname{ch}(p)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q) + \operatorname{sh}(q)\operatorname{sh}(p)} \quad \text{On factorise et simplifie par } \operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q) \neq 0 \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sh}(p)}{\operatorname{ch}(p)} + \frac{\operatorname{sh}(q)}{\operatorname{ch}(q)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(q)\operatorname{sh}(p)}{\operatorname{ch}(q)\operatorname{ch}(p)}} \\ &= \frac{\operatorname{th}(p) + \operatorname{th}(q)}{1 + \operatorname{th}(p)\operatorname{th}(q)}. \end{aligned}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\operatorname{th}(5x) = \frac{\operatorname{sh}(5x)}{\operatorname{ch}(5x)}$. Les fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}(5x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(5x)$ sont respectivement les parties impaires et paires de la fonction $x \mapsto e^{5x}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} e^{5x} &= (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x))^5 \\ &= \operatorname{sh}^5(x) + 5\operatorname{sh}^4(x)\operatorname{ch}(x) + 10\operatorname{sh}^3(x)\operatorname{ch}^2(x) \\ &\quad + 10\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^3(x) + 5\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^4(x) + \operatorname{ch}^5(x). \end{aligned}$$

Par unicité des parties paire et impaire d'une fonction (et en particulier de $x \mapsto e^{5x}$), on peut identifier :

$$\begin{cases} \operatorname{sh}(5x) = \operatorname{sh}^5(x) + 10\operatorname{sh}^3(x)\operatorname{ch}^2(x) + 5\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^4(x); \\ \operatorname{ch}(5x) = 5\operatorname{sh}^4(x)\operatorname{ch}(x) + 10\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^3(x) + \operatorname{ch}^5(x). \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(5x) &= \frac{\operatorname{sh}^5(x) + 10\operatorname{sh}^3(x)\operatorname{ch}^2(x) + 5\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^4(x)}{5\operatorname{sh}^4(x)\operatorname{ch}(x) + 10\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}^3(x) + \operatorname{ch}^5(x)} \\ &= \frac{\operatorname{th}^5(x) + 10\operatorname{th}^3(x) + 5\operatorname{th}(x)}{5\operatorname{th}^4(x) + 10\operatorname{th}^2(x) + 1} \quad \text{en factorisant par } \operatorname{ch}^5(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Commentaires : Une autre méthode pour utiliser la relation précédente :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait déjà que $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \operatorname{th}(3x) = \operatorname{th}(2x + x) &= \frac{\operatorname{th}(2x) + \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(2x)\operatorname{th}(x)} = \frac{\frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)} + \operatorname{th}(x)}{1 + \frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)} \times \operatorname{th}(x)} \\ &= \frac{3\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}^3(x)}{1 + 3\operatorname{th}^2(x)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } \operatorname{th}(5x) = \operatorname{th}(2x + 3x) &= \frac{\operatorname{th}(2x) + \operatorname{th}(3x)}{1 + \operatorname{th}(2x)\operatorname{th}(3x)} = \frac{\frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)} + \frac{3\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}^3(x)}{1 + 3\operatorname{th}^2(x)}}{1 + \frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)} \times \frac{3\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}^3(x)}{1 + 3\operatorname{th}^2(x)}} \\ &= \frac{2\operatorname{th}(x)(1 + 3\operatorname{th}^2(x)) + (3\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}^3(x))(1 + \operatorname{th}^2(x))}{(1 + \operatorname{th}^2(x))(1 + 3\operatorname{th}^2(x)) + 2\operatorname{th}(x)(3\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}^3(x))} \\ &= \frac{\operatorname{th}^5(x) + 10\operatorname{th}^3(x) + 5\operatorname{th}(x)}{5\operatorname{th}^4(x) + 10\operatorname{th}^2(x) + 1}. \end{aligned}$$

Cette formule n'a aucun intérêt et n'était là que pour vous faire prendre de la hauteur vis-à-vis du calcul littéral par contre, sachez qu'elle se généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$, si cela vous tente de le démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(nx) = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{th}^{2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{th}^{2k}(x)}.$$

Somme et Produits

1. Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

2. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

3. Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

4. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

5. Sommes doubles.

6. Produit de deux sommes finies.

7. Exemples de sommes triangulaires.

8. Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

9. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.



Sommes et Produits

Le signe Σ a été introduit par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1755, le symbole Π date de Gauss, mais on en trouve trace chez Descartes.

Cependant, leur usage ne s'est pas répandu immédiatement, et de nombreux mathématiciens ont continué à utiliser des points de suspension (par exemple Abel au début du 19^{ème} siècle)

Le but de ce chapitre est donc d'introduire et systématiser l'usage de ces symboles Σ et Π pour désigner, respectivement, une somme et un produit d'éléments.

Dans la mesure du possible, l'utilisation de cette notation est préférable à celle utilisant des petits points, bien moins rigoureuse.

CONTENU

I	Sommes et Produits	280
I.1	Généralités	280
I.2	Premières propriétés	282
I.3	Factorielle	283
II	Méthodes de calculs de sommes et de produits	284
II.1	Somme et produits télescopiques	284
II.2	Changement d'indice	285
II.3	Sommes de référence	287
II.4	Relation Produit-somme	292
III	Coefficients binomiaux et formule du binôme	293
III.1	Coefficients binomiaux	293
III.2	Binôme de Newton	296
IV	Sommes doubles	298
IV.1	Permutation des symboles Σ	299
IV.2	Permutation des symboles Π	302
	Feuille d'exercices n°6 : Sommes et Produits	304
	Test n°7 : Sommes et Produits	319
	Devoir en temps libre n°5 : Premières rencontres	321
	Correction	322
	Programme de Khôlle des semaines 5 et 6	325
	Programme du chapitre VII	326

Dans ce chapitre, pour deux entiers m et n tels que $m \leq n$, on notera $\llbracket m; n \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre m et n :

$$\llbracket m; n \rrbracket = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}.$$

C'est un ensemble fini à $(n - m + \boxed{1})$ éléments!

I/ Sommes et Produits

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la définition de la somme des éléments d'une famille finie $(a_i)_{i \in I}$ de réels ou complexes (ou plus généralement d'objets qu'on sait sommer de façon commutative et associative).

On désignera dans toute la suite par E l'ensemble de ces objets sommables et $\mathbb{K}$, le corps des nombres réels ou complexes chaque fois qu'il n'y aura pas besoin de différencier les deux.

Le cas de familles infinies relève de techniques plus fines. Il n'est, en effet, pas assuré qu'une infinité de sommes ou produits soit un procédé qui « converge ». Nous reparlerons de cela plus tard.

I.1 Généralités

Définition 1 : Soit I un sous ensemble **fini** non vide d'entiers et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E .

On note :

- $\sum_{i \in I} a_i$, la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ où chaque indice $i \in I$ apparaît une et une seule fois.
- $\prod_{i \in I} a_i$, le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ où chaque indice $i \in I$ apparaît une et une seule fois.

Par convention, lorsque $I = \emptyset$, $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Notations : Dans le cas où $I = \llbracket m; n \rrbracket$ avec $m \leq n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

Somme et produit de $(n - m + 1)$ termes ou facteurs.

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 : L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{\star=m}^n a_{\star} = \prod_{j \in \llbracket m; n \rrbracket} a_j.$$

- Dans l'écriture $\sum_{k=m}^n$, les nombres m et n représentent les bornes et il est implicite que $m \leq n$. Dans le cas contraire, $\llbracket m; n \rrbracket = \emptyset$ et donc $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ et $\prod_{k=m}^n a_k = 1$.
- Dans la notation $\sum_{k=m}^n a_k$, il est aussi implicite que l'indice k augmente de 1 lorsque l'on passe d'un terme au suivant (idem pour le produit).

Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\sum_{k=1}^{15} k$, qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15, mais $\sum_{k=0}^7 (2k+1)$.

Exemples 2 :

$$- \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

$$- \sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$$

$$\text{mais } \sum_{p=1}^n \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$$

$$- \forall \alpha \in \mathbb{K}, \sum_{k=m}^n \alpha = \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n-m+1 \text{ fois}} = (n-m+1)\alpha \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^n \alpha = \alpha^{n-m+1}.$$

$$- \text{Un petit dernier : } \prod_{k=1}^n e^k = e^{\left(\sum_{k=1}^n k\right)}.$$

ATTENTION

Ne pas confondre :

- $\sum_{k=1}^n (k+1) = \left(\sum_{k=1}^n k\right) + n$ avec $\sum_{k=1}^n k+1$. Les parenthèses font toute la différence.
- $\sum_{k=1}^n 2^{2^k}$, somme de n termes avec $\sum_{k=1}^{2^n} 2^k$, somme de 2^n termes.

Exercice 1 : Calculer les sommes et produits suivants :

$$1. \sum_{k=3}^7 (k+2).$$

$$3. \prod_{i=3}^7 \frac{i-1}{i+1}.$$

$$6. \sum_{p=1}^{2024} (-1)^p.$$

$$8. \prod_{i=6}^6 i^3.$$

$$4. \sum_{k=1}^{10} k.$$

$$9. \sum_{k=103}^{103} a_k.$$

$$2. \sum_{j=0}^4 (j^2 - 2).$$

$$5. \sum_{k=1}^n 1.$$

$$7. \sum_{k=n}^{2n} 1.$$

Exercice 2 : Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ .

$$1. \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 10$$

$$5. 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1001$$

$$2. 1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$$

$$6. 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1024$$

$$3. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$7. 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 501$$

$$4. -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$8. 5 - 7 + 9 - 11 + \dots + 501$$

Exemples 3 (Bis) : On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

— On appelle $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, l'ensemble des *racines n -ièmes de l'unité*.

La somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

— Si $G = \{(i; j) \in \mathbb{N}^2 / i + j = 5\} = \{(0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0)\}$ alors

$$\sum_{(i; j) \in G} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10} + \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{5}.$$

— $\sum_{i \in E} 1 = |E|$, autant de 1 que d'éléments dans E .

I.2 Premières propriétés

Proposition 1 (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis et **disjoints**.

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I \cup J} a_i = \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in J} a_i.$$

En particulier si $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ alors

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i.$$

En particulier, pour tout $a \in E$, $\sum_{i \in I} a = a \times |I|$.

La **proposition (1)** justifie les regroupements de termes dans les sommes finies : on décompose la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer.

Elle se généralise aisément à une réunion $I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_n$ d'ensembles **deux à deux disjoints** ou à toute *partition* de I :

$$\sum_{i \in I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_n} a_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right).$$

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I .

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Linéarité de la somme})$$

$$\prod_{i \in I} (\lambda a_i b_i) = \lambda^{|I|} \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} b_i \right). \quad (\text{Multiplicativité du produit})$$

En particulier, $\prod_{i=p}^n (\lambda a_i) = \lambda^{n-p+1} \prod_{i=p}^n a_i.$

ATTENTION

En général et même presque toujours, on n'a pas :

~~$$\sum_{i=p}^n (a_i \times b_i) = \left(\sum_{i=p}^n a_i \right) \times \left(\sum_{i=p}^n b_i \right) \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^n (a_i + b_i) = \left(\prod_{i=p}^n a_i \right) + \left(\prod_{i=p}^n b_i \right).$$~~

La multiplication n'est pas linéaire mais distributive sur l'addition.

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left| \prod_{i \in I} a_i \right| = \prod_{i \in I} |a_i|$ mais $\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|.$

ATTENTION

Si l'union $I = I_1 \cup I_2$ n'est pas nécessairement disjointe, on retrouve, comme pour les cardinaux, probabilités et autres statistiques :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i - \sum_{i \in I_1 \cap I_2} a_i.$$

I.3 Factorielle

Définition 2 (Factorielle) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *factorielle* n , noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

$$\text{— } 1! = 1 \quad \text{— } 2! = 2 \quad \text{— } 3! = 6 \quad \text{— } 4! = 24 \quad \text{— } 5! = 120 \quad \text{— } \dots$$

ATTENTION

Ne pas confondre avec $\prod_{k=1}^n n = n^n.$

Proposition 3 :Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.**ATTENTION**

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n+1! \neq (n+1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!$.**Exercice 3 :** Simplifier :

1. $\frac{8!}{6!}$

2. $\frac{11!}{9!2!}$

3. $\frac{13! - 12!}{12!}$

4. $\frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!}$

II/ Méthodes de calculs de sommes et de produits**II.1 Somme et produits télescopiques**

Lorsque l'expression à sommer est de la forme $u_{k+1} - u_k$, les termes s'éliminent alors deux à deux et il ne reste alors que le premier et le dernier terme :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m. \quad (\text{VI.1})$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$$

Exercice 4 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right).$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$

3. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$

II.2 Changement d'indice

Il arrive qu'on ait besoin de réindexer une somme (changer l'indice).

Les trois remarques simples suivantes amènent à des techniques pour simplifier des sommes :

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j + 1$ avec j de 0 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Exemple 5 : Si on considère $S = \sum_{k=1}^{100} a_{k-1}$, on a $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{98} + a_{99}$.

On constate qu'on peut aussi noter $S = \sum_{i=0}^{99} a_i$, et on a :

$$\sum_{k=1}^{100} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{99} a_i.$$

Méthode 1 (Changement d'indice) :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

1. On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
2. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.
3. On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.

On prendra garde aussi à ne pas ajouter ni oublier des termes de l'expression par ce nouvel indexage.

Exercice 5 : Écrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole Σ puis proposer une autre écriture, avec le symbole Σ . *On ne demande pas de calculer ces sommes !*

1. $\sum_{k=1}^n \ln(k+1)$

2. $\sum_{k=3}^{n-2} \ln(k+2)$

3. $\sum_{k=5}^{3n} \ln(k-1)$

4. $\sum_{k=0}^n \ln n$

2. Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1}.$$

Exercice 6 : À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k$.

Correction : $S_n = \sum_{k=0}^n k \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^n (n-j) \underset{\text{linéarité de la somme}}{=} n \sum_{j=0}^n 1 - \sum_{j=0}^n j = n(n+1) - S_n.$

S_n est donc solution de l'équation $S_n = n(n+1) - S_n \Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$

3. Regrouper une somme finie selon les indices de même parité donne le même résultat :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_{2n} &= (a_0 + a_2 + \dots + a_{2n}) & + & & (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) \\ \sum_{k=0}^{2n} a_k &= \left(\sum_{k=0}^n a_{2k} \right) & + & & \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} \right). \end{aligned}$$

De manière un peu plus formelle, une numérotation des éléments d'un ensemble I consiste en une bijection $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \mapsto I$.

Une telle bijection définit donc une numérotation $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ où $i_k = \varphi(k)$. C'est l'existence d'une telle bijection qui permet d'ailleurs aussi de définir rigoureusement la notion de cardinal.^[1]

Via la bijection décrite ci-dessus, on voit que toute somme pourrait s'indexer sur un intervalle d'entiers :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^n a_{\varphi(i)}.$$

L'indexation ensembliste n'est qu'une commodité permettant parfois d'avoir à expliciter une bijection.

Théorème 4 (Changement d'indice) :

Soient I et J deux ensembles et $\varphi : I \mapsto J$ une bijection. Alors, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$, on a :

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{i \in I} a_{\varphi(i)} \quad \text{et} \quad \prod_{j \in J} a_j = \prod_{i \in I} a_{\varphi(i)}.$$

Cette formule ne fait que traduire le fait que lorsque i parcourt I , les $\varphi(i)$ prennent une et une seule fois chaque valeur j de J , du fait de la bijectivité de φ .

En appliquant ce résultat à la bijection réciproque φ^{-1} , on a alors aussi, pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\varphi^{-1}(j)} \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \prod_{j \in J} a_{\varphi^{-1}(j)}.$$

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 5 (Changements d'indice) :

Soit $(a_i)_{m \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

[1]. Soit E un ensemble fini et une numérotation définie par une bijection $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \mapsto E$, il vient :

$$|E| = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Ainsi, on retrouve la définition usuelle du cardinal, comme étant l'unique n tel qu'il existe une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sur E .

Inversion de compteur : en posant $j = n + m - i$,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_{n+m-j} \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m}^n a_{n+m-j}.$$

Décomposition indice pairs/impairs : $\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$

Exemple 6 : $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$

Exercice 7 : Calculer grâce à un changement d'indice :

1. $\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$

2. $\sum_{i=1515}^{2013} i$

3. $\sum_{j=-2}^{40} (6j+4)$

4. $\sum_{p=n}^{2n} p$

II.3 Sommes de référence

Théorème 6 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

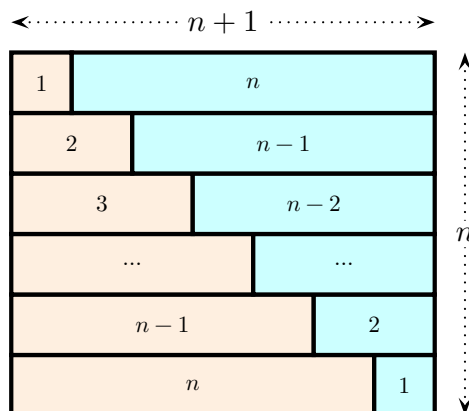


Figure VI.1 - $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve : Toutes ces formules ont été démontrées par récurrence en terminale ou en début d'année mais les démonstrations directes sont possibles à l'aide de sommes télescopiques.

On pourrait d'ailleurs, généraliser ces démonstrations aux somme des puissances p -ième des entiers naturels.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— D'une part $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2S_1(n) + n$ et, par télescopage $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2 - 1$.

En identifiant, on trouve donc $S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

— Pour $S_2(n)$ on utilise la somme $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$.

et $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } S_2(n) &= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - 1 - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right] \\ &= \frac{1}{6} [2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 2 - 3n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

— Enfin, $\sum_{k=1}^n (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4 - 1$ mais aussi :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4 - 1 = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 4S_3(n) &= (n+1)^4 - 1 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - n \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

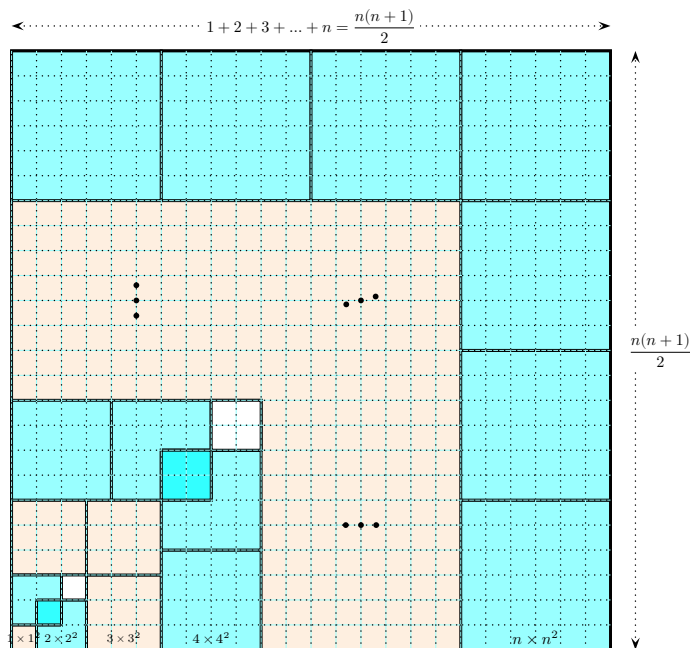


Figure VI.2 - $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

C'est là qu'on revient sur les connaissances des petites classes.

Théorème 7 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \frac{\overbrace{u_m + u_n}^{\text{Moyenne des extrêmes}}}{2} \times \overbrace{(n - m + 1)}^{\text{Nombre de termes}}.$$

2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n - m + 1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si } q = 1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \frac{1 - q^{\overbrace{n - m + 1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1 - q}, & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Exemple 7 : À l'aide de 1 du **théorème (7)**, on généralise très facilement $\sum_{k=1}^n k$ pour $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Preuve : Déjà fait maintes fois ...

Posons $S = \sum_{k=m}^n u_k$.

— Pour une suite arithmétique de raison r :

$$2S = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_k$$

En réindexant la deuxième somme en partant de la fin, on a :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_{n+m-k} = \sum_{k=m}^n (u_k + u_{n+m-k}) \\ &= \sum_{k=m}^n (u_m + (k-m)r + u_m + (n+m-k-r)r) \\ &= \sum_{k=m}^n (u_m + u_m + (n-m)r) = \sum_{k=m}^n (u_m + u_n) \\ &= (n-m+1)(u_m + u_n). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } S = (n-m+1) \frac{u_m + u_n}{2}.$$

On peut également adopter une méthode plus visuelle et plus historique :

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & u_m & + & u_m + r & + & \dots & + & u_n - r & + & u_n \\ + \quad S & = & u_n & + & u_n - r & + & \dots & + & u_m + r & + & u_m \\ \hline 2S & = & (u_m + u_n) & + & (u_m + u_n) & + & \dots & + & (u_m + u_n) & & \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{n-m+1 \text{ termes}}$

$$\text{Donc } S = (n-m+1) \frac{u_m + u_n}{2}.$$

— Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $S = \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m$.

En multipliant S par $1 - q \neq 0$:

$$\begin{aligned} (1-q)S &= (1-q) \sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m = \sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m - \sum_{k=0}^{n-m} q^{k+1} u_m \\ &= u_m \sum_{k=0}^{n-m} (q^k - q^{k+1}) \\ &= u_m \times (1 - q^{n-m+1}). \\ \text{Donc, } S &= u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Si $q = 1$, on revient à la définition : $S = \sum_{k=m}^n u_m = (n-m+1)u_m$.

Exemple 8 : Si $\theta \neq 0$, $1 + e^\theta + e^{2\theta} + \dots + e^{n\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^\theta} = \frac{\text{sh}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\text{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{\frac{n\theta}{2}}.$

Exemple 9 : À l'aide de 2 du **théorème (7)**, on obtient en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$$

On peut généraliser cette relation.

Théorème 8 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 10 : On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k} b^k \\ &= (a + b)(a^{2p} - a^{2p-1}b + a^{2p-2}b^2 + \dots - ab^{2p-1} + b^{2p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ x^5 + 1 &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Preuve : Une très facile utilisation du télescope :

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\underbrace{a^{n-k} b^k}_{u_k} - \underbrace{a^{n-(k+1)} b^{k+1}}_{u_{k+1}} \right) \quad \left(\text{On reconnaît une différence de la forme } u_k - u_{k+1} \right) \\ &= a^n - b^n. \quad \left(\text{Il ne reste que les termes extrêmes.} \right) \end{aligned}$$

Remarque : Si P est une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe Q fonction polynomiale de degré $n - 1$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(\lambda) = (z - \lambda)Q(z).$$

On peut aller plus loin :

Corollaire 8.1 (Racine et factorisation) :

Soient P une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P(\lambda) = 0$ i.e. λ est une racine de P .

(ii) Il existe une fonction polynomiale Q telle que $P(z) = (z - \lambda)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Preuve : Notons $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de P , de sorte que $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que $P(\lambda) = 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(\lambda) \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de la somme}}}{=} \sum_{k=0}^n a_k (z^k - \lambda^k) \underset{a_0(z^0 - \lambda^0) = 0}{=} \sum_{k=1}^n a_k (z^k - \lambda^k) \\ &\underset{\text{théorème (8)}}{=} \sum_{k=1}^n a_k (z - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} z^i \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de la somme}}}{=} (z - \lambda) \sum_{0 \leq i < k \leq n} a_k \lambda^{k-i-1} z^i \\ &= (z - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n a_k \lambda^{k-i-1} \right) z^i = (z - \lambda) Q(z) \quad \text{en posant } Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=i+1}^n a_k \lambda^{k-i-1} \right)}_{b_i} z^i. \end{aligned}$$

La fonction $Q : z \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$ est bien polynomiale, c'est fini !

Exercice 8 : Montrer que $2^{3n} - 1$ est multiple de 7.

Correction : $2^{3n} - 1 = 8^n - 1^n = (8 - 1) \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} 8^k \right)}_{\in \mathbb{N}}.$

II.4 Relation Produit-somme

Théorème 9 :

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a alors :

$$\ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp \left(\sum_{k=p}^n a_k \right) = \prod_{k=p}^n e^{a_k}.$$

Preuve : Rien à démontrer si ce n'est remarquer la stricte positivité de tous les a_i et appliquer les morphismes $\ln$ et $\exp$.

Remarque : Pour la deuxième formule, il est inutile de supposer les a_i non nuls ou positifs.

III/ Coefficients binomiaux et formule du binôme

Vous avez déjà rencontré les coefficients binomiaux en terminale dans un contexte combinatoire lorsque vous dénombreriez le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments ou le nombre de chemins à k succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n .

Ce paragraphe prolonge et consolide vos connaissances.

III.1 Coefficients binomiaux

Définition 3 (Coefficients binomiaux) : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n , noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Considérer $k \in \mathbb{Z}$ n'amène pas à se demander ce que pourrait signifier $k!$ avec k négatif mais est une convention voulu par le programme afin d'éviter des disjonctions de cas inconséquentes.

Nous redémontrerons plus tard que $\binom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n ou encore le nombre de combinaisons à k éléments parmi un ensemble à n éléments, ce qui justifie l'ancienne notation $C_{nk} = \binom{n}{k}$.

Exemples 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et pour $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : Pour les calculs des $\binom{n}{k}$, on utilisera souvent la forme « simplifiée » :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

On peut noter que le numérateur et le dénominateur comptent autant de facteurs.

Cette formule permet, d'ailleurs d'étendre la définition des coefficients binomiaux à tout réel x (k dans $\mathbb{N}$ cette fois) en posant :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1) \dots (x-k+1)}{k!}.$$

Il y a de grandes chances que vous rencontriez cela dans un de vos sujets de concours tellement la théorie et les propriétés qui se cachent derrière cette formule sont nombreuses et florissantes.

Exercice 9 : Simplifier $\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ et $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p+1}}$.

Proposition 10 :Soit $(k; n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geq 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

3. **Formule de Pascal :** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

4. **Intégralité :** $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

L'assertion (1) de la proposition (10) permet de compléter les premières valeurs de l'exemple (11) :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\binom{n}{k}$ de proche en proche. Les résultats sont le tableau ci-dessous appelé *triangle de Pascal*^[2].

[2]. **Blaise Pascal**, né le 19 juin 1623 à Clermont (aujourd'hui Clermont-Ferrand), en Auvergne, mort le 19 août 1662 à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

Enfant précoce, il est éduqué par son père. Les premiers travaux de Pascal concernent les sciences naturelles et appliquées. Il contribue de manière importante à l'étude des fluides. Il a clarifié les concepts de pression et de vide, en étendant le travail de Torricelli. Pascal a écrit des textes importants sur la méthode scientifique.

À 19 ans, il invente la première machine à calculer et après trois ans de développement et 50 prototypes, il la présente à ses contemporains en la dédiant au chancelier Séguier. Dénommée machine d'arithmétique, puis roue pascaline et enfin pascaline, il en construisit une vingtaine d'exemplaires dans la décennie suivante.

Mathématicien de premier ordre, il crée deux nouveaux champs de recherche majeurs : tout d'abord il publie un traité de *géométrie projective* à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donnant naissance au cours du XVIII^{ème} siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

	...	k	$k+1$	...
$\vdots$				
n		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$			$\binom{n+1}{k+1}$	
$\vdots$				

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Symétrie

Figure VI.3 – Triangle de Pascal

Preuve : Pour alléger la démonstration, on se limitera au cas où les coefficients binomiaux ne sont pas nuls, les résultats étant trivialement vrais dans ces cas.

1. Si $0 \leq k \leq n$ alors $0 \leq n-k \leq n$ et on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{(n)!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

2. Si $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

3. Si $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} - \binom{n}{k} = \left(\frac{n+1}{k+1} - 1 \right) \binom{n}{k} \\ &= \frac{\cancel{n} - k}{k+1} \times \frac{n!}{\cancel{k!} \cancel{(n-k)!} \times (n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

4. Le dernier résultat se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{0}{k} = 0 \in \mathbb{N}$. La propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier p tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée et soit $k \in \llbracket 0; p+1 \rrbracket$.

Si $k = p+1$ alors $\binom{p+1}{p+1} = 1 \in \mathbb{N}$.

Sinon, d'après 3 de la **proposition (10)**, on a :

$$\binom{p+1}{k} = \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \quad \text{avec } k \in \llbracket 0; p \rrbracket.$$

On peut alors invoquer l'hypothèse de récurrence pour chacun des deux termes de droite et conclure à $\binom{p+1}{k} \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas, la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée et la propriété $\mathcal{P}$ héréditaire.

Étant initialisée à $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Ce n'est pas une récurrence forte.

Un peu d'histoire : Le triangle des coefficients binomiaux, que nous appelons communément « triangle de Pascal » était en fait connu depuis bien longtemps déjà lorsque Blaise Pascal s'y intéressa : on y trouve mention déjà chez Halayudha, mathématicien indien du 10^{ème} siècle, ainsi qu'en Chine au 13^{ème} siècle. La contribution de Pascal a essentiellement été de démontrer en 1654 un grand nombre de propriétés de ce triangle, jusque-là admises.

C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a mis au point le principe de la démonstration par récurrence !

III.2 Binôme de Newton

Théorème 11 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif^[3] et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}\tag{VI.2}$$

Remarque : Il est parfois plus avantageux d'écrire cette formule en inversant les rôles de a et b sous la forme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Preuve : On démontre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Au rang 0, les deux formules donnent 1 donc la propriété est initialisée.

Supposons la propriété vérifiée pour un rang $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^{p+1} &= (a+b)(a+b)^p \stackrel{\text{Hypothèse de récurrence}}{=} a \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} + b \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &\stackrel{\text{Linéarité de la somme}}{=} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{k+1} b^{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p+1-k} \\ &\stackrel{\text{Changement d'indice dans la première somme}}{=} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} a^k b^{p+1-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p+1-k}\end{aligned}$$

[3]. i.e. un anneau dont les DEUX lois $+$ et $\times$ sont commutatives. Surtout le produit !

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\left(\binom{p}{p} a^{p+1} + \sum_{k=1}^p \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) a^k b^{p+1-k} + \underbrace{\binom{p}{0}}_{=1!} b^{p+1}}_{\substack{\text{On regroupe et} \\ \text{factorise les} \\ \text{somme sur } \llbracket 1; p \rrbracket}} \\
&= \left(\binom{p}{p-1} + \binom{p}{p} \right) \underbrace{\binom{p+1}{0}}_{=1!} a^{p+1} + \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} a^k b^{(p+1)-k} + \underbrace{\binom{p+1}{p+1}}_{=1!} b^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^k b^{(p+1)-k} \quad \text{On regroupe} \\
&= (a+b)^{p+1}. \quad \text{On reconnaît}
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout entier n .

ATTENTION

Il est très important que l'ensemble contenant a et b soit commutatif pour la loi multiplicative sinon cette formule est fausse. Ceux parmi vous qui ont suivi l'option mathématiques expertes l'année dernière devraient s'en souvenir.

Un peu d'histoire : L'apport de Newton est bien réel et important, mais ne concerne pas les exposants entiers naturels.

Isaac Newton a, en fait, généralisé cette formule pour tout exposant **réel**, sous forme d'une somme infinie.

Exemples 12 :

$$\begin{aligned}
&— (a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} \\
&\quad = a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n. \\
&— Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. \\
&— Pour $a = -b = 1$, on obtient $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$. \\
&— Si $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \stackrel{\text{Formule du capitaine}}{=} \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \stackrel{\text{On factorise}}{=} n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
&\quad \stackrel{k \leftarrow k-1}{=} n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \stackrel{(1+1)^{n-1}}{=} n \times 2^{n-1}.
\end{aligned}$$$

Exemple 13 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k.$$

Exercice 10 : Développer :

1. $(x-y)^3$

2. $(1+x\sqrt{2})^4$

3. $(2-x)^5$

Exemple 14 (Application au calcul des sommes de puissances d'entiers) : En reprenant les notations du **théorème (6)**,

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_n(p) = \sum_{k=0}^n k^p.$$

On peut calculer les $S_n(p)$ de proche en proche à l'aide de la formule du binôme (VI.2) et en considérant la somme :

$$S = \sum_{k=0}^n \left((1+k)^{p+1} - k^{p+1} \right).$$

La somme S peut alors être calculée de deux façons :

- D'une part, comme somme télescopique : $S = (1+k)^{p+1} - 0^{p+1} = (1+k)^{p+1}$.
- D'autre part, à l'aide de la formule du binôme (VI.2), ce qui fait disparaître les termes d'exposant $p+1$.

On isole ensuite les termes d'exposant p pour reconnaître les expressions cherchées de $S_n(p)$.

Pour la culture,

$$S_n(p) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_n(i) \right).$$

IV/ Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées sur un produit cartésien (ou au moins un sous-ensemble). Soit $R^{[4]}$ un sous-ensemble de $I \times J$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in R}$ une famille doublement indexée *i.e.* indexée sur un produit cartésien.

Le but est d'étudier la somme $\sum_{(i,j) \in R} a_{i,j}$ en se ramenant à des sommes portant sur un seul des deux indices. On parle alors de « coupe » de l'ensemble R .

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) : Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E .

On note :

- $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$.
- $\prod_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$.

Si la famille est indexée par des couples (i,j) vérifiant une condition du type $i \leq j$, $i < j$, $i \geq j$, ou $i > j$, on dit que la somme ou le produit est *triangulaire*, et on note :

$$\bullet \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ i \leq j}} a_{i,j} \quad \bullet \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ i < j}} a_{i,j} \quad \bullet \prod_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ i \leq j}} a_{i,j} \quad \bullet \prod_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ i < j}} a_{i,j}$$

[4]. R comme rectangle.

Exemples 15 :

- $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$
- $\prod_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{360}$

- $\sum_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$
- $\prod_{0 \leq i < j \leq 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

Notations : Lorsque $I = \llbracket m ; n \rrbracket$ et $J = \llbracket p ; q \rrbracket$, la somme de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ se note :

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq i, j \leq n} a_{ij} \quad \text{si } I = J = \llbracket m ; n \rrbracket.$$

ATTENTION

Dans la dernière écriture, l'expression $m \leq i, j \leq n$ n'est permise que si i et j sont deux variables indépendantes.

IV.1 Permutation des symboles Σ

Théorème 12 (Somme double indexée par un rectangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $\llbracket m ; n \rrbracket \times \llbracket p ; q \rrbracket$.

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij} = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}.$$

Dans le cas d'un rectangle, les sommes permutent donc sans contraintes.

Preuve : On dispose les a_{ij} dans un tableau à double entrée.

Il s'agit dans les deux cas de calculer la somme de tous les éléments du tableau :

j i	p	$p+1$	...	q	Total
m	a_{mp}	$a_{m,p+1}$	...	a_{mq}	$\sum_{j=p}^q a_{mj}$
$m+1$	$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	...	$a_{m+1,q}$	$\sum_{j=p}^q a_{m+1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{np}	$a_{n,p+1}$	...	a_{nq}	$\sum_{j=p}^q a_{nj}$
Total	$\sum_{i=m}^n a_{ip}$	$\sum_{i=m}^n a_{i,p+1}$	...	$\sum_{i=m}^n a_{iq}$	$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij}$ $\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}$

- en sommant d'abord chaque ligne d'indice i , $\sum_{j=p}^q a_{ij}$ puis en sommant toutes les lignes $\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij}$.
- en sommant d'abord chaque colonne d'indice j , $\sum_{i=m}^n a_{ij}$ puis en sommant toutes les colonnes $\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}$.

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$.

Correction :

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j} &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x^i \times x^j) = \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \prod_{j=1}^n x^j \right) = \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \times x^{\sum_{j=1}^n j} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \times x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^n \left(\prod_{i=1}^n x^i \right)^n = x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \\ &= x^{n^2(n+1)}. \end{aligned}$$

Théorème 13 (Somme double indexée par un triangle) :

Soient m et n des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le triangle $\{(i,j) \in I \times J / m \leq i \leq j \leq n\}$.

$$\sum_{m \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{ij}.$$

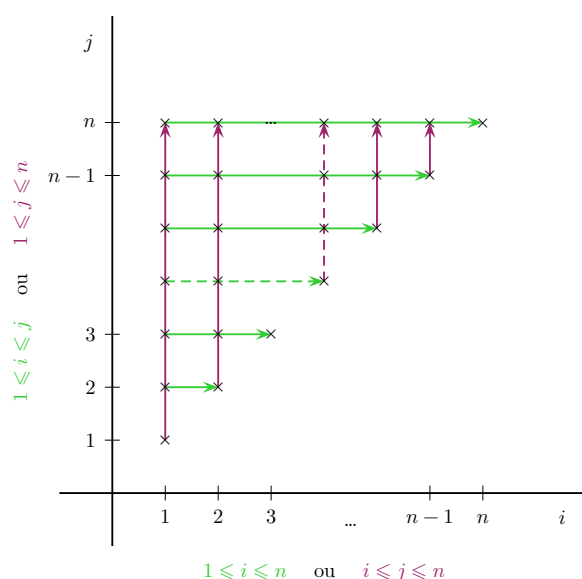


Figure VI.4 – Sommation par tranches

Preuve : De même, on dispose les a_{ij} dans un tableau à double entrée mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments a_{ij} où $i \leq j$.

$\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$	m	$m+1$	...	n	Total
m	a_{mm}	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}	$\sum_{j=m}^n a_{mj}$
$m+1$		$a_{m+1,m+1}$	...	$a_{m+1,n}$	$\sum_{j=m+1}^n a_{m+1,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				a_{nn}	$\sum_{j=n}^n a_{nj}$
Total	$\sum_{i=m}^m a_{im}$	$\sum_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1}$	...	$\sum_{i=m}^n a_{in}$	$\sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{ij}$

Si l'on somme sans prendre la diagonale i.e. les termes a_{ii} , $i \in [1; n]$, on obtient :

$$\sum_{m \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

Exercice 12 : Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Correction : En choisissant astucieusement l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

Proposition 14 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles d'éléments de E .

$$- \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j.$$

$$- \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (\text{Carrée d'une somme})$$

Preuve :

$$- \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \left(a_i \times \sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_i b_j \right).$$

Et il suffit d'appliquer le **théorème (12)**.

- Pour le carré d'une somme, on fait intervenir la symétrie du tableau double entrée en séparant la somme en trois parties et en remarquant que le triangle supérieur est identique au triangle inférieur :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_i a_j \\ &= \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j}_{\text{Triangle supérieur}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i=j \leq n} a_i a_j}_{\text{Diagonale}} + \underbrace{\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i a_j}_{\text{Triangle inférieur}} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \end{aligned}$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.

$$\textbf{Exemple 16 : } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

IV.2 Permutation des symboles II

Les résultats précédents du **théorème (12)** et du **théorème (13)** s'étendent de façon immédiate si on remplace « somme double » par « produit double » :

Théorème 15 :

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de E indexée par un rectangle $\llbracket m; n \rrbracket \times \llbracket p; q \rrbracket$ ou un triangle $\{(i; j) \in I \times J / m \leq i \leq j \leq n\}$.

On a :

$$\textbf{Sur un rectangle : } \prod_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^n \prod_{j=p}^q a_{ij} = \prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n a_{ij}.$$

$$\textbf{Sur un triangle : } \prod_{m \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=m}^n \prod_{j=i}^n a_{ij} = \prod_{j=m}^n \prod_{i=m}^j a_{ij}.$$

$$(\text{sans la diagonale}) \prod_{m \leq i < j \leq n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n a_{ij} = \prod_{j=m+1}^n \prod_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

$$\begin{aligned} \textbf{Exemple 17 : } \prod_{1 \leq i, j \leq n} (ij^2) &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (ij^2) = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(i^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2 \right) = \prod_{i=1}^n (i^n n!^2) \\ &= (n!)^{2n} \times \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n = (n!)^{2n} \times (n!)^n = (n!)^{3n}. \end{aligned}$$

Exercice 13 : Est-il vrai que $\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{ij}$?

Correction : Pour $m = 1$ et $n = 2$, on a $\prod_{i=1}^1 \sum_{j=1}^2 z_{ij} = z_{11} + z_{12}$ et $\sum_{j=1}^2 \prod_{i=1}^1 z_{ij} = z_{11} z_{12}$ donc non si les z_{ij} sont non nuls! ...

Sommes et Produits

I/ Quelques exercices très simples _____

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

1. $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

3. $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$

5. $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$

2. $n(n-1)(n-2)$

4. $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$

Correction :

1. $\frac{9!}{4!}$

2. $\frac{n!}{(n-3)!}$

3. $\frac{12!4!}{7!8!}$

4. $2^n n!$

5. $\frac{11!}{(2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10)^2} = \frac{11!}{(2^5 \times 5!)^2} = \frac{11!}{2^{10}(5!)^2}$

Exercice 2 : Simplifier au maximum :

1. $\frac{n!}{(n+1)!}$

2. $\frac{n!}{p!}, \quad p < n$

3. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

4. $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

Exercice 3 : Calculer (sans calculatrice !)

1. $\binom{8}{3}$

2. $\binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$

3. $\frac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}}$

4. $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

Correction :

1. 56

2. 50

3. $\frac{4}{7}$

4. $\frac{24}{91}$

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

$$1. \binom{n}{2} = 36$$

$$3. 9 \binom{n}{3} = 14 \binom{n}{2}$$

$$5. \binom{n}{n-2} = 780$$

$$2. \binom{n}{2} = \binom{n}{4}$$

$$4. 2 \binom{n}{3} = 21n$$

Correction :

5. On se rappellera de la symétrie des coefficients binomiaux.

Exercice 5 : Montrer, sans récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$

Correction : Une plaisanterie ?

Exercice 6 : Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Correction : Il suffit d'étudier le signe de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

$\underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2} \frac{1}{n+1}} > \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{=\frac{1}{2} \frac{1}{n+1}}$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0.$$

$\underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{< \frac{1}{2n}}$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

Exercice 7 :

1. Trouver des réels a , b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \quad (\text{VI.1})$$

2. En déduire le calcul de $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Correction :

1. Considérons l'équation, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.

En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}\right) \times k$.

Enfin pour $k = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

Multipliant successivement l'équation (VI.1) par $k+1$ et évaluant en $k = -1$ puis par $k+2$, évaluant en $k = -2$, on trouve : $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, on vérifie que $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$ conviennent.

Donc, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

2. Par un petit miracle, on peut écrire, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$.

On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier relatif.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est aussi un entier relatif.

Correction : En remarquant que

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right),$$

le résultat se montre facilement par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

II/ Sommes et produits

Exercice 9 : Calculer les sommes et les produits suivants :

$$1. \sum_{k=1}^n (k+1)(k+2).$$

$$2. \sum_{k=1}^n (2k-1).$$

$$3. \sum_{p=-n}^n (p+1).$$

$$4. \sum_{i=0}^n (n-i).$$

$$5. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$6. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

$$7. \sum_{k=1}^n k \times k!.$$

$$8. \prod_{k=0}^n (2k+1).$$

$$9. \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}.$$

$$10. \sum_{k=0}^{2n} \min(k; n)$$

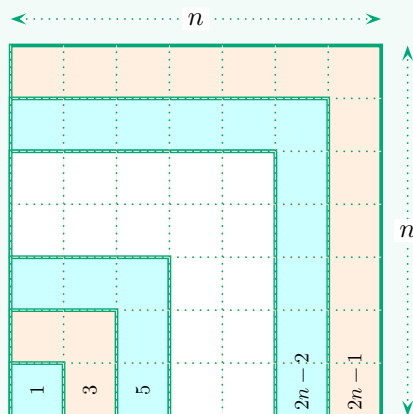
$$11. \text{ Pour } p < n, \sum_{k=p}^n 3^k.$$

Correction : Pour l'essentiel ce sont des sommes usuelles ou des sommes de termes d'une suite géométrique, usuelles aussi donc.

1. Il suffit simplement de développer et d'utiliser les sommes classiques :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + 2 \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\ &= \frac{n}{3}(n^2 + 6n + 11). \end{aligned}$$

2. Plusieurs méthodes dont l'une est d'écrire $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.



Un peu d'histoire : Cette formule et son interprétation géométrique étaient déjà connues des grecs antiques comme Euclide.

Figure VI.5 - $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

$$3. \sum_{p=-n}^n (p+1) = \sum_{p=1}^n (p+1) + 1 + \sum_{p=-n}^{-1} (p+1) = \sum_{p=1}^n (p+1) + 1 + \sum_{p=1}^n (-p+1) = 2n+1.$$

$$4. \sum_{i=0}^n (n-i) = \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ par réindexage décroissant.}$$

$$5. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par décomposition en éléments simples puis télescopage.}$$

$$6. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k}{k-1}} \right) = \frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{n+1}{2n} \text{ par télescopage.}$$

$$7. (k+1)! - k! = k \times k! \text{ d'où } \sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1.$$

8. On va rajouter (et enlever) les nombres pairs qui manquent à $\prod_{k=0}^n (2k+1)$ pour former $(2n+1)!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n (1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

9. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - 1 \right).$

10. $\sum_{k=0}^{2n} \min(k; n) = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.$

11. Pour $p < n$, $\sum_{k=p}^n 3^k = 2 \times 3^p (3^{n-p+1} - 1).$

Exercice 10 : Simplifier pour tout entier $n \geq 2$ le produit :

$$T_n = \prod_{p=2}^n \frac{p^3 + 1}{p^3 - 1}.$$

et en déduire que la suite $(T_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

Correction : $T_n = \prod_{p=2}^n \frac{p^3 + 1}{p^3 - 1} = \prod_{p=2}^n \frac{(p+1)(p^2 - p + 1)}{(p-1)(p^2 + p + 1)} = \left(\prod_{p=2}^n \frac{p+1}{p-1} \right) \left(\prod_{p=2}^n \frac{p^2 - p + 1}{p^2 + p + 1} \right)$

$= \frac{n(n+1)}{2} \prod_{p=2}^n \frac{(p - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{(p + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ En reconnaissant un produit télescopique dans le premier facteur.

$= \frac{n(n+1)}{2} \prod_{p=2}^n \frac{(2p-1)^2 + 3}{(2p+1)^2 + 3}$ En multipliant par $\frac{4}{4}$.

$= \frac{n(n+1)}{2} \prod_{p=2}^n \frac{(2(p-1)+1)^2 + 3}{(2p+1)^2 + 3}$ Encore un produit télescopique.

$= \frac{n(n+1)}{2} \frac{(2+1)^2 + 3}{(2n+1)^2 + 3}$

$= \frac{6n(n+1)}{(2n+1)^2 + 3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}.$

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \{0; 1 \ 2; \dots; 2n-1\}$.

En écrivant E sous la forme d'une union disjointe de ses éléments pairs et de ses éléments impairs, calculer :

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor, \text{ où } \lfloor x \rfloor \text{ représente la partie entière de } x.$$

Correction : On a $E = \{2p+1, p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} \sqcup \{2p, p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = E_i \sqcup E_p$ et $\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor = \sum_{j \in E} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor.$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{j \in \mathbb{E}} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor &= \sum_{j \in \mathbb{E}_i \sqcup \mathbb{E}_p} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor = \sum_{j \in \mathbb{E}_i} \left\lfloor \frac{2j+1}{2} \right\rfloor + \sum_{j \in \mathbb{E}_p} \left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{j \in \mathbb{E}_i} j + \sum_{j \in \mathbb{E}_p} j = \sum_{j=0}^{n-1} j + \sum_{j=0}^{n-1} j = 2 \sum_{j=0}^{n-1} j = (n-1)n. \end{aligned}$$

Exercice 12 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k$.

Correction : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour l'hérédité,

$$\prod_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} = (n+1)^{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = (n+1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} \times 1 = (n+1)^{n+1} \prod_{k=1}^n k^k = \prod_{k=1}^{n+1} k^k.$$

III/ Binôme and Co _____

Exercice 13 : Montrer que pour tout couple d'entiers $(n; p)$ avec $p \geqslant N$, on a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction :

Avec les sommes télescopiques : Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, la relation de Pascal s'écrit :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \Leftrightarrow \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

$$\text{D'où, } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \cancel{\binom{p}{p+1}} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: Pour l'hérédité,

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Exercice 14 : On considère x , un nombre réel, et n un entier naturel.

- Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$. En déduire $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

3. Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$. En déduire $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.
5. Dans la même idée, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Correction : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans $\mathbb{R}$ le produit est commutatif. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1^n = 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, $x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{2^n}$ et on obtient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

2. D'après la formule du capitaine, on a : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-1)-\ell} \\ &= nx [x + (1-x)]^{n-1} \\ &= nx. \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

3. De même, $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ qui entraîne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-2)-\ell} \\ &= n(n-1)x^2 [x + (1-x)]^{n-2} \\ &= n(n-1)x^2. \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} &= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= n(3n-1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \left(x^2 - \frac{2k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &= x^2 \times 1 - \frac{2x}{n} \times nx + \frac{1}{n^2} [n(n-1)x^2 + nx] \\ &= x^2 - 2x^2 + \left(1 - \frac{1}{n}x^2\right) + \frac{1}{n}x \\ &= \frac{x - x^2}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Exercice 15 (Critère de divisibilité par 3, 9 et 11) : On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \cdots a_1 a_0$ de sorte que :

$$n = a_p 10^p + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1. Montrer que n est multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p a_k$ est multiple de 3.
2. Montrer que n est multiple de 9 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p a_k$ est multiple de 9.
3. Montrer que n est multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Correction :

1. Comme $10 = 9 + 1$, d'après le binôme de Newton pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^k = (9 + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 9^i = 9^k + 9q_k + 1.$$

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^p a_k 10^k = 9 \left(\sum_{k=0}^p a_k q_k \right) + \sum_{k=0}^p a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p a_k$ est multiple de 3.

2. Le raisonnement est identique à partir de $10^k = (9 + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 9^i = 9^k + 9q_k + 1$.

3. Une nouvelle fois, on utilise le binôme de Newton avec $10 = 11 - 1$:

$$10^k = (11 - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} + \binom{k}{k} (-1)^k = 11q_k + (-1)^k.$$

D'où,

$$n = \sum_{k=0}^p a_k 10^k = 11 \left(\sum_{k=0}^p a_k q_k \right) + \sum_{k=0}^p (-1)^k a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^p (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 16 : Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Correction : On ne vous donne pas ces deux sommes ensemble par hasard. Il faut les traiter ensemble : deux inconnues dont on cherche deux équations :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

et

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est-elle vraie ?

Correction : Supposons que n n'est pas premier.

On peut écrire $n = pq$ avec $1 < p < n$.

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k$$

Donc, $2^p - 1 \mid 2^n - 1$.

Or, $1 < 2^p - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ admet un diviseur autre que 1 et lui-même. Il n'est pas premier.

Par contraposition, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est fausse. En effet, 11 est premier et $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ ne l'est pas.

Remarque : $M_n = 2^n - 1$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne.

Exercice 18 (Petit théorème de Fermat) : Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p .
3. En déduire que si n n'est pas divisible par p alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Correction :

1. D'après la formule du capitaine, on sait que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$. L'entier p divise alors le produit $k \binom{p}{k}$.

Comme p est un nombre premier, il ne divise un produit d'entiers que s'il divise l'un des facteurs de ce produit. Mais, il est strictement supérieur à k , il ne peut donc le diviser et il divise $\binom{p}{k}$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Au rang $n = 0$ l'égalité est triviale : $0^p - 0 = 0$ est divisible par p .

Supposons la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k - n - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + n^p - n.$$

Par hypothèse de récurrence p divise $n^p - n$ et, d'après la question précédente, p divise tous les $\binom{p}{k}$ pour

$1 \leq k \leq p-1$ donc p divise $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$ par compatibilité de la relation de divisibilité avec les combinaisons linéaires entières et la propriété est héréditaire.

Initialisée à partir de $n = 0$, d'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Il suffit de factoriser : $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.

Si p premier ne divise pas n , il divise $n^{p-1} - 1$.

Commentaires : *Ce n'est pas le théorème de Gauss mais un théorème un peu plus faible démontré dans le cours.*

Exercice 19 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$.

1. Calculer S_1 .
2. Exprimer $A(n) = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ en fonction de S_1, S_2 et S_3 .
3. Par changement d'indice dans $A(n)$, exprimer $A(n)$ uniquement en fonction de S_3 .
4. En déduire une formule pour S_2 .
5. Calculer S_3 par une méthode analogue.

Correction :

1. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$, il suffit de sommer les deux membres de cette égalité pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et reconnaître une somme télescopique dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k+1) &= \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) \\ 2S_1 + n &= (n+1)^2 - 1 \\ S_1 &= \frac{1}{2} ((n+1)^2 - n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

2. Il suffit de développer :

$$A(n) = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

3. $A(n) = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = S_3 + (n+1)^3 - 1$.
4. Avec les deux questions précédentes, on en déduit :

$$\begin{aligned} S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n &= S_3 + (n+1)^3 - 1 \\ S_2 &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \right) \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

5. Dans la même idée, posons $B(n) = \sum_{k=1}^n (k+1)^4$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n &= S_4 + (n+1)^4 - 1 \\ S_3 &= \frac{1}{4} ((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)) \\ &= \frac{1}{4} (n+1) ((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)) \\ &= \frac{1}{4} (n+1) ((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)) \\ &= \frac{1}{4} (n+1)^2 ((n+1)^2 - (2n+1)) \\ S_2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 20 : Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Correction : Appliquons le binôme de Newton pour développer $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k \\ \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k\end{aligned}$$

Ajoutons ces deux expressions :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right)$$

Observons maintenant que $\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k$ est un nombre réel positif pour tout k .

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, nous pouvons dire que pour tout k ,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k} = 2$$

Commentaires : Ca fait plus classe de parler d'inégalité géométrique mais on peut tout aussi bien étudier le minimum de la fonction $x \mapsto x^k + \frac{1}{x^k}$ qui est atteint en 1 et qui vaut 2.

En sommant sur tous les termes k , nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right) \geq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Conclusion, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ avec égalité lorsque $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ i.e. $a = b$.

IV/ Sommes et produits sur un rectangle ou un triangle _____

Exercice 21 : Calculer :

1. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x^{i+j}.$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j).$

3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2.$

4. $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n} ij.$

5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij.$

6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j).$

7. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} |i-j|$

8. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j}$

9. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$

10. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}$

11. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} 2^{i+j}$

12. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$

13. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$

Correction :1. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x^{i+j} = \sum_{i=0}^n \left(x^i \sum_{j=0}^n x^j \right) = \sum_{i=0}^n \left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sum_{i=0}^n x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2.$$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = n^2(n+1).$

3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$

4. $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n} ij = \sum_{i=0}^n i(n-i) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$

$$\begin{aligned} 5. \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} ij \right) = \sum_{j=2}^n \left(j \sum_{i=1}^{j-1} i \right) = \sum_{j=2}^n j \times \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (j^3 - j^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 - j^2) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}. \end{aligned}$$

6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

$$\begin{aligned} 7. \sum_{0 \leq i, j \leq n} |i-j| &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |i-j| = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (i-j) + \sum_{j=i+1}^n (j-i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n j - \sum_{j=i+1}^n i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - ni + i^2 \right) \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

8. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n 1 = n+1.$

9.
$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1.$$
10.
$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} &= \sum_{j=0}^n 2^j \sum_{i=0}^j 2^i = \sum_{j=0}^n (2^{2j+1} - 2^j) \\ &= \frac{1}{3} (2^{2n+3} - 3 \times 2^{n+1} + 1). \end{aligned}$$
11.
$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} 2^{i+j} &= \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=i}^n \binom{i}{j} 2^j = \sum_{i=0}^n 2^{2i} \\ &= \frac{1}{3} (2^{2n+2} - 1). \end{aligned}$$
12.
$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j} &= \sum_{j=0}^n 2^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 2^i = \sum_{j=0}^n 6^j \\ &= \frac{1}{5} (6^{n+1} - 1). \end{aligned}$$
13.
$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j = 3^n.$$

Exercice 22 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}.$

3. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j.$

5. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j}.$

2. $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$

4. $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{\frac{i}{j}}.$

6. $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}.$

Correction :

$$\begin{aligned}
 1. \quad \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j} &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x^i \times x^j) = \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \prod_{j=1}^n x^j \right) = \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \times x^{\sum_{j=1}^n j} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left((x^i)^n \times x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^n \left(\prod_{i=1}^n x^i \right)^n = x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \\
 &= x^{n^2(n+1)}.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = \prod_{1 \leq i \leq n} \left(i^n \prod_{1 \leq j \leq n} j \right) = (n!)^n \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^n = (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}.$$

$$3. \quad \prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n i^j = \prod_{i=1}^n i^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (\sqrt{n!})^{n(n+1)}.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{\frac{i}{j}} &= \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^j 2^i \right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^n \left(2^{\frac{j(j+1)}{2}} \right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^n 2^{\frac{j+1}{2}} = (\sqrt{2})^n \prod_{j=1}^n (\sqrt{2})^j \\
 &= (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j} &= \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\prod_{1 \leq j \leq n} \frac{i}{j} \right) = \prod_{1 \leq i \leq n} i^n \left(\prod_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{i^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{(n!)^n} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^n = \frac{(n!)^n}{(n!)^n} = 1.
 \end{aligned}$$

Commentaires : *Ce qui était évident en comptant les apparitions de chaque entier au numérateur et dénominateur grâce à la commutativité du produit.*

$$\begin{aligned}
 6. \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} i &= \prod_{2 \leq j \leq n} \left(\prod_{1 \leq i < j-1} i \right) = \prod_{2 \leq j \leq n} (j-1)! \\
 \text{et } \prod_{1 \leq i < j \leq n} j &= \prod_{1 \leq i \leq n-1} \left(\prod_{i+1 \leq j \leq n} j \right) = \prod_{1 \leq i \leq n-1} \frac{n!}{i!} = (n!)^{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n-1} \frac{1}{i!} = (n!)^{n-1} \prod_{2 \leq i \leq n} \frac{1}{(i-1)!}.
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} i}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} j} = \frac{1}{(n!)^{n-1}} \left(\prod_{2 \leq j \leq n} (j-1)! \right)^2.$$

Commentaires : *Je n'ai pas mieux !;-)*

Sommes et Produits

Compléter :

1. Pour une somme télescopique :

$$\sum_{\Delta=\square}^{\heartsuit} (u_{\Delta+1} - u_{\Delta}) = u_{\heartsuit+1} - u_{\square}.$$

$$2. S_2(\heartsuit) = \sum_{\Delta=1}^{\heartsuit} \Delta^2 = \frac{\heartsuit(\heartsuit+1)(2\heartsuit+1)}{6}.$$

3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{\Delta=\square}^{\heartsuit} u_{\Delta} = \frac{u_{\square} + u_{\heartsuit}}{2} \times (\heartsuit - \square + 1).$$

Théorème 8 (1 est racine de $X^{\Delta} - 1$) :

Soit $\Delta \in \mathbb{N}^*$, $\square$ et $\heartsuit$ deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} \square^{\Delta} - \heartsuit^{\Delta} &= (\square - \heartsuit) \sum_{k=0}^{\Delta-1} \square^{\Delta-1-k} \heartsuit^k \\ &= (\square - \heartsuit) (\square^{\Delta-1} + \square^{\Delta-2} \heartsuit + \square^{\Delta-3} \heartsuit^2 + \dots + \square \heartsuit^{\Delta-2} + \heartsuit^{\Delta-1}). \end{aligned}$$

Exercice 1 : Calculer :

$$1. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j}$$

$$2. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$$

$$3. \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j}.$$

$$1. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n 1 = n+1.$$

$$2. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^n 2^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 2^i = \sum_{j=0}^n 6^j = \frac{1}{5} (6^{n+1} - 1).$$

$$\begin{aligned} 3. \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j} &= \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\prod_{1 \leq j \leq n} \frac{i}{j} \right) = \prod_{1 \leq i \leq n} i^n \left(\prod_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{i^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(n!)^n} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} i \right)^n = \frac{(n!)^n}{(n!)^n} = 1. \end{aligned}$$

Sommes et Produits

Compléter :

1. Pour un produit télescopique :

$$\prod_{\Delta=\square}^{\heartsuit} \frac{u_{\triangle+1}}{u_{\triangle}} = \frac{u_{\heartsuit+1}}{u_{\square}}.$$

$$2. S_1(\heartsuit) = \sum_{\Delta=1}^{\heartsuit} \Delta = \frac{\heartsuit(\heartsuit+1)}{2}.$$

3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\star$ et $\star \neq 1$, alors :

$$\sum_{\Delta=\square}^{\heartsuit} u_{\Delta} = u_{\square} \times \frac{1 - \star^{\heartsuit-\square+1}}{1 - \star}.$$

Théorème 11 (Formule du binôme de Newton) :

Soient $\square$ et $\heartsuit$ deux éléments d'un anneau commutatif^[5] et Δ un entier naturel.

$$\begin{aligned} (\square + \heartsuit)^{\Delta} &= \sum_{k=0}^{\Delta} \binom{\Delta}{k} \square^k \heartsuit^{\Delta-k}. \\ &= \square^{\Delta} + \Delta \square^{\Delta-1} \heartsuit + \dots + \binom{\Delta}{k} \square^k \heartsuit^{\Delta-k} + \dots + \Delta \square \heartsuit^{\Delta-1} + \heartsuit^{\Delta}. \end{aligned}$$

Exercice 1 : Calculer :

$$1. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$$

$$2. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} 2^{i+j}$$

$$3. \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{\frac{i}{j}}.$$

$$1. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1.$$

$$2. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{i}{j} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^n 2^i \sum_{j=i}^n \binom{i}{j} 2^j = \sum_{i=0}^n 2^{2i} = \frac{1}{3} (2^{2n+2} - 1).$$

$$3. \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^j 2^i \right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^n \left(2^{\frac{j(j+1)}{2}} \right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^n 2^{\frac{j+1}{2}} = (\sqrt{2})^n \prod_{j=1}^n (\sqrt{2})^j = (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

Premières rencontres

Exercice 1 (Divergence de la série harmonique) – On note, pour tout entier $n > 0$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Quels sont alors les comportements asymptotiques possibles pour la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 2 – n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Inégalité de Chebyshev

- (a) Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ réels, établir :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) = 2n \sum_{i=1}^n a_i b_i - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

- (b) On suppose dans cette question que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

Montrer l'inégalité de Chebyshev :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

2. Applications

- (a) Prouver que :

$$\sum_{i=1}^n i 2^i \geq (n+1)(2^n - 1).$$

- (b) Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels, montrer que :

$$n \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

3. **Question subsidiaire** : Sauriez-vous simplifier l'expression $\sum_{i=1}^n i 2^i$?

Première rencontre avec Chebyshev

Correction de l'exercice 1 –

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone (qu'on reverra), la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut être que convergente vers un réel ℓ ou divergente vers $+\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{2n - (n+1) + 1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$

3. Si $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était convergente, mettons vers un réel ℓ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n} = \ell$ et d'après le théorème sur les limites de sommes, par passage à la limite (les inégalités larges sont conservées) : $\ell - \ell = 0 \geq \frac{1}{2}$ qui n'est pas possible.

Donc la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente, elle diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty.$$

Correction de l'exercice 2 –

1. Inégalité de Chebyshev

(a) Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ réels, :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(n a_i b_i - a_i \sum_{j=1}^n b_j - b_i \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (n a_i b_i) - \sum_{i=1}^n \left(a_i \sum_{j=1}^n b_j \right) - \sum_{i=1}^n \left(b_i \sum_{j=1}^n a_j \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \sum_{i=1}^n a_i - \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) \sum_{i=1}^n b_i + n \sum_{j=1}^n a_j b_j \\ &= 2n \sum_{i=1}^n a_i b_i - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) = 2n \sum_{i=1}^n a_i b_i - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

(b) Dans ce cas,

- lorsque $i < j$, on a $(a_i - a_j) \leq 0$ et $(b_i - b_j) \leq 0$ donc $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$;
- lorsque $i = j$, on a $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$;
- lorsque $i > j$, on a $(a_i - a_j) \geq 0$ et $(b_i - b_j) \geq 0$ donc $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$;

Finalement, la somme $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right)$ est positive, comme somme de nombres positifs.

D'où, $2n \sum_{i=1}^n a_i b_i - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \geq 0$ et donc

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (\text{Inégalité de Chebyshev.})$$

2. Application

- (a) On peut utiliser l'inégalité de Chebyshev en posant $a_i = i$ et $b_i = 2^i$ qui sont bien des familles croissantes.

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i 2^i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \text{ d'après l'inégalité de Chebyshev} \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n 2^i \right) \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \left(2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) \\ &\geq (n+1)(2^n - 1) \end{aligned}$$

Conclusion, $\sum_{i=1}^n i 2^i \geq (n+1)(2^n - 1)$.

- (b) On considère $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels. On remarque qu'ils ne sont pas nécessairement rangés dans l'ordre croissant.

On les range donc en une famille $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$, et on applique l'inégalité de Chebychev en prenant les deux familles égales à cette dernière :

$$\sum_{i=1}^n a'_i a'_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a'_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a'_i \right) \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^n a_i'^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a'_i \right)^2.$$

Or, $\sum_{i=1}^n a_i'^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ et $\sum_{i=1}^n a'_i = \sum_{i=1}^n a_i$.

Finalement, $n \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$.

3. On va faire appel à une somme télescopique en symétrisant l'expression par rapport à l'indice i :

$$\sum_{i=1}^n ((i+1)2^{i+1} - i2^i) = (n+1)2^{n+1} - 2.$$

Mais aussi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n ((i+1)2^{i+1} - i2^i) &= \sum_{i=1}^n 2^i (2(i+1) - i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2^i (i+2) \\ &= \sum_{i=1}^n i2^i + \sum_{i=1}^n 2^{i+1}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i2^i &= (n+1)2^{n+1} - 2 - 4 \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= (n+1)2^{n+1} - 2 - 4(2^n - 1) \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

Fonctions de référence, sommes et produits

1. Fonctions usuelles

- Le logarithme népérien $\left(x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt\right)$.
 - Continuité, dérivation, monotonie, propriétés algébriques, limite aux bornes, graphe, croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La fonction exponentielle (comme réciproque de la fonction logarithme).
 - Continuité, dérivation, propriétés algébriques, graphe, limites aux bornes et croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
- Les fonctions exponentielle et logarithme en base a .
 - Dérivation, propriétés algébriques, graphes.
- Les fonctions puissances.
 - dérivation, propriétés algébriques, limites aux bornes, prolongement par continuité en 0, monotonie, graphes, croissances comparées.
- Les fonctions hyperboliques :
 - Définition, parité, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, limites aux bornes, variations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \frac{e^x}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

2. Sommes et Produits

- Notations $\sum$ et $\prod$ et manipulations.
- Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
- Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
- Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$.
- Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Sommes des termes.
- Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
- Définition de $n!$ et du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
- Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton et intégrité.
- Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle. Cas des variables séparées.
- Produit de sommes, carré d'une somme.

Questions de cours possibles [6] :

1. La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...
2. Limites remarquables de la fonction $\ln$ avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.
3. Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit.
4. (★) Croissances comparées asymptotiques : formules et démonstration.
5. Limites locales et asymptotiques remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites)
6. Valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.
7. (★) Formule du binôme de Newton.
8. Somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$: $\sum_{k=m}^n u_k = \dots$
9. Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = \dots$

[6]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Trigonométrie et Fonctions circulaires

1. Trigonométrie

- Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus
- Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$. Notation $a \equiv b [2\pi]$.
- Cosinus et sinus des angles usuels.
- Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.
- Équations et inéquations trigonométriques
- Formules d'addition $\cos(a \pm b), \sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a), \sin(2a)$.

Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a) \cos(b), \cos(a) \sin(b), \sin(a) \sin(b)$

2. Fonctions circulaires cosinus et sinus.

- On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

3. Fonction tangente.

- Définition, dérivée, variations, représentation graphique.
- Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.
- Interprétation sur le cercle trigonométrique.
- Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.

4. Fonctions circulaires réciproques

- Arcsin, Arccos, Arctan.
- Définition, dérivée, variations, représentation graphique
- Équations et inéquations trigonométriques réciproques

VII

Fonctions circulaires

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà (re)défini les fonctions dites de référence ainsi que l'exponentielle. Si ces fonctions sont importantes, il en manque et c'est le thème de ce chapitre qui aborde la trigonométrie et les fonctions dite circulaires ainsi que leur réciproque.

La *définition (1)*, tout en étant correcte, est insuffisante par bien des aspects. Une autre approche eût été de voir ce chapitre comme un hommage à la fonction exponentielle, complexe s'entend. Fonction exponentielle dont la définition analytique comme la somme d'une série entière normalement convergente nous échappe encore :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ainsi dotés, nous aurions pu voir :

- La fonction *logarithme* comme sa bijection réciproque et ...réciproquement. Déjà fait !
- Les fonctions *hyperboliques* comme ses parties paire et impaire. Aussi !
- les fonctions *circulaires* comme ses parties réelle et imaginaire. Bientôt mais pas encore !

Vous serez surpris mais ce qu'il nous fait le plus défaut est une correcte définition de π . Nous ne l'avons pas, loin s'en faut donc, nous nous appuierons désormais sur vos connaissances de lycée.

CONTENU

I	Le cercle trigonométrique	329
I.1	Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique	329
I.2	Autour du cercle trigonométrique	331
I.3	Équations trigonométriques	334
II	Trigonométrie	334
II.1	Formules de duplication	335
II.2	Formules de linéarisation	336
III	Fonctions circulaires	337
III.1	Domaine de définition, parité et périodicité	337
III.2	Continuité, dérivabilité	339
III.3	Variations et représentation graphique	344
IV	Fonctions circulaires réciproques	345
IV.1	Arccosinus et Arcsinus	345
IV.2	Dérivabilité	347
IV.3	Courbes représentatives	349
V	Fonctions tangente et réciproque	350
V.1	Fonction tangente	350
V.2	Fonction arctangente	356
VI	Tableau récapitulatif	363
	<i>Feuille d'exercices n° 7 : Fonctions circulaires</i>	364
	<i>Test n° 8 : Fonctions circulaires</i>	382
	<i>Devoir en temps libre n° 6 : Un peu de trigonométrie réelle et de calculs algébriques</i>	386
	<i>Correction</i>	388
	<i>Devoir surveillé n° 2 : Sommes & Fonctions trigonométriques</i>	394
	<i>Correction</i>	399
	Programme du chapitre VIII	411

I/ Le cercle trigonométrique

I.1 Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un et un seul point M du cercle trigonométrique.

Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0 , alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

On dit alors que « x_0 et x_1 sont égaux modulo 2π » et on note :

$$x_0 \equiv x_1 [2\pi].$$

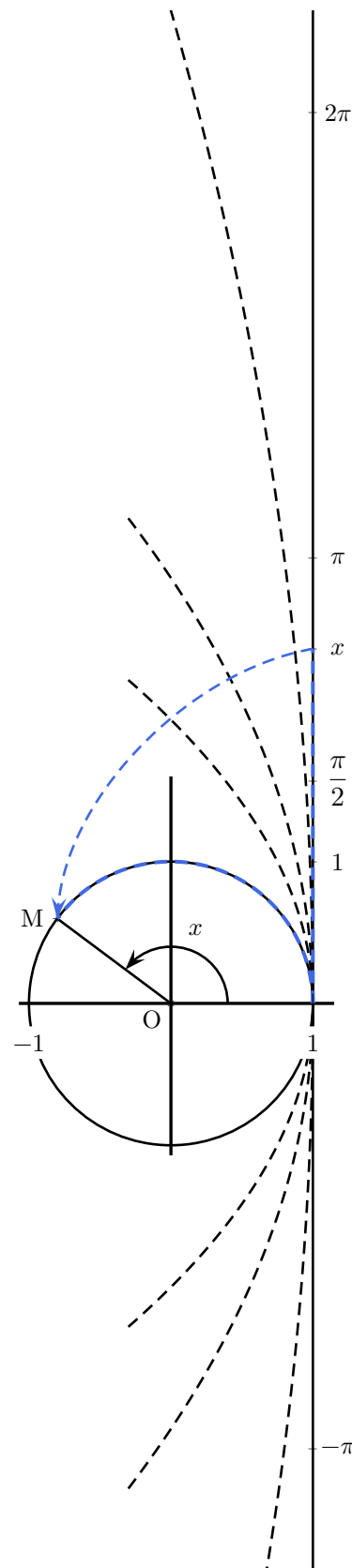
La relation d'égalité modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel x associé à M par ce procédé est, par définition, une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des réels égaux à x_0 modulo 2π .

On parlera plutôt de *classe d'équivalence* de $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ dont x_0 est un *représentant*.

Lorsque $x_0 \in]-\pi; \pi]$, on parlera alors de *mesure principale* de l'angle.



Exemples 1 :

- 1 radian correspond à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 1.
- Par définition, 2π radian correspond donc à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 2π : le périmètre du cercle !
- La mesure d'un angle orienté en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

degrés	0	30	45	60	90	180	$x = \frac{180}{\pi} \times y$
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$y = \frac{\pi}{180} \times x$

- $1 \text{ rad} \simeq 57,3^\circ$ et $1^\circ \simeq 0,0175 \text{ rad}$.

Exercice 1 : Donner la mesure qui appartient à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ puis la mesure principale de l'angle dont une mesure vaut :

1. $-\frac{9\pi}{10}$

2. $\frac{95\pi}{7}$

3. $\frac{148\pi}{3}$

4. 3,15

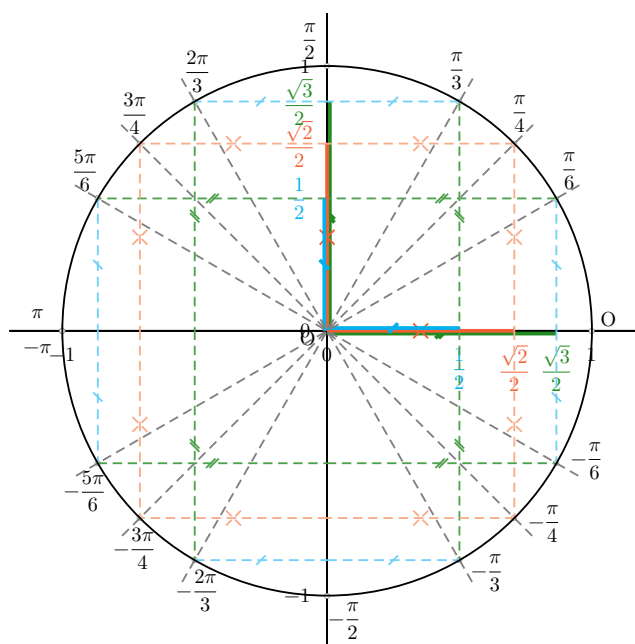


Figure VII.1 – Angles remarquables.

I.2 Autour du cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 1 : Pour tout nombre réel x , il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x radians.

— On appelle *cosinus de x* , noté $\cos(x)$, l'abscisse de M.

— On appelle *sinus de x* , noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

On les appelle le cosinus et le sinus du nombre réel x .

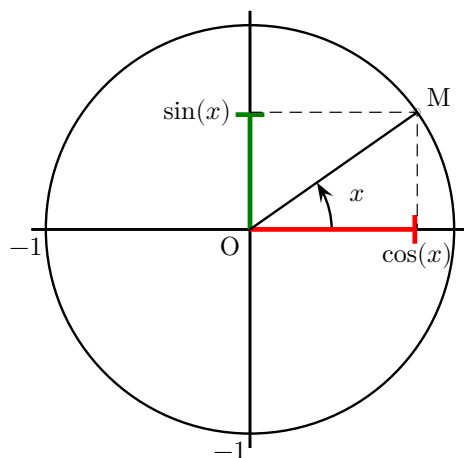
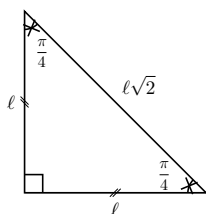


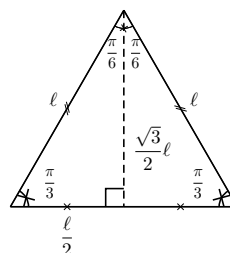
Figure VII.2 – Pour tout nombre réel x , il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x radians.

Un peu d'histoire :

- La trigonométrie (l'étude des mesures dans le triangle) existe depuis l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), et est développée en rapport avec l'astronomie.
- Le sinus, sous sa forme actuelle, a été introduit par les indiens aux alentours de 500 ap JC, pour l'étude des angles célestes. La première table connue date de 499, et est attribuée au mathématicien indien Aryabhata. En 628, Brahmagupta construit une approximation de la fonction sinus par interpolation.
- Ces notions nous sont parvenues grâce aux travaux de synthèse des mathématiciens arabes des 9^{ème} et 10^{ème} siècles (essentiellement basés dans les actuelles Irak, Iran et Khazakstan).
- Auparavant, les grecs utilisaient plutôt la mesure de la corde, ce qui est moins commode, mais assez équivalent.
- Le nom de « sinus » provient d'un mot sanscrit signifiant « arc », apparaissant dans l'ouvrage de Aryabhata, et transcrit phonétiquement en arabe, puis déformé en un mot proche signifiant « repli de vêtement ». Il a été traduit en latin au 12^{ème} siècle par le mot « sinus » signifiant « pli ».



Triangle rectangle isocèle



Triangle équilatéral

Figure VII.3 – Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque : La ligne des sinus s'écrit $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$.

Figure VII.4 – Cosinus et sinus d'angles remarquables.

Exercice 2 : Calculer :

1. $\cos(3\pi)$

2. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

3. $\cos\left(\frac{64\pi}{3}\right)$

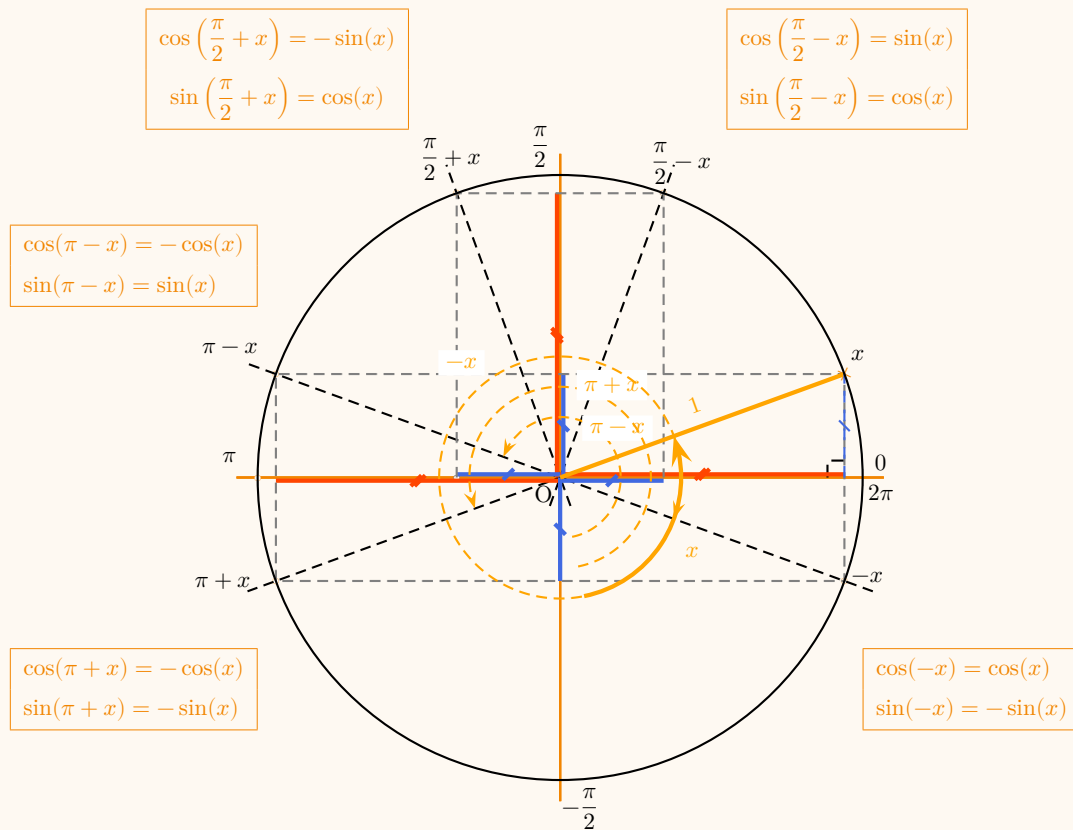
De la définition découle immédiatement quelques propriétés simples à démontrer mais importantes :

Théorème 1 :

Soit x un réel.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \iff |\cos(x)| \leq 1$.
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \iff |\sin(x)| \leq 1$.
- Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$,
 - $\cos(x) \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 - $\sin(x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \pi$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Exercice 3 : À quelle condition peut-on écrire $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$?

Proposition 2 (Trigonométrie et Transformations du plan) :Soit $x \in \mathbb{R}$.**Corollaire 2.1 :**Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x).$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.**Exercice 4 :** Simplifier $-\cos(\pi - x) + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \sin(x + 3\pi) + 3 \sin(-x)$.

I.3 Équations trigonométriques

Théorème 3 (Résolution d'équations trigonométriques élémentaires) :

Soient a et b deux réels.

$$\begin{aligned} \cos(a) = \cos(b) &\iff a \equiv b [2\pi] && \text{ou} && a \equiv -b [2\pi] \\ \sin(a) = \sin(b) &\iff a \equiv b [2\pi] && \text{ou} && a \equiv \pi - b [2\pi] \\ (\cos(a) = \cos(b) \text{ et } \sin(a) = \sin(b)) &\iff a \equiv b [2\pi]. \end{aligned}$$

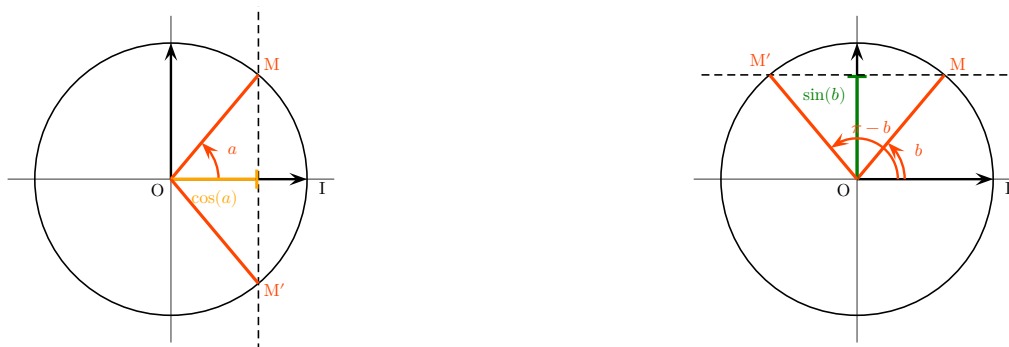


Figure VII.5 – Équations trigonométriques.

Exercice 5 : Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x)$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) = \cos(2x)$
3. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

II/ Trigonométrie

Littéralement, « trigonométrie » signifie « mesure des trois angles », donc se rapporte aux propriétés des angles d'un triangle. On fait donc ainsi référence aux interprétations géométriques usuelles des fonctions trigonométriques.

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{HM}{OM}.$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{OH}{OM}.$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{HM}{OH}.$$

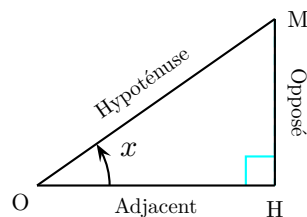
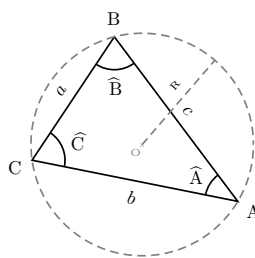


Figure VII.6 – Trigonométrie dans un triangle.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$



$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R} = \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc}.$$

$$\text{Avec } p = \frac{1}{2}(a + b + c), \text{ on a } \mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Figure VII.7 – Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.

II.1 Formules de duplication

Proposition 4 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

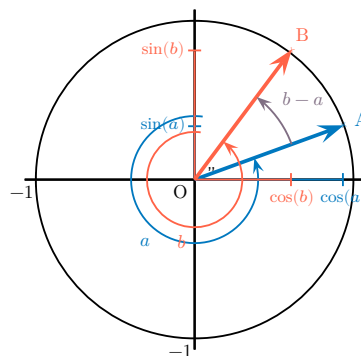
$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b).$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b).$$

Preuve : soit a et b deux réels quelconques.

Dans un repère orthonormé orienté positivement, on considère deux points $A(\cos(a); \sin(a))$ $B(\cos(b); \sin(b))$ du cercle trigonométrique.



Il suffit de calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de deux manières :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

$$\cos(b - a) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

La **proposition (2)** permet d'écrire :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

Les autres relations s'en déduisent en transposant b par $-b$ puis $a + b$ par $\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \pm b$.

Remarque : On verra une autre démonstration au prochain chapitre.

En prenant $a = b$ dans les expressions de la **proposition (26)**, on obtient aussi :

Proposition 5 (Formule de duplication) :

Pour tout réel a , on a :

$$\text{— } \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a).$$

$$\begin{aligned} \text{— } \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2 \cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(a). \end{aligned}$$

Exercice 7 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

II.2 Formules de linéarisation

La deuxième assertions de la **proposition (5)** permet d'obtenir une première linéarisation pour les expressions de degré 2 :

Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) :

Soit $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{— } \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\text{— } \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

En retournant les formules de la **proposition (26)**, on obtient des formules de développement de produit du premier ordre :

Proposition 7 :

Soient a et b deux réels :

$$\text{— } \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)].$$

$$\begin{aligned} - \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \\ - \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \end{aligned}$$

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k(x) \sin^l(x)$ où k et l sont supérieurs à 2, on utilise plutôt les écritures complexes, formules de Moivre et d'Euler qui seront vues au chapitre suivant. Patience !

Exercice 8 :

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

III/ Fonctions circulaires

Pour chaque réel x , on peut calculer les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux nouvelles fonctions.

Définition 2 : La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos : x \mapsto \cos(x) \qquad \sin : x \mapsto \sin(x).$$

Remarque : Les fonctions $\cos$ et $\sin$ portent le nom de « circulaires » car on peut paramétrer le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$ par :

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

III.1 Domaine de définition, parité et périodicité

On résume ici les propriétés découvertes au paragraphes précédents.

Proposition 8 (Cosinus et Sinus) :

- Les fonctions *cos* et *sin* sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$.
- La fonction *cos* est *paire*. La fonction *sin* est *impaire*.

Définition 3 (Fonction périodique) : On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qu'elle est *périodique de période T* ou *T-périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x + T \in \mathcal{D}_f, \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x). \quad (\text{VII.1})$$

Corollaire 8.1 :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Remarque : Un élève attentif aura remarqué que l'on a simplement montré que les fonctions circulaires admettaient 2π comme période et non que celle-ci était la plus petite des périodes.

C'est le cas mais la démonstration de cette propriété nous échappe encore et nécessite une définition plus rigoureuse du nombre π lui-même.

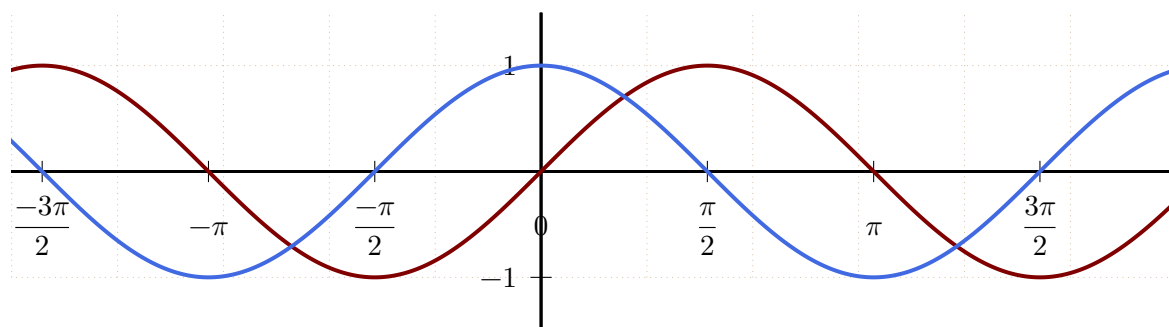


Figure VII.8 - $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π -périodiques.

Exercice 9 : Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \sin(6x - 3)$ est $\frac{\pi}{3}$ -périodique.

Compléments sur les fonctions périodiques :

- Une fonction T -périodique est aussi kT -périodique pour $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle *période* de f , le plus petit réels strictement positif T vérifiant (VII.1) :

$$T = \inf \{ t \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in \mathcal{D}_f, x + t \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + t) = f(x) \}.$$

ATTENTION

Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

- Alors qu'une fonction peut être paire ou impaire sur un intervalle borné à condition qu'il soit symétrique par rapport à O , l'invariance par translation du domaine de définition d'une fonction périodique lui impose d'être nécessairement infini.

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}$.

Montrer que f est périodique de période 4.

Proposition 9 (Interprétation graphique) :

Une fonction f est T -périodique si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Méthode 1 (Restriction du domaine d'étude) :

Si la fonction est T -périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T et on complète la courbe par translations de vecteur $T\vec{i}$.

Exercice 11 : Proposer un domaine d'étude minimal pour $f : x \mapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \right)^2$.

Proposition 10 (Opérations sur les fonctions périodiques) :

Soient $T \in \mathbb{R}_+$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$ sont aussi T -périodiques, ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- Pour tout $a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est $\frac{T}{a}$ -périodique.

Exemple 2 : La fonction $x \mapsto \cos(5x)$ est $\frac{2\pi}{5}$ -périodique et un domaine d'étude sera $\left[0; \frac{\pi}{5}\right]$ par périodicité et parité.

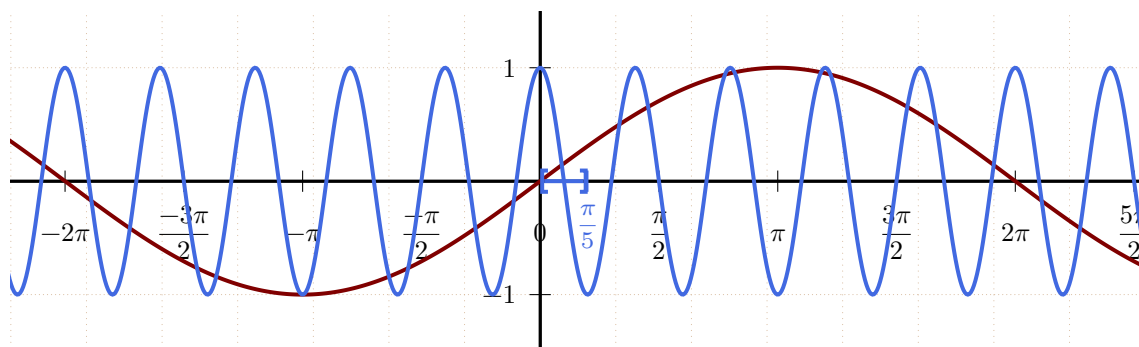


Figure VII.9 – $x \mapsto \cos(5x)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
En physique, on parle de dilatation temporelle.

III.2 Continuité, dérivabilité**Théorème 11 (Continuité) :**

Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Montrons que $\cos$ et $\sin$ sont continues en a i.e. $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$.

En prenant $h \in \mathbb{R}$, il est équivalent de montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a + h) = \cos(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) = \sin(a).$$

Or, $\cos(a+h) = \cos(a)\cos h - \sin(a)\sin h$ et $\sin(a+h) = \sin(a)\cos h + \sin h\cos(a)$.

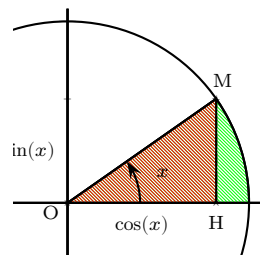
Il est donc nécessaire de connaître tout d'abord $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h)$.

Mieux, par parité et imparité, seules suffisent $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sans rien changer à la démonstration, on peut considérer $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Considérons alors le point M du cercle trigonométrique défini par $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) \equiv x \pmod{2\pi}$ et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

Le triangle rectangle OHM est alors inscrit dans l'arc de disque OIM d'angle au centre x .



En terme d'aires, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\mathcal{A}_{OHM}}{\cos(x)\sin(x)} \leq \mathcal{A}_{OIM} \\ 0 &\leq \frac{\frac{1}{2} \sin(2x)}{\cos(x)\sin(x)} \leq \frac{1}{2}x \\ 0 &\leq \frac{\sin(2x)}{4\cos(x)} \leq \frac{1}{2}x \quad (\text{D'après la proposition (5)}) \\ 0 &\leq \frac{\sin(u)}{4\cos(u/2)} \leq \frac{1}{2}u \quad (\text{En posant } u = 2x) \\ 0 &\leq \frac{\sin(u)}{4\cos(u/2)} \leq \frac{1}{2}u \end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0$ puis, par imparité :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0.$$

Utilisons alors la première assertion du **théorème (1)**, $\cos(x) = +\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ car $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

On en déduit aisément :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1.$$

Ces deux résultats en poche, on obtient alors aisément :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a+h) & \text{et} & \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) & & \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a) \\ &= \cos(a) & & \quad = \sin(a). \end{aligned}$$

Les fonctions cos et sin sont donc continues en a donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Les physiciens ont l'habitude d'utiliser le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ sous la forme :

« pour les petites valeurs de x , $\sin(x) \simeq x$ ».

C'est en particulier ce qu'ils font quand ils analysent le mouvement du pendule simple.

Le **théorème (12)** permet surtout d'affirmer que les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables en 0.

En effet, les taux d'accroissement en 0 de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\sin(0+x) - \sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(0+x) - \cos(0)}{x} = \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

D'où, $(\sin(x))'(0) = 1$ et $(\cos(x))'(0) = 0$.

Remarque : Les courbes représentatives des fonctions $\cos$ et $\sin$ admettent ainsi, respectivement, comme tangente à l'origine les droites d'équation :

$$(T_{\cos}) : y = 1 \quad \text{et} \quad (T_{\sin}) : y = x.$$

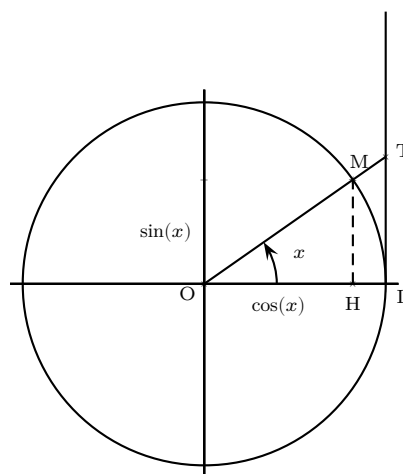
Preuve : A priori, nous avons une forme indéterminée de la forme « $\frac{0}{0}$ ». Nous allons lever cette indétermination grâce au théorème d'encadrement et un peu de géométrie de cinquième.

Tout d'abord, puisqu'il s'agit d'un calcul de limite en 0 on peut restreindre l'étude à un voisinage de 0, en l'occurrence, $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Par parité ou imparité, on se restreint même à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. On complètera l'étude par symétrie.

On reprend l'idée de la démonstration précédente mais en poussant le raisonnement car nous avons besoin de plus d'informations. Ce résultat est, en effet, un résultat d'« ordre » supérieur.

Considérons encore le point M du cercle trigonométrique défini par $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) \equiv x [2\pi]$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et T le point de $[OM]$ d'abscisse 1.

En particulier $x > 0$.



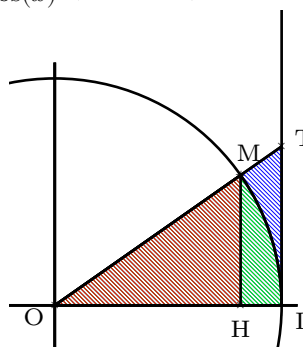
D'après le théorème de Thalès dans le triangle OIT,

$$\frac{OH}{OI} = \frac{IT}{HM} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sin(x)}{IT} \Leftrightarrow IT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} (= \tan(x)).$$

De plus, en considérant les aires, on a :

$$\mathcal{A}_{OHM} \leq \mathcal{A}_{OIM} \leq \mathcal{A}_{OIT}.$$

où $\mathcal{A}_{OIM}$ est encore l'aire de l'arc de disque d'angle au centre x , $\mathcal{A}_{OHM} = \frac{\cos(x) \sin(x)}{2}$ et $\mathcal{A}_{OIT} = \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)}$, respectivement celles des triangles OHM et OIT.



$$\begin{aligned}
 \text{D'où, } \frac{\cos(x) \sin(x)}{2} &\leq \frac{1}{2}x \leq \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)} \\
 0 < \cos(x) &\leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}, \text{ avec } \sin(x) > 0 \text{ sur }]0; \frac{\pi}{2}[\\
 \frac{1}{\cos(x)} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x), \text{ en inversant les inégalités (strictement positives !).} \\
 \text{Donc, } \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad \frac{1}{\cos(x)} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x).
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, d'après le théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, puis, par parité :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Pour la deuxième limite, il faut commencer par faire un peu de trigonométrie :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \frac{\cos(x) - 1}{x} = -\frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin(0) = 0.$$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on obtient bien le résultat escompté :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Exercice 12 : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{x}$.

Correction : Il suffit d'appliquer les formule de la **proposition (6)** pour se ramener à une formule connue :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{4 (\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

$$\text{On en déduit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 \underset{u = \frac{x}{2}}{=} \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Puis } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{u = \sqrt{x} \\ x > 0}} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

On va faire mieux que le **théorème (12)** :

Théorème 13 (Dérivabilité) :

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On forme les taux d'accroissement de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \frac{\sin(h)}{h}. \end{aligned}$$

Or, d'après le **théorème (12)**, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de produits et de sommes, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x).$$

Autrement dit, la fonction cosinus est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Pour la fonction, sinus, on va se ramener au résultat précédent en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

La fonction sinus est donc, elle aussi, dérivable et, pour tout réel x ,

$$(\sin)'(x) = (-1) \times (\cos)' \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos(x).$$

Corollaire 13.1 (Fonctions composées) :

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\cos(u(x)) \right)' = -u'(x) \times \sin(u(x)) \quad \text{et} \quad \left(\sin(u(x)) \right)' = u'(x) \times \cos(u(x)).$$

Exercice 13 : Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}_f$ et calculer la fonction dérivée de

$$f : x \mapsto \frac{\cos(x) + 2}{\sin^2(x) + 2}.$$

III.3 Variations et représentation graphique

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques donc il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π et de compléter la courbe par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

On considère alors l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

De plus, ces mêmes fonctions sont, respectivement, paire et impaire. L'étude sur la moitié de l'intervalle précédent suffit donc à connaître la courbe que l'on complètera alors par symétrie axiale ou centrale, respectivement.

On va donc étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Théorème 14 :

- La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Preuve : D'après le **théorème (13)**, il suffit d'étudier le signe de leur dérivée :

- $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ sur $[0; \pi]$ donc la fonction cosinus y est décroissante.
- $\sin'(x) = \cos(x)$, positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. La fonction sinus y est donc croissante puis décroissante.

On en déduit les tableaux de variations puis les courbes représentatives en (VII.12).

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		+	0	−	
cos	−1	↗	1	↘	−1

Figure VII.10 – Tableau de variations de $x \mapsto \cos(x)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$		+	0	−	
sin	−1	↗	1	↘	−1

Figure VII.11 – Tableau de variations de $x \mapsto \sin(x)$

Figure VII.12 – Tableaux de variation des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

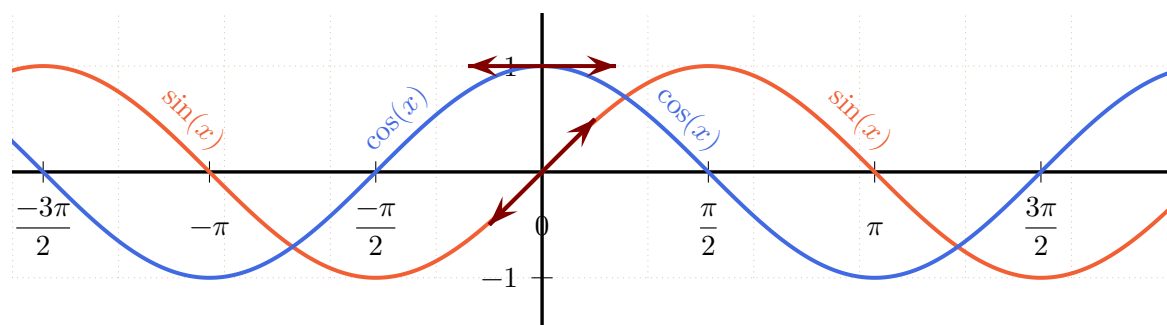


Figure VII.13 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

En remarquant que $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe de sin est obtenue à partir de celle de cos par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

En physique, on dira que sin est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à cos.

Définition 4 : Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont appelées *sinusoïdes*.

Exercice 14 : Étudier la fonction $f : x \mapsto \sin^2(x) + \cos(x)$ et préciser les intersections de sa courbe représentative avec l'axe des abscisses.

IV/ Fonctions circulaires réciproques

IV.1 Arccosinus et Arcsinus

Cosinus : La fonction $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective.

Par exemple, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une infinité d'antécédents $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots$ Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$).

Par contre, la restriction de la fonction cos à $[0; \pi]$ corestreinte à $[-1; 1]$ est continue et strictement décroissante donc bijective.

On la note $\cos|_{[0; \pi]}^{[-1; 1]}$:

$$\begin{aligned} \cos|_{[0; \pi]}^{[-1; 1]} : [0; \pi] &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

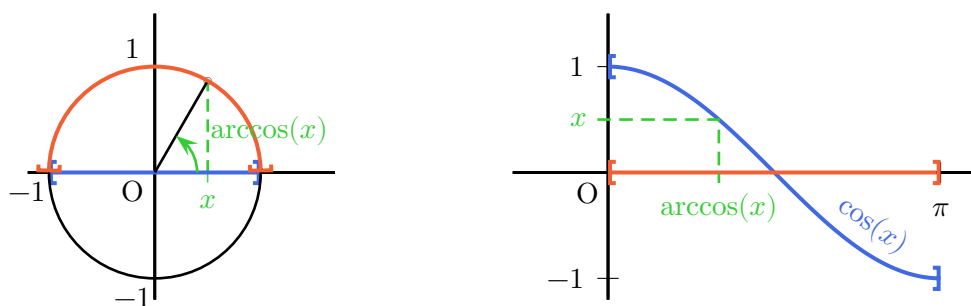


Figure VII.14 – La fonction cos est continue strictement décroissante de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. Elle y réalise donc une bijection.

Sinus : La fonction $\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ n'est pas non plus bijective.

Par exemple, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une infinité d'antécédents $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$ Elle n'admet donc pas de réciproque.

Par contre, la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ corestreinte à $[-1; 1]$ est continue et strictement croissante donc bijective.

On la note $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}^{[-1;1]}$:

$$\begin{aligned} \sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}^{[-1;1]} : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

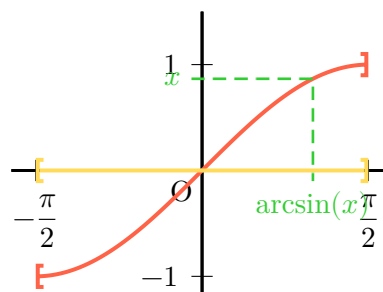
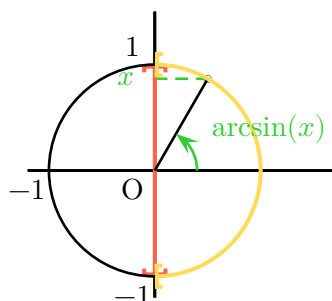


Figure VII.15 – La fonction $\sin$ est continue strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 5 (Arccosinus et Arcsinus) : On appelle :

- fonction *arccosinus*, notée $\arccos$, la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1; 1]$.
- fonction *arcsinus*, notée $\arcsin$, la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ corestreinte à $[-1; 1]$.

Pour x dans $[-1; 1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut x . Même chose pour $\arcsin(x)$ avec le sinus dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Corollaire 14.1 (Formule de réciprocité) :

Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ sont définies sur $[-1; 1]$ et on a :

- $\forall x \in [-1; 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$
- $\forall x \in [0; \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x.$
- $\forall x \in [-1; 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$

Exemples 3 (Arccosinus) :

- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$
- $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$

Mais **ATTENTION** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}.$

Exemples 4 (Arcsinus) :

$$— \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

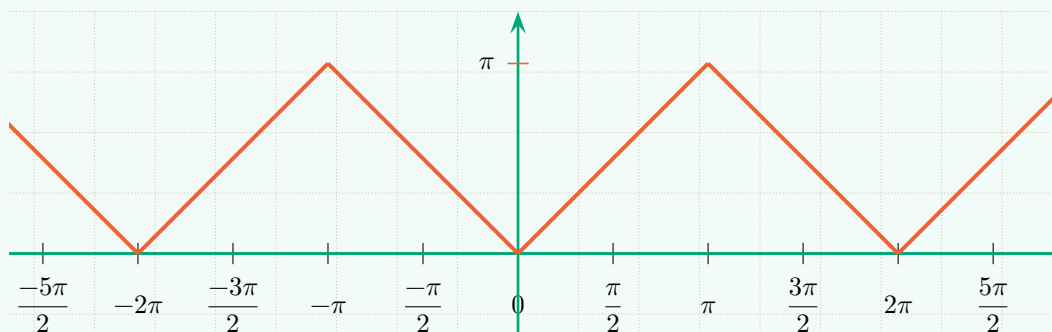
$$— \sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$— \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Mais **ATTENTION** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}.$

Exercice 15 : Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :



IV.2 Dérivabilité

Proposition 15 :

— Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1; 1]$ et dérivables sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x).$$

En particulier,

- la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.
- la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1; 1]$.
- La fonction arcsin est impaire.

Preuve :

- En tant que réciproques de fonctions continues, les fonctions arccos et arcsin sont continues sur leur ensemble de définition *i.e.* sur $[-1; 1]$.
- Pour les mêmes raisons, arccos et arcsin sont également strictement monotones, respectivement, strictement décroissante et croissante sur $[-1; 1]$.
- Pour tout $x \in]0; \pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ et ne s'annule pas.

Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arccos est dérivable sur $] - 1; 1[$, et pour tout $x \in] - 1; 1[$, on a :

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

D'autre part, pour tout $x \in] - 1; 1[$, $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$, donc $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$ *i.e.* $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Or, $\arccos(x) \in [0; \pi]$ et sin est positif sur cet intervalle.

$$\text{Donc } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} \text{ i.e. } \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De même, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ et ne s'annule pas.

Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arcsin est dérivable sur $] - 1; 1[$, et pour tout $x \in] - 1; 1[$, on a :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

D'autre part, pour tout $x \in] - 1; 1[$, on obtient aussi $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$ *i.e.* $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Or, $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et cos est positif sur cet intervalle.

$$\text{Donc } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2} \text{ i.e. } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Pour montrer l'impairité de arcsin, il suffit d'utiliser l'impairité de sin.

$$\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(-x)) = -x = -\sin(\arcsin(x)) = \sin(-\arcsin(x)).$$

Il suffit alors de composer les deux membres extrêmes de cette équation par arcsin pour obtenir :

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x).$$

Remarques :

- La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que la courbe de arccos admet le point $(0; \frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.
- En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(T_{\arccos}) : y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (T_{\arcsin}) : y = x.$$

- Les fonctions arccos et arcsin ne sont pas donc pas dérivables en 1 et -1 mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.
- Dans la pratique, on préfère arcsin qui est impaire, nulle en 0, ... à arccos.

Par exemple, on dira souvent qu'une primitive de $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est $x \mapsto -\arcsin(x) + K$ où $K \in \mathbb{R}$ au lieu de $x \mapsto \arccos(x) + K$.

Exercice 16 : Montrer que, $\forall x \in [-1 ; 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Corollaire 15.1 :
Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $] -1 ; 1[$, $\arccos(u)$ et $\arcsin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad \left(\arcsin(u)\right)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\left(\arccos(u)\right)'(x).$$

IV.3 Courbes représentatives

On en déduit le tableau de variation et la courbe représentative des fonctions arccos et arcsin en (VII.17).

x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

Figure VII.16 – Tableaux de variation de $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1 ; 1]$.

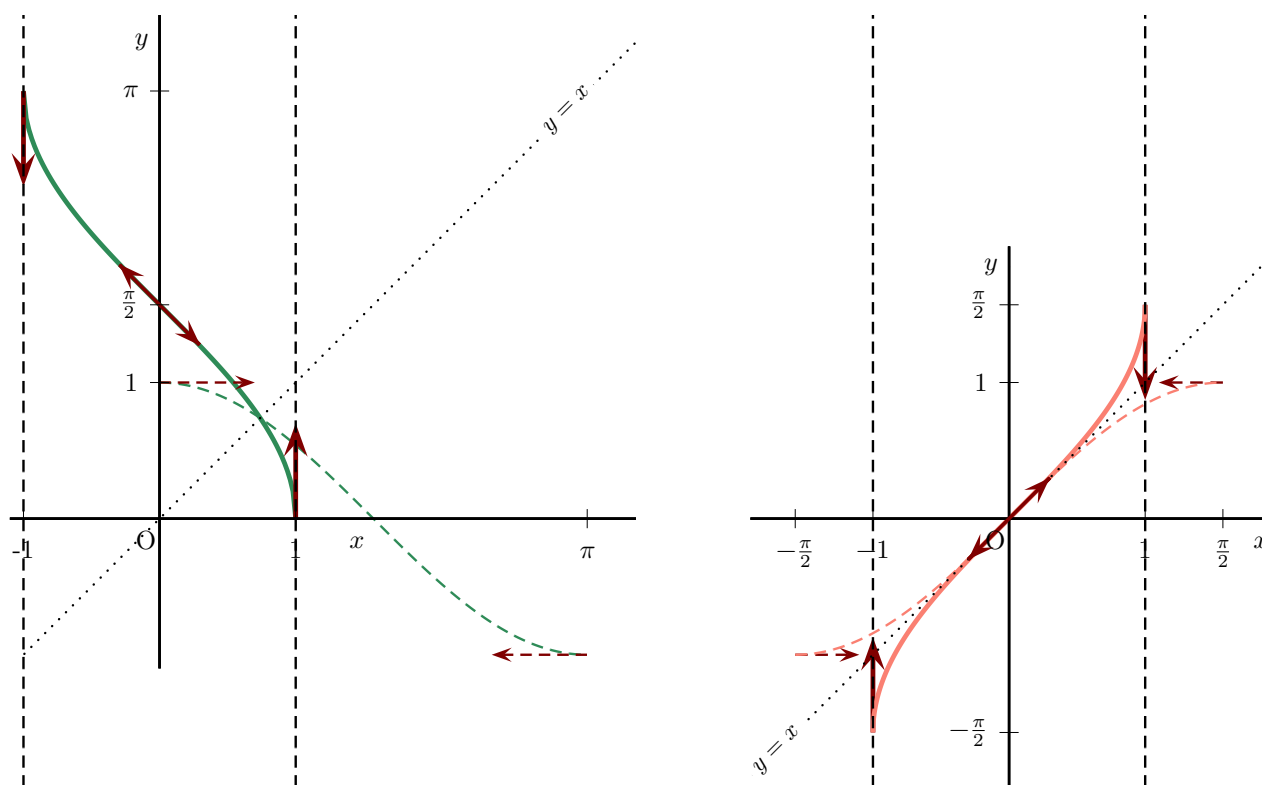
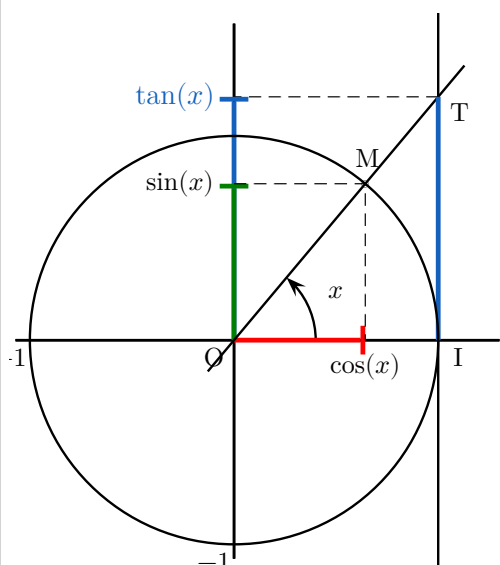


Figure VII.17 – Courbes représentatives de $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$. En dash, les courbes de cos et sin.

Remarque : Les courbes de sin et arcsin sont également tangentes à l'origine.

V/ Fonctions tangente et réciproque

V.1 Fonction tangente



Lorsque $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, on note T l'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en I(1,0).

L'ordonnée de T est appelée **tangente de x**, notée $\tan(x)$.

En considérant des longueurs algébriques, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OIT, on a :

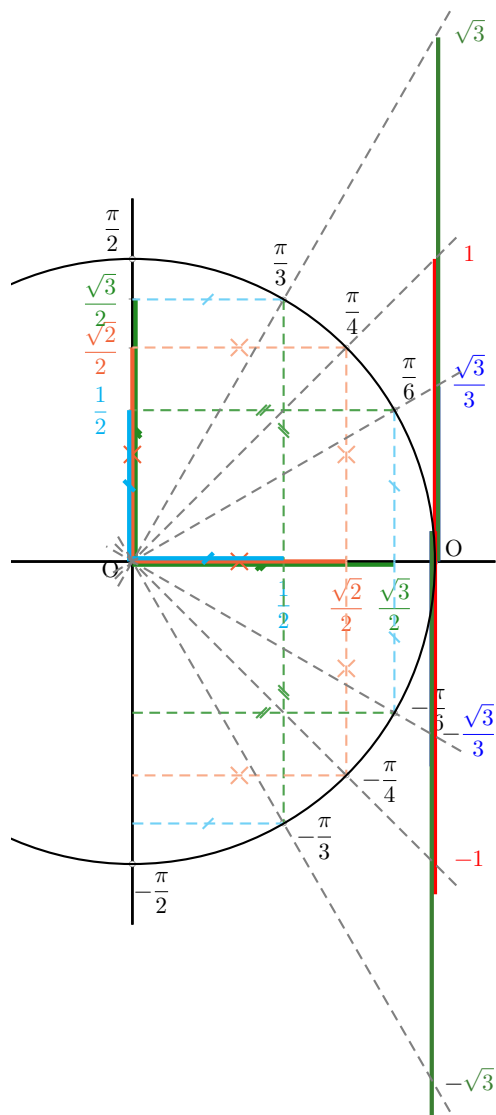
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Figure VII.18 – $\tan(x)$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Pour tout x réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Définition 6 (Tangente) : On appelle fonction *tangente*, notée $\tan$, la fonction définie par :

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0

Figure VII.19 – Tangente d’angles remarquables.

Proposition 16 (Domaine d'étude) :

1. La fonction $\tan$ est impaire.
2. La fonction $\tan$ est π -périodique.
3. La fonction $\tan$ est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction $\tan$ est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

On étudiera donc la fonction $\tan$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on complètera la courbe représentative par symétrie centrale puis translations de vecteur $\pi\vec{i}$.

Preuve :

1. $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$
2. De plus, $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$

La fonction $\tan$ est donc impaire.

3. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues et $\cos$ ne s'annule pas.

Comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul, la fonction $\tan$ est donc continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Par le même raisonnement, comme quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul, la fonction $\tan$ est donc dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, (\tan)'(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0.$$

Comme $\tan'(0) = 1$, la courbe représentative de $\tan$ admet comme tangente à l'origine la droite d'équation :

$$(T_{\tan}) : y = x.$$

Remarque : Posons φ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = \tan(x) - x$.

Comme somme de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\varphi'(x) = \tan^2(x) \geq 0.$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\varphi(0) = 0$, elle y est donc positive.

On en déduit que la courbe représentative de $\tan$ est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

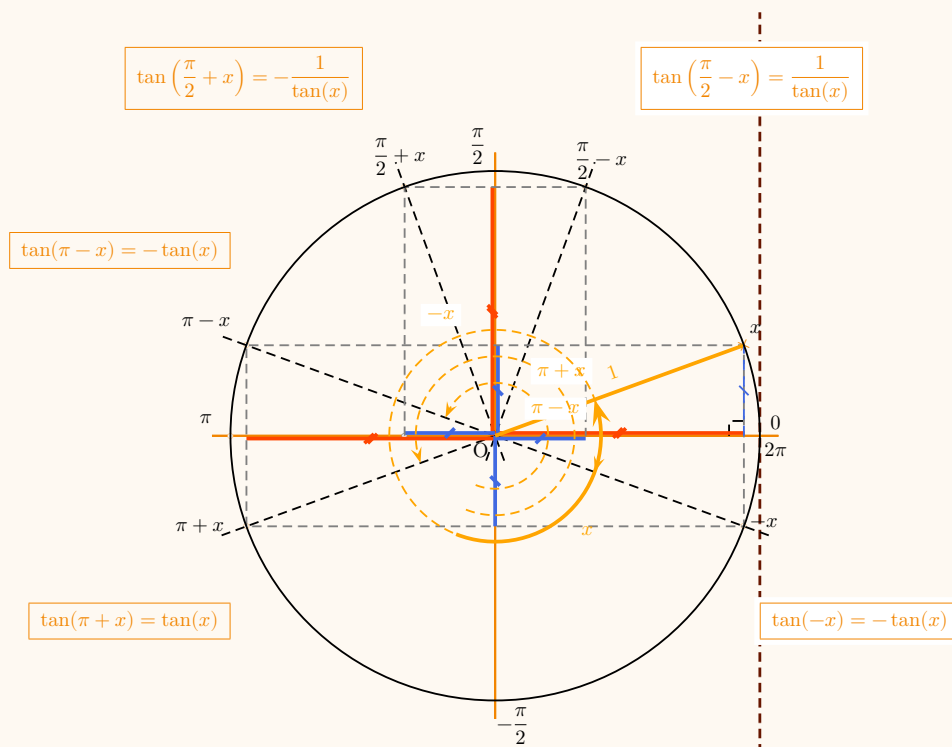
Par symétrie de centre O, on en déduit aussi que la courbe traverse sa tangente en 0 *i.e.* la courbe admet un *point d'inflexion* en 0.

Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) :

Soit $x \in \mathcal{D}_{\tan}$.

Suivant les conditions d'existence, on a :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



Un peu d'histoire : De même que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ a donné à la deuxième fonction son nom de « co » sinus, le fait que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ donne à la fonction inverse de $\tan$ le nom de « co » tangente.

On retiendra que les cos et sin de deux angles complémentaires sont égaux. Même chose pour tan et cotan.

Exercice 17 : À quelle condition peut-on écrire $\cos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$.

Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

Preuve :

1. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty$.

2. Par symétrie centrale de centre O, ...
3. On reconnaît la limite du taux d'accroissement en 0 d'une fonction dérivable :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = (\tan)'(0) = 1.$$

La courbe représentative admet donc une asymptote d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ puis, par symétrie et translation, des asymptotes d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

De même que précédemment, la proposition (18) .3 signifie, que dans un voisinage de 0 :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Résultat qui justifie l'approximation des physiciens pour de petits angles $\tan(x) \simeq x$.

On obtient donc son tableau de variation et sa courbe représentative (VII.21).

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		+	1	+	
$\tan$		$-\infty$	0	$+\infty$	

Figure VII.20 – Tableau de variation $x \mapsto \tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

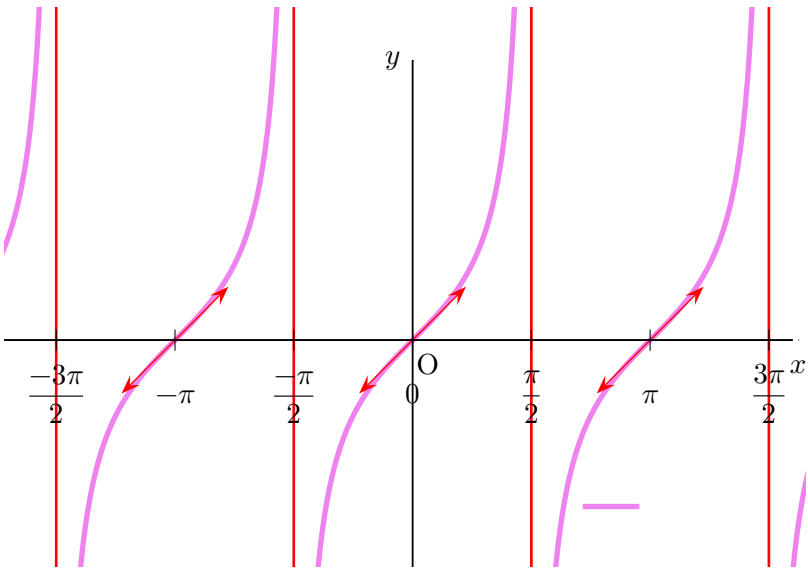


Figure VII.21 – Courbe représentative de $x \mapsto \tan(x)$ sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Proposition 19 (Équations trigonométriques) :

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y [\pi].$$

Preuve : La fonction $\tan$ étant continue et strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliquées aux fonctions strictement monotones, pour tout réel k l'équation $\tan(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, admet une unique solution dans chaque intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

Par translation de vecteur $\pi\vec{i}$, on obtient donc le résultat.

Enfin quelques formules utiles :

Proposition 20 :

Formule d'addition : Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

$$\text{— } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{— } \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Formule de duplication : Pour tout $(a; \in) \mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan(2a)$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}. \quad (\text{VII.2})$$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

$$\text{— } \tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} \quad \text{— } \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}.$$

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\text{— } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{— } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{— } \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Preuve :

— Soit $(a; b; a+b) \in (\mathcal{D}_{\tan})^3$. En particulier, $\cos(a)\cos(b) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\cancel{\cos(a)\cos(b)} \left(\frac{\sin(a)\cancel{\cos(b)}}{\cancel{\cos(a)}\cancel{\cos(b)}} + \frac{\cancel{\cos(a)}\sin(b)}{\cancel{\cos(a)}\cos(b)} \right)}{\cancel{\cos(a)\cos(b)} \left(1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)} \right)} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}. \end{aligned}$$

Le raisonnement est identique pour $\tan(a-b)$ ou en remplaçant b par $-b$.

— Il suffit d'appliquer la formule précédente pour $a = b \in \mathcal{D}_{\tan}$.

— Soit $(p; q) \in (\mathcal{D}_{\tan})^2$. En particulier, $\cos(p) \cos(q) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tan(p) + \tan(q) &= \frac{\sin(p)}{\cos(p)} + \frac{\sin(q)}{\cos(q)} = \frac{\sin(p) \cos(q) + \sin(q) \cos(p)}{\cos(p) \cos(q)} \\ &= \frac{\sin(p+q)}{\cos(p) \cos(q)}.\end{aligned}$$

On obtient la formule de $\tan(p) - \tan(q)$ en remplaçant q par $-q$ et en utilisant l'impairité de $\tan$.

— Soit $x \in \mathcal{D}_{\tan}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}_{\tan}$. En particulier $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.

En posant $x = 2a$ dans (VII.2), on a déjà :

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Enfin, les formules de duplication pour le $\cos$ et le $\sin$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Remarque : Toutes ces formules reposent sur la relation $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice 18 : Sans s'occuper du domaine de définition, exprimer $\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

V.2 Fonction arctangente

La fonction $\tan : \mathcal{D}_{\tan} \mapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$ s'entend).

La restriction de la fonction $\tan$ à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ est bijective. On la note $\tan_{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$.

$$\begin{aligned}\tan_{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x)\end{aligned}$$

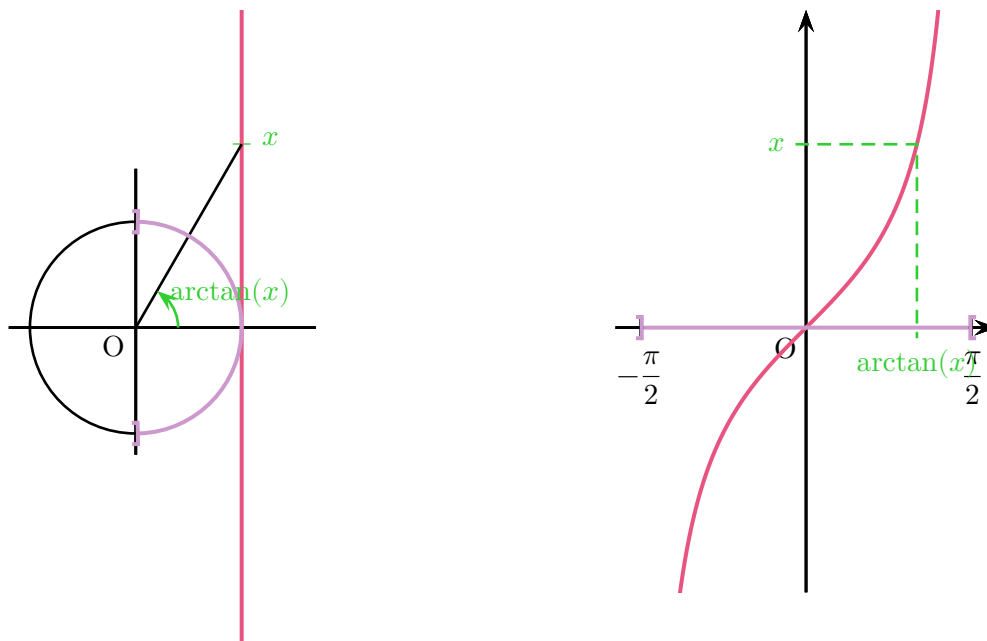


Figure VII.22 – La fonction $\tan$ est continue et strictement monotone de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 7 (Arctangente) : On appelle fonction *arctangente*, notée $\arctan$, la bijection réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On en déduit immédiatement,

Corollaire 20.1 (Formule de réciprocity) :

La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$— \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$$

$$— \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x.$$

Exemples 5 :

$$— \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$— \tan(\arctan(\sqrt{3})) = \sqrt{3}.$$

$$— \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Mais **ATTENTION** $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}.$

Exercice 19 : Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(Hutton, 1776)

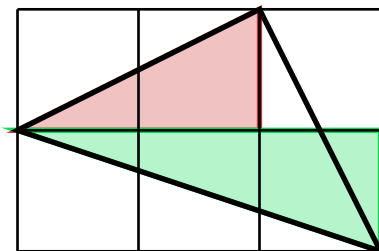


Figure VII.23 – $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Correction : Tout repose sur la formule, dans ses conditions de validité, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

$$\text{Donc, } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$

Or, $0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$ entraînent $0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \pi$.

$$\text{Donc } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Proposition 21 :

— La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

— La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particulier, $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $\arctan$ est impaire.

En particulier, la courbe représentative de $\tan$ admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm \frac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine.

Preuve :

- La fonction arctan est la fonction réciproque d'une fonction continue de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty; +\infty[$, d'où sa continuité sur $\mathbb{R}$ et ses limites aux bornes du domaine de définition.
- Pour les mêmes raisons, arctan est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tan est bijective et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1 > 0.$$

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arctan est dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Pour montrer l'impairité de arctan, il suffit d'utiliser l'impairité de tan.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\tan(\arctan(-x)) = -x = -\tan(\arctan(x)) = \tan(-\arctan(x)).$$

Il suffit alors de composer les deux membres extrêmes de cette équation par arctan pour obtenir :

$$\arctan(-x) = -\arctan(x).$$

On en déduit le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction arctan en (VII.24).

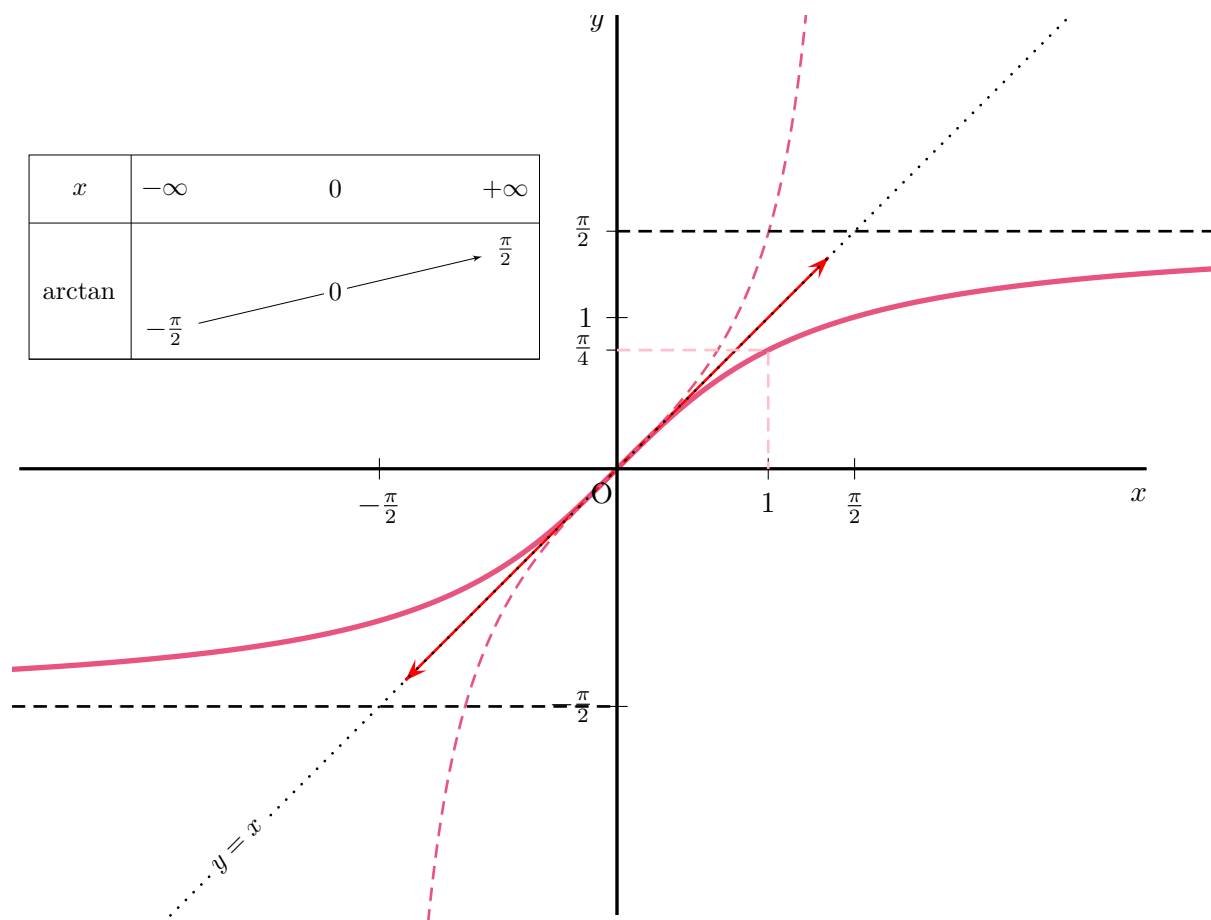


Figure VII.24 – Tableau de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de tan.

Remarque : Les courbes de $\tan$ et $\arctan$ sont tangentes à l'origine.

Corollaire 21.1 :

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I , $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \left(\arctan(u) \right)'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}.$$

Exercice 20 : Étude et représentation graphique de $f : x \mapsto \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right)$.

Correction : La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ est définie si, et seulement si $x \neq \pi + 2\pi k$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car $|\cos(x)| \leq 1$, paire et au moins 2π -périodique. On l'étudiera donc sur $[0; \pi[$ et on complètera l'étude par symétrie d'axe celui des ordonnées puis par translation de vecteurs $2\pi i$.

Si on ne connaît pas ces formules de trigonométrie, on remarquera quand même que les variations de f sont les mêmes que celle de la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ car $\arctan$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont croissantes.

La fonction $x \mapsto \frac{1 - u}{1 + u}$, dérivable sur $] -1; 1[$, est décroissante de même que $\cos$ sur $[0; \pi[$.

La fonction f est donc croissante sur $[0; \pi[$.

On a $f(0) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit le tableau de variations sur $] -\pi; \pi[$:

x	$-\pi$	0	π
f	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

Maintenant, pour ceux qui connaissent leurs formules :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; \pi[, f(x) &= \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) \\ &= \arctan \left(\sqrt{\frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{2 \cos^2(\frac{x}{2})}} \right) \end{aligned}$$

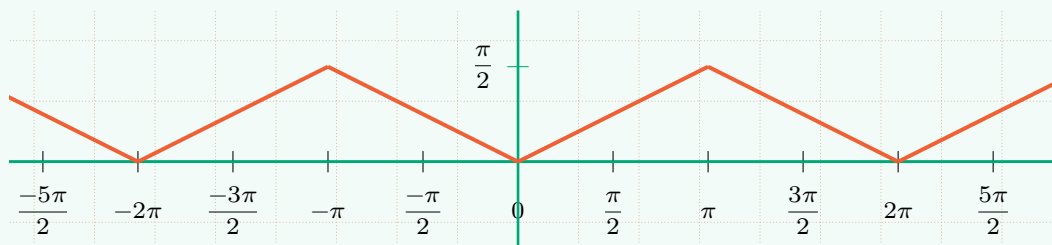
Or, $\forall x \in [0; \pi[, \frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ i.e. $\sin(\frac{x}{2}) \geq 0$ et $\cos(\frac{x}{2}) > 0$.

$$\text{D'où, } f(x) = \arctan \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \right) = \arctan \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

Enfin, $\frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, d'où :

$$\forall x \in [0; \pi[, f(x) = \frac{x}{2}.$$

On peut enfin tracer intelligemment la courbe représentative de f :



Remarque : La fonction f se prolonge par continuité en tous les $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $f(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 22 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

Preuve : On utilise la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:

$$\forall u \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{1}{\tan u}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = x = \tan(\arctan(x)).$$

Donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \arctan(x) \pmod{\pi}$.

Or, $\arctan(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ car $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$.

Donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et l'égalité.

Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on applique l'égalité obtenue à $-x > 0$.

Exercice 21 : Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(a) > \frac{a}{1+a^2}$.

Exercice 22 : Étudier les asymptotes de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x + 1) \arctan x.$$

Correction : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, $\arctan$ étant bornée, diverge comme x en $\pm\infty$. Il n'y a donc aucune asymptote parallèle aux axes.

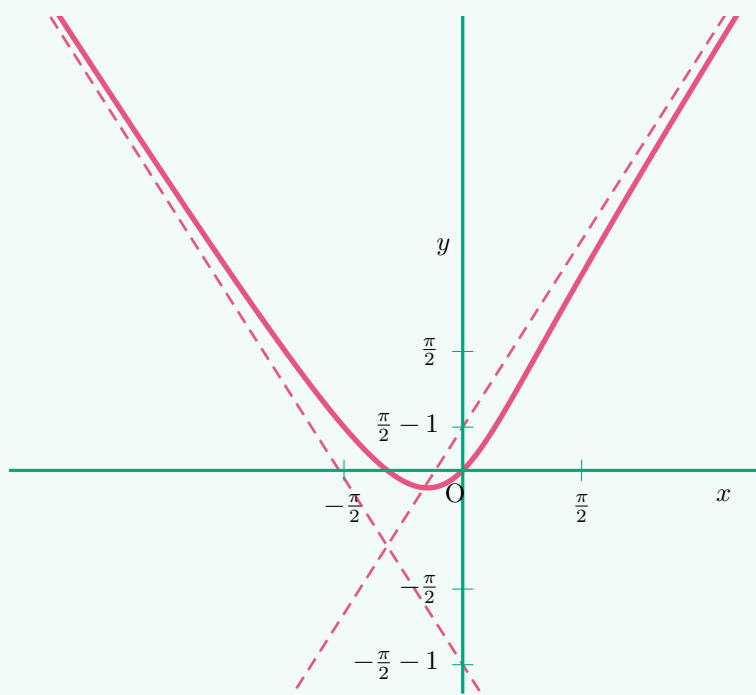
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) + \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$. Il a donc une direction asymptotique de vecteur $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right) x + \arctan(x) \right)$ La courbe de f admet donc la droite d'équation

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u = \frac{1}{x}}} -\frac{\arctan(u)}{u} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

tion $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$ comme asymptote en $+\infty$.

Le même raisonnement mené en $-\infty$ conduit à $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1$.



VI/ Tableau récapitulatif _____

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$		$-\sin(x)$
$\sin(x)$			$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$		$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$[-1 ; 1]$	$] -1 ; 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$			$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$		$\frac{1}{1+x^2}$

Fonctions circulaires

I/ Un peu de trigonométrie

Exercice 1 : Calculer :

1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

3. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

4. $\sin\left(\frac{121\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : Soit $a \in [\pi; 2\pi]$ la mesure d'un angle tel que $\cos(a) = \frac{1}{5}$. Calculer $\sin(a)$.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$$

Exercice 4 : Sans se préoccuper des domaines de définition, simplifier les expressions suivantes :

1. $(\cos(x) + \sin(x))^2$

2. $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x)$

3. $\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$

4. $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

5. $\sin^6(x) + \cos^6(x) - 2\sin^4(x)$

6. $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} + \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$

7. $\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

8. $\sin^4(x) - \cos^4(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$

9. $\sin^4(x)(3 - 2\sin^2(x)) + \cos^4(x)(3 - 2\cos^2(x))$

10. $\sin^6(x) + \cos^6(x)$ et résoudre $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \frac{3}{8}$

Exercice 5 :

1. En remarquant que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ puis calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3} + 1)\cos(x) + (\sqrt{3} - 1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Correction :

3. $(\sqrt{3} + 1)\cos(x) + (\sqrt{3} - 1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\cos(x) + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \left(\frac{\pi}{12} - \pi\right)$$

Donc $x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Exercice 6 : Calculer la valeur exacte de $\frac{\cos(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12}) - \sin(\frac{\pi}{12})}$.

Correction : $\frac{\cos(\frac{\pi}{12}) + \sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12}) - \sin(\frac{\pi}{12})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{12}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{\pi}{12})}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{12}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{\pi}{12})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}.$

Exercice 7 :

1. Simplifier l'expression $\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}$.
2. Montrer que $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$;

Correction :

1. $\forall x \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ et $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,

$$\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)} = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. $7 = 4 + 3 \dots$

Exercice 8 : Sachant que $\tan(x) = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Correction : $\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{a+b}{2a}$ et $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \frac{a-b}{2a}$.

Comme $\tan(x) \geq 0$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont de même signe donc les couples solutions sont $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2a}}; \sqrt{\frac{a-b}{2a}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{a+b}{2a}}; -\sqrt{\frac{a-b}{2a}}\right)$

Enfin, $0 < \frac{a-b}{a+b} < 1$, entraîne que $\sin(x) \leq \cos(x)$. Le seul couple possible est donc le premier i.e.

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{a+b}{2a}} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sqrt{\frac{a-b}{2a}}.$$

II/ Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$
5. $\sin(3x) = \cos(2x)$
6. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
7. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$
9. $\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6 = 0$
10. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$
11. $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$
12. $4\cos^2(x) - 1 = 0$
13. $\sqrt{1 - \sin^2(x)} + \sin(x) = \sqrt{2}$
14. $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$
15. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
16. $\sqrt{2}\sin(x) - \sqrt{6}\cos(x) = 2$
17. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$
3. $\cos(x) < 0$
4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin(4x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \geq 0$
7. $2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 < 0$
8. $\cos^2(x) - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq 0$
9. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{3} > 0$
10. $4\sin^2(x) - 3 \leq 0$
11. $\sin(2x) > \cos(x)$
12. $\sin(2x) + \cos(2x) > 0$

Exercice 11 : Résoudre $\tan(x)\tan(4x) = -1$

Correction : Il est nécessaire que $4x \in \mathcal{D}_{\tan}$ et $x \in \mathcal{D}_{\tan}$ i.e. $x \neq \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{4}\right]$ et $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Enfin $\tan(x) \neq 0$ et $\tan(4x) \neq 0$ entraînent $x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{4} \right]$.

$$\begin{aligned} \tan(x) \tan(4x) = -1 &\Leftrightarrow \tan(4x) = -\frac{1}{\tan(x)} \\ &\Leftrightarrow \tan(4x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Leftrightarrow 4x \equiv \frac{\pi}{2} + x \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Faut-il retirer des solutions ?

Ce sera le cas si, et seulement si $\exists (k; k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k'$
 $\frac{1}{4}k' - \frac{1}{3}k = \frac{1}{24}$
 $6k' - 8k = 1.$

Un nombre pair ne pouvant être égal à un nombre impair, cette équation n'a pas de solutions.

De même, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{2} + k'\pi \Leftrightarrow 2k - 6k' = 2 \Leftrightarrow k = 1 + 3k' \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{3}.$

Enfin, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k = k'\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3k' - 4k = 2 \Leftrightarrow 3k' = 2(1 + 2k).$ Comme 3 ne divise pas 2, il divise $1 + 2k$ i.e. $\exists m \in \mathbb{Z}$, tel que $1 + 2k = 3m$ et $k' = 2m$ ce qui revient encore à $k \equiv 1 \pmod{3}.$

Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \not\equiv 1 \pmod{3} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \dots \right\}.$

III/ Fonctions trigonométriques

Exercice 12 : Vérifier que la fonction f est T-périodique.

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ avec } T = \pi$$

$$f_5(x) = \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right) \text{ avec } T = \frac{3\pi}{5}$$

$$f_2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ avec } T = \pi$$

$$f_6(x) = \frac{2}{5} \cos(3\pi x) \text{ avec } T = \frac{2}{3}$$

$$f_3(x) = \sin(10\pi x) \text{ avec } T = 0, 2.$$

$$f_7(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{3}$$

$$f_4(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ avec } T = \frac{\pi}{2}$$

$$f_8(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{3}$$

Correction :

8. Là, faut faire un peu de trigonométrie d'abord :

$$\begin{aligned} f_8(x) &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \cos(x)(2(\cos^2(x) - 1) - 1) \\ &= \cos(x)(2\cos(2x) - 1) = 2\cos(x)\cos(2x) - \cos(x) \\ &= \cos(3x) + \cos(x) - \cos(x) \\ &= \cos(3x). \end{aligned}$$

Le résultat est, maintenant, évident : $f_8\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) : f_8$ est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique.

Exercice 13 : Après avoir déterminé les domaines de définition, étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes avant de proposer un domaine d'étude minimal :

$$f : x \mapsto \sin(2x)$$

$$g : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$$

$$h : x \mapsto \sin^2(x) - \sin(2x)\sin(3x)$$

$$i : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$j : x \mapsto x \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$k : x \mapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2.$$

$$l : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}$$

Exercice 14 : Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(x) \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(x^2)$$

$$f_3(x) = \cos^2(x)$$

$$f_4(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f_5(x) = \frac{3}{2 \cos(x)}$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(x)}{x + \sin(x)}$$

$$f_7(x) = \frac{\cos(x) + 2}{\sin^2(x) + 2}$$

$$f_8(x) = \frac{2 \cos(x) + 3}{2 \cos(x) - 3}$$

$$f_9(x) = (5x - 3)^3 \cos(x)$$

$$f_{10}(x) = (3x^2 - 2) \sin^2(x)$$

$$f_{11}(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_{12}(x) = \frac{2 \cos(2x)}{3 - \sin(1 - x)}$$

Exercice 15 : Pour tout $x \in [0; +\infty[$, montrer successivement que :

1. (a) $\sin(x) \leq x$.

(c) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.

(b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

(d) $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Correction : L'exercice est un peu répétitif mais s'enchaîne bien, résultat classique des propriétés des séries alternées que nous devons, pour l'instant, redémontrer à la main.

1. (a) Posons $\mu : x \mapsto \mu(x) = \sin(x) - x$.

La fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\mu'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0.$$

La fonction μ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mu(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \mu(x) \leq 0 \iff \sin(x) \leq x.$$

(b) Posons $\theta : x \mapsto \theta(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\theta'(x) = -\sin(x) + x \geq 0.$$

La fonction θ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \theta(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

(c) Posons $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \varphi(x) \geq 0 \iff \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

(d) Posons $\Psi : x \mapsto \Psi(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$.

La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\Psi'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} \leq 0.$$

La fonction Ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Psi(0) = 0$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \Psi(x) \leq 0 \iff \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

2. En regroupant les résultats des questions précédentes, on obtient, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\bullet \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

$$\bullet \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} \leq \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Un petit argument de parité permettra alors de passer de la limite à droite à la limite tout court.

Exercice 16 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin(3x) - 5 \cos(3x)$.

Établir une relation entre les fonctions f et f'' .

Exercice 17 : Étudier la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x).$$

(Domaine de définition, périodicité, parité, domaine d'étude, variation, ...)

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f ainsi qu'un domaine d'étude minimal.
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine d'étude.
3. Donner le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 19 : Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est périodique de période π .
3. Montrer que $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

En déduire un domaine d'étude minimal de I .

4. Étudier les variations de f sur I et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . Préciser les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox) .
5. Montrer que 5 admet un unique antécédent par f sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$.

En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 20 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + x$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}(2\pi; 2\pi)$.
3. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. En se servant des questions précédentes, représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 5\pi]$.

Exercice 21 : Étudier les fonctions $f : x \mapsto x - \tan(x)$ et $g : x \mapsto \sqrt{\tan(2x)}$.

IV/ Fonctions circulaires réciproques

Exercice 22 : Simplifier :

$$1. \arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad 2. \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad 3. \arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) \quad 4. \arccos(\cos(4\pi))$$

Exercice 23 : Simplifier $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ **Correction :** $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.**Exercice 24 :** Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.**Correction :** Posons $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

On sait que $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$.

Or, $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) \geq 0$ et $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D'où $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}$.

Par imparité de $\arcsin$, $\sin(\theta) \geq 0$ puis $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ du même signe que $\sin(\theta)$ entraîne $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$ et

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}.$$

Donc $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$.

Exercice 25 : Vérifier que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$

Correction :

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) &= \frac{5}{13} \cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\
 &= \frac{5}{13} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\
 &= \frac{5}{13} \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \frac{12}{13} = \frac{56}{65}.
 \end{aligned}$$

On en conclut que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \equiv \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) [2\pi]$

ou

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \equiv \pi - \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) [2\pi].$$

Or, $\frac{1}{2} < \frac{56}{65} < 1$ entraîne $0 < \frac{\pi}{4} < \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) < \frac{\pi}{2}$.

Et, $0 < \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ induit $0 < \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) < \frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ induit $\frac{\pi}{6} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$.

Finalement, $0 < \frac{\pi}{4} < \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Conclusion, $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$.

Exercice 26 : Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x) + \arcsin(y))$	5. $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.
2. $\tan(2 \arctan(x))$.	6. $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.
3. $\cos(2 \arccos(x))$.	7. $\cos(\arctan(x))$. En déduire $\sin(\arctan(x))$.
4. $\tan(2 \arcsin(x))$.	8. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

Correction :

$$1. \sin(\arcsin(x) + \arcsin(y)) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, x, y \in [-1; 1].$$

$$2. \tan(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{1-x^2}, x \neq \pm 1.$$

$$3. \cos(2 \arccos(x)) = 2x^2 - 1, x \in [-1; 1].$$

$$4. \text{ On a } \tan(2x) = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 - 2 \sin^2(x)}.$$

$$\text{Donc, } \tan(2 \arcsin(x)) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[.$$

$$5. \forall x \in [-1; 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Comme } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ alors } \forall x \in \left]-1; 1\right[\implies \arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathcal{D}_{\tan} \text{ et}$$

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$6. \forall x \in [-1; 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\forall x \in [-1; 0[\cup]0; 1] \Rightarrow \arccos(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \subset \mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

7. $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Comme $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, alors $\sin(\arctan(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

8. Nécessairement, $x \in [-1; 1]$. Il existe donc un unique $u \in [0; \pi]$ tel que $x = \cos(u)$.

On a alors $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arcsin(2\cos(u)\sin(u)) = 2u = 2\arccos(x).$

Exercice 27 : Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right).$
2. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right).$
3. $\arcsin(x) + \arccos(x\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}.$
4. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}.$
5. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}.$
6. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x).$

Exercice 28 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Donner l'expression de f_0 , f_1 et f_2 en fonction de x .
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale.

Correction : Il est clair que $x \in [-1; 1]$ dans tout cet exercice.

1. De $\cos(0) = 1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on en déduit aisément que :

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = 2x^2 - 1.$$

2. Montrons par récurrence triple sur $n \in \mathbb{N}$ que f_n est une fonction polynomiale.

La première question nous donne l'initialisation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$, telles que f_n , f_{n-1} et f_{n-2} soient polynomiales.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \arccos(x)) \\ &= \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin((n-1) \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \\ &= x f_n(x) - \sin((n-1) \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \\ &\quad + \cos((n-1) \arccos(x)) \sin^2(\arccos(x)) \\ &= x f_n(x) + x \sin((n-1) \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) + (1-x^2) f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Enfin, $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$ donne

$$\begin{aligned} &= x f_n(x) + \frac{1}{2} x (\cos((n-2) \arccos(x)) - \cos(n \arccos(x))) + (1-x^2) f_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{2} x f_n(x) + \frac{1}{2} x f_{n-2}(x) + (1-x^2) f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire et produit par des puissances de x , f_{n+1} est bien une fonction polynomiale et la propriété est héréditaire.

Initialisée de $n = 0$ à 3 , la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Remarque : On pouvait être plus efficace mais ce n'était pas le propos de l'exercice.

En effet, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$ d'où

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x) \iff f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$

et une récurrence double suffisait à répondre à l'exercice.

Exercice 29 :

1. Résoudre l'équation : $\cos(4x) = -\sin(x)$.
2. Soit $x_0 = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4x_0)$ à partir de $\cos(2x_0)$ et $\cos(x_0)$.
3. En déduire x_0 .

Correction :

1. $\cos(4x) = -\sin(x) \iff \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
 $\iff 4x \equiv \frac{\pi}{2} + x \pmod{2\pi} \text{ ou } -4x \equiv \frac{\pi}{2} + x \pmod{2\pi}$
 $\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{10} \pmod{\frac{2\pi}{5}}$
2. $\cos^2(x_0) = 1 - \sin^2(x_0) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

$$\text{Comme } x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x_0) \geq 0 \text{ et } \cos(x_0) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\text{Or } \cos(2x_0) = 2\cos^2(x_0) - 1 = \frac{5-\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Et, } \cos(4x_0) = 2\cos^2(2x_0) - 1 = 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} - 1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} = -\sin(x_0).$$

3. D'après la question précédente, x_0 est donc une solution trouvée à la première question.

$$\text{Or, } \left\{-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{10}\right\} \text{ sont les seules solutions dans } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$\text{Comme } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \geq 0, \text{ par imparité de arcsin cela ne peut être } -\frac{\pi}{10}.$$

$$\text{De même, } \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \neq \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \text{ par stricte croissance de arcsin.}$$

$$\text{La seule solution possible est donc } x_0 = \frac{3\pi}{10}.$$

Exercice 30 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$$

$$f_3 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$f_2 : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$f_4 : x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$f_5 : x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

Correction :

$$1. \mathcal{D}_{f_1} = [-1; 1] \cap \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \mathcal{D}_{f'_1} = \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\text{ et }$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f'_1}, f'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

$$2. \text{ Comme } \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|, \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| < 1 \text{ et } \mathcal{D}_{f'_2} = \mathbb{R} \text{ et on a :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_2(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$3. \text{ De même, } \sqrt{1+x^2} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \text{ et } \mathcal{D}_{f'_3} = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_3(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$4. \forall x \in]-1; 1[, 1-x^2 > 0 \text{ donc } \mathcal{D}_{f'_4} =]-1; 1[\text{ et,}$$

$$\forall x \in]-1; 1[, f'_4(x) = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x).$$

Commentaires : Vous venez de trouver une primitive de arcsin sur $[-1; 1]$.

$$5. f_5 \text{ est dérivable si, et seulement si } x \in]1; 1[\text{ et } |2x\sqrt{1-x^2}| < 1.$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, 1-x^2 \leq 1 \text{ entraîne } |2x\sqrt{1-x^2}| \leq 2|x| \text{ donc } \mathcal{D}_{f'_5} = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[.$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[, f'_5(x) &= \frac{2\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2-3x^2}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{x^2}{(1-2x^2)\sqrt{(1-x^2)}}. \end{aligned}$$

Exercice 31 : Étudier les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x)).$$

$$f_2 : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)).$$

$$f_3 : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right).$$

Exercice 32 : Montrer que le sinus et le cosinus d'angle α sont des nombres rationnels si, et seulement si $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ n'est pas défini ou est aussi rationnel.

Exercice 33 : Montrer que :

$$1. \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = 2 \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$3. \arctan(2\sqrt{2}) + 2 \arctan(\sqrt{2}) = \pi$$

$$2. \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$4. \arctan\left(\frac{2013 - \frac{1}{2013}}{2}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{2013}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$5. \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

[Hutton, 1776]

$$6. 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

[Machin ^[1], 1706]

Correction : Tout repose sur la formule, dans ses conditions de validité, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

$$6. \text{ De même, } \tan\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \text{ puis}$$

$$\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) = \tan\left(2 \times 2 \arctan \frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

$$\text{Enfin, } \tan\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119} \times 1} = \frac{1}{239}.$$

On en déduit que :

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 34 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations :

$$1. \arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \arctan\left(\frac{x}{2(1-x^2)}\right) = \arcsin(x)$$

$$2. \arctan(3-x) + \arctan\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$4. \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

[1]. La formule de Machin fut découverte en 1706 par John Machin et relie le nombre π à la fonction trigonométrique arctangente :

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

Cette formule permet de calculer une approximation du nombre π grâce au développement en série entière de la fonction arctangente. John Machin l'utilisa pour obtenir les cent premières décimales de π .

Correction :

$$\begin{aligned}
 1. \arctan(2x) + \arctan(3x) &= \frac{\pi}{4} \iff \tan(\arctan(2x) + \arctan(3x)) = 1 \\
 &\text{et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\\
 &\iff \frac{5x}{1-6x^2} = 1 \text{ et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\\
 &\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6} \text{ et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[
 \end{aligned}$$

Or, -1 ne convient pas car $\arctan(-1) + \arctan(-3) < 0 \neq \frac{\pi}{4}$.

Mais, $0 = 0 + 0 < \arctan\left(\frac{2}{6}\right) + \arctan\left(\frac{3}{6}\right) < \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

Donc l'unique solution est $\frac{1}{6}$.

Exercice 35 :

- Montrer que si $0 < ab < 1$, alors $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.
- Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arctan(x) + \arctan(x+3) + \arctan(x-3) = \frac{\pi}{4}$.

Correction :

- Soient a et b tels que $0 < ab < 1$.

Dans son domaine de validité, on utilise simplement la formule $\tan(p+q) = \frac{\tan(p) + \tan(q)}{1 - \tan(p)\tan(q)}$.

$$\tan(\arctan(a) + \arctan(b)) = \frac{a+b}{1-ab}$$

Donc $\arctan(a) + \arctan(b) \equiv \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) [\pi]$.

Par définition, de $\arctan$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) < \frac{\pi}{2}$.

Comme $ab > 0$, a et b sont de même signe. Supposons les positifs dans perdre de généralité. alors $0 < \arctan(a) < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \arctan(b) < \frac{\pi}{2}$ entraînent $0 < \tan(\arctan(a) + \arctan(b)) < \pi$ et

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

- Il suffit d'appliquer deux fois la formule précédente :

$$\begin{aligned}
 \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) &= \arctan\left(\frac{2+5}{1-2 \times 5}\right) + \arctan(8) = \arctan\left(-\frac{7}{9}\right) + \arctan(8) \\
 &= \arctan\left(\frac{-\frac{7}{9} + 8}{1 + \frac{7}{9} \times 8}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{65}{9}}{\frac{65}{9}}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

3. Posons $\varphi : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x+3) + \arctan(x-3)$ qui est clairement strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions croissantes et continues. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image.

D'après la question précédente, $\varphi(2) = \frac{\pi}{4}$.

Par bijectivité de φ , 2 est donc l'unique solution.

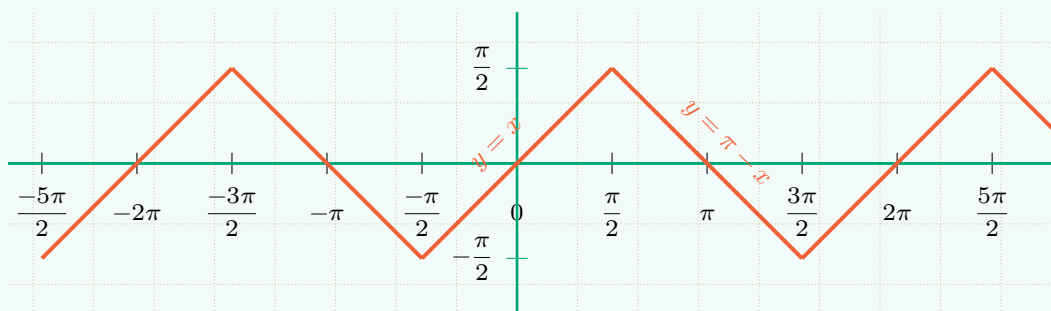
Exercice 36 : Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

Correction : $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ est impaire par composition et 2π -périodique. On l'étudie donc sur $[0; \pi]$ avant de compléter la courbe par symétrie de centre O et par translations de vecteur $2\pi\vec{j}$.

Or, $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

De plus, $\forall x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\pi - x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

D'où, la courbe :



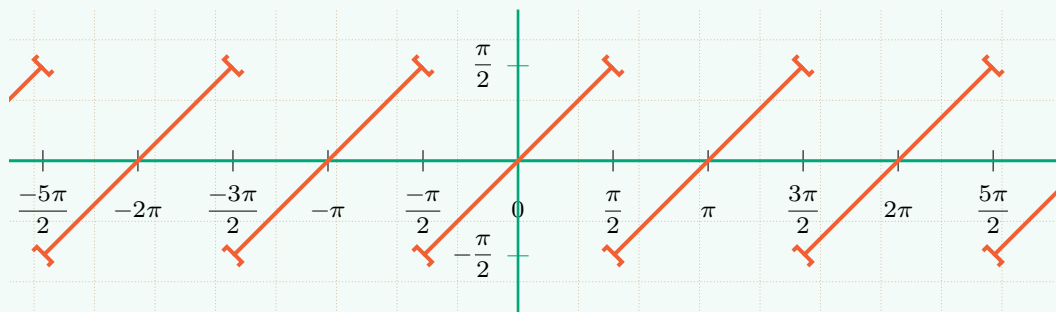
Exercice 37 : Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \arctan(\tan(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : $x \mapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathcal{D}_{\tan}$ où elle est impaire par composition et π -périodique. On l'étudie donc sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ avant de compléter la courbe par symétrie de centre O et par translations de vecteur $\pi\vec{j}$.

D'après les théorème sur les limites de composées, on trouve aisément $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan(x)) = \frac{\pi}{2}$.

Or, $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

D'où, la courbe :

**Exercice 38 :**

1. Exprimer $\tan(x - y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan y$.
2. En déduire que pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.
3. Vérifier l'égalité $\frac{2}{k^2} = \frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k-1)(k+1)}$.
4. Déduire des résultats précédents la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right).$$

Exercice 39 : Calculer et simplifier les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$
2. $f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$

Correction :

1. Par composition et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle y est même strictement croissante) et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x+1)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{3x^4 + 6x^2 + 8}{(4+x^4)(1+x^2)} \end{aligned}$$

Remarque : Inutile de factoriser plus avant car seul le signe nous intéressera et on l'a.

2. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\frac{1}{1+x^2} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right) \cos\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right) \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} \sin(\arctan(x)) \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Exercice 40 : Donner le domaine de définition, l'ensemble des points où elle est dérivable et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) + \arcsin(x).$$

Correction : La présence du arcsin impose déjà $x \in [-1; 1]$.

La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dérivable et à valeurs strictement positive si, et seulement si $x \in]-1; 1[$.

On étudiera donc f sur $] -1; 1[$ où elle est dérivable par composition et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, f'(x) &= 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)'}{1 + \frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-\frac{2}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{2}{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque : On en déduit que $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ et $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donne :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On peut le démontrer directement. Comme $x \in]-1; 1[$, $\exists ! u \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \cos(u)$.

$$\begin{aligned} 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) + \arcsin(x) &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\cos(u)}{1+\cos(u)}} \right) + \arcsin(x) \\ &= 2 \arctan \left(\frac{\sin(\frac{u}{2})}{\cos(\frac{u}{2})} \right) + \arcsin(x) \\ &= u + \arcsin(x) \\ &= \arccos(x) + \arcsin(x) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 41 : Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \right)$.

Correction : On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ et $g(x) = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \right)$.

Par composition f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in]-1; 1[$ il en est de même de g et on a :

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

Or, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Donc, $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ et $g'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1} \times \operatorname{ch}(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Les deux fonctions f et g diffèrent donc d'une constante.

Comme $f(0) = \arctan(\operatorname{sh}(0)) = \arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(0)}\right) = \arccos(1) = 0$, on en déduit $f(0) = g(0)$ puis $f = g$ sur $\mathbb{R}^+$.

Fonctions circulaires

Compléter :

1. Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $\sin(x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \pi$
2. $|\sin(x)| \leq 1$.
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
4. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
7. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
8. $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(k\pi) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$

Soient a et b deux réels.

9. $\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b [2\pi]$
10. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
11. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
12. $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
13. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$
15. On appelle fonction *arcsinus*, notée $\arcsin$, la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$ corestrictée à $[-1; 1]$.
16. $\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x$
17. $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
18. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$
19. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

20. La fonction $\arcsin$ est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En particulier,

— la fonction $\arcsin$ est strictement croissante sur $[-1; 1]$. (Variations)

21. Pour toute fonction u , la fonction $x \mapsto \arccos(u(x))$ est dérivable sur un intervalle I si, et seulement si u est dérivable à valeurs dans $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in I, \quad (\arccos(u))'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$$

22.

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

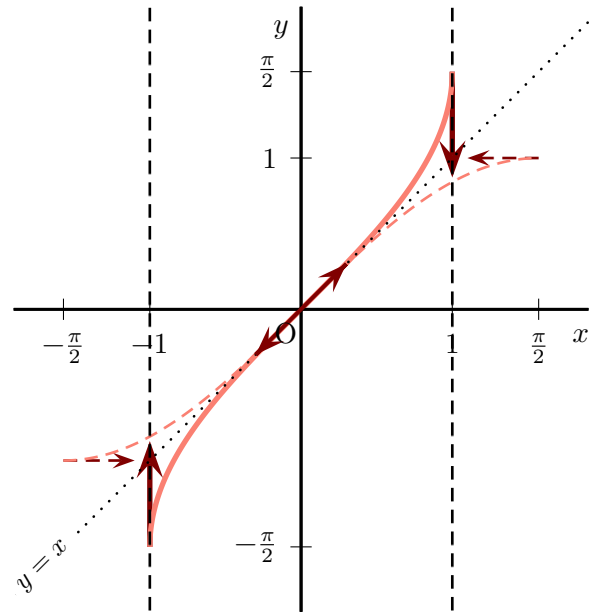


Figure VII.25 – Tableaux de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$.

En dash, la courbe de sin.

23. La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

24. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

25. **Formule d'addition :** Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a + b)$ ou $\tan(a - b)$ soient définis.

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

$$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p + q)}{\cos(p)\cos(q)}.$$

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Fonctions circulaires

Compléter :

1. Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $\cos(x) \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
2. $|\cos(x)| \leq 1$
3. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
7. $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
8. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x)$ et $\sin(k\pi) = 0$

Soient a et b deux réels.

9. $\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b [2\pi]$
10. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
11. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
12. $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
13. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
15. On appelle fonction *arccosinus*, notée $\arccos$, la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0; \pi]}$ corestreinte à $[-1; 1]$.
16. $\forall x \in [-1; 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
17. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$
18. $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$
19. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$
20. La fonction $\arccos$ est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En particulier,

— la fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur $[-1; 1]$. (Variations)

21. Pour toute fonction u , la fonction $x \mapsto \arcsin(u(x))$ est dérivable sur un intervalle I si, et seulement si u est dérivable à valeurs dans $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in I, \quad \left(\arcsin(u)\right)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$$

22.

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

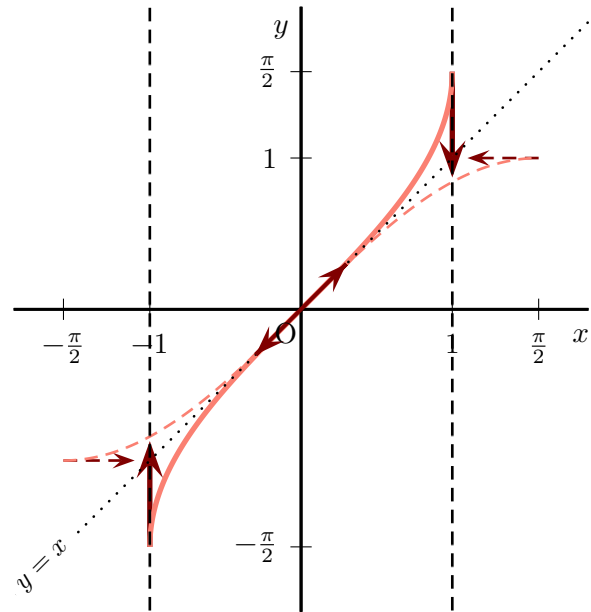


Figure VII.26 – Tableaux de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$.

En dash, la courbe de sin.

23. On appelle fonction *tangente*, notée $\tan$, la fonction définie par :

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

25. **Formule d'addition :** Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

$$\text{— } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Formule de duplication : Pour tout $(a; \in) \mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan(2a)$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

$$\text{— } \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}.$$

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\text{— } \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Un peu de trigonométrie réelle et de calculs algébriques

Exercice 1 – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

- À l'aide du changement de variable $\ell = n - k$, établir que $S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
- En déduire une expression très simple de $2S_n$ en fonction de n , puis conclure quant à la valeur de S_n .

Exercice 2 – On définit les fonctions φ et ψ suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \quad \psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{|x|} & x &\longmapsto \arcsin(\sin(2x)). \end{aligned}$$

1. *Preliminaires.*

- (a) Simplifier $\varphi(x)$ lorsque $x > 0$ et $x < 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.

Tracer l'allure de la courbe.

- (b) Montrer que ψ est π -périodique.

Proposer un premier domaine d'étude de ψ et expliquer comment toute la courbe s'obtiendra sur $\mathbb{R}$.

- (c) Étudier la parité de ψ .

Proposer un domaine d'étude minimal de ψ . Comment obtiendra-t-on toute la courbe sur $\mathbb{R}$?

- (d) i. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler à quelle condition l'égalité $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ est vérifiée.

ii. Simplifier $\psi(x)$ lorsque $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ en justifiant.

iii. On suppose ici $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Dans quel intervalle se situe $\pi - 2x$? En déduire une simplification de $\psi(x)$.

- (e) Tracer la courbe représentative de ψ sur $[-\pi; \pi]$.

Dans la suite, on pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ lorsque cela a un sens.

2. *Domaine d'étude de f .*

- (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$.
- (b) En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- (c) Proposer un domaine d'étude minimal de f ? Comment obtiendra-t-on toute la courbe sur $\mathcal{D}_f$?

On se propose d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ de deux façons différentes.

3. *À l'aide de la fonction ψ .*

- (a) Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Simplifier $\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$.
- (b) En déduire que, $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\tan(t)) = \psi(t)$.
- (c) Si $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $f(x)$ à l'aide de ψ et de la fonction arctan.
- (d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Indication : les composées c'est mieux que la dérivée!

4. *À l'aide de sa dérivée.*

- (a) Résoudre les équations $\frac{2x}{1+x^2} = 1$ et $\frac{2x}{1+x^2} = -1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathcal{D}' = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- (c) Démontrer que $\forall x \in \mathcal{D}', f'(x) = \frac{2\varphi(1-x)}{1+x^2}$.
- (d) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, que l'on récapitulera au sein d'un tableau.

Placer également $f(0)$, $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (existence et calcul à justifier).

5. *Tracé.*

- (a) Donner les pentes des tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$.
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$. On admettra que ces valeurs sont les pentes des demi-tangentes à la courbe à gauche et à droite du point d'abscisse 1.
- (c) Tracer la courbe le plus précisément possible, en prenant pour échelle au moins 2 cm pour 1 unité.

On pourra utiliser les approximations $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$, $\frac{\pi}{2} \simeq 1,57$ et $\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$.

6. **Question subsidiaire** : Simplifier l'expression de f .

Un peu de trigonométrie réelle

Correction de l'exercice 1 –

1. Comme $0 \leq k \leq n$, alors en posant $\ell = n - k$, on aura aussi $0 \leq \ell \leq n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{\ell=0}^n \cos^2\left(\frac{(n-\ell)\pi}{2n}\right) = \sum_{\ell=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \end{aligned}$$

2. On a alors :

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Conclusion, $S_n = \frac{n+1}{2}$.

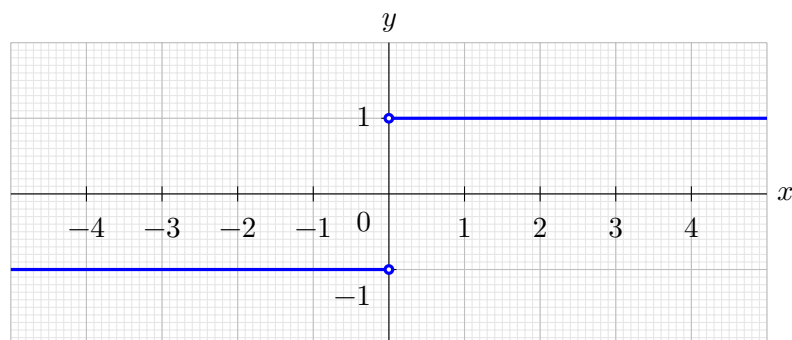
Correction de l'exercice 2 –

1. *Préliminaires.*

(a) Si $x > 0$, $|x| = x$ donc $\varphi(x) = 1$. Si $x < 0$, $|x| = -x$ donc $\varphi(x) = -1$.

$$\forall x \neq 0, \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En particulier, $\varphi(x) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 1$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x<0]{x \rightarrow 0} -1$.



Commentaires : Cette fonction donne en fait le signe de x . On trouve souvent la notation $\text{sgn}(x)$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ invariant par translation.

Commentaires : *Pensez à l'invariance du domaine !!!!!*

$$\psi(x + \pi) = \arcsin(\sin(2(x + \pi))) = \arcsin(\sin(2x + 2\pi)) = \arcsin(\sin(2x)) = \psi(x).$$

Donc, ψ est π -périodique.

Il suffit d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra toute la courbe sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $k\pi i$.

- (c) Comme ψ est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0, on peut étudier sa parité.

Commentaires : *Pensez à l'invariance du domaine !!!!!*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions sin et arcsin étant impaires, on a :

$$\psi(-x) = \arcsin(\sin(-2x)) = \arcsin(-\sin(2x)) = -\arcsin(\sin(2x)) = -\psi(x).$$

Donc, ψ est impaire. Il suffit de l'étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Toute la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ s'obtiendra par symétrie de centre O puis on complètera sur $\mathbb{R}$ avec les translations précédentes.

- (d) i. $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ si, et seulement si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- ii. Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ alors $2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on en déduit :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \psi(x) = \arcsin(\sin(2x)) = 2x.$$

- iii. Si $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \pi$, d'où $-\pi \leq -2x \leq -\frac{\pi}{2}$ i.e. $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \pi - 2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

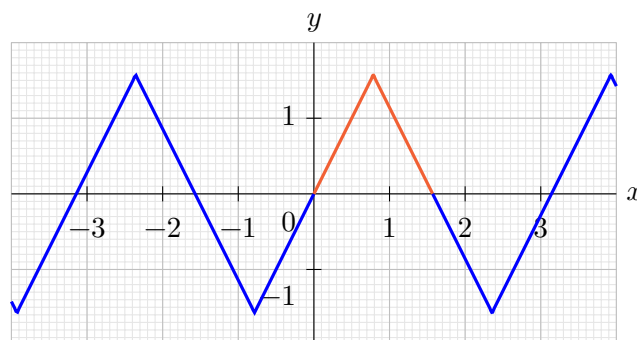
On en déduit :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], \psi(x) = \arcsin(\sin(2x)) = \arcsin(\sin(\pi - 2x)) = \pi - 2x.$$

- (e) D'après la question précédente,

$$\varphi_{|[0; \frac{\pi}{2}]}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

On commence par tracer la restriction de ψ à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis on complète par symétrie puis translations.



2. Domaine d'étude de f .

- (a) On pourrait étudier la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$, mais c'est inutilement long... En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (1+x)^2 = 1+x^2+2x \Rightarrow -(1+x^2) \leq 2x$$

et,

$$0 \leq (1-x)^2 = 1+x^2-2x \Rightarrow 2x \leq 1+x^2.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2$ et, avec $0 < 1+x^2 \leq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Commentaires : On pouvait aussi utiliser l'imparité de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur $[-1; 1]$ et montrer seulement que $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ sur $[0; 1]$ avant de conclure par symétrie.

- (b) D'après la question précédente, la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$ qui est le domaine de définition de arcsin donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- (c) Par composée de fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, la fonction f est clairement impaire. On l'étudiera donc sur $\mathbb{R}_+$ et on complètera la courbe par symétrie de centre l'origine du repère.

3. À l'aide de la fonction ψ .

- (a) Soit $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ alors $\tan(t)$ est définie, $\cos(t) \neq 0$ et on a :

$$\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = 2 \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cos^2(t) = 2 \sin(t) \cos(t) = \sin(2t).$$

Commentaires : Pensez à dire que $\tan(t)$ est définie pour ces choix de t !

- (b) Comme $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, d'après ce qui précède,

$$f(\tan(t)) = \arcsin\left(\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}\right) = \arcsin(\sin(2t)) = \psi(t).$$

- (c) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = \tan(\arctan(x))$, alors, en posant $t = \arctan(x)$, on obtient :

$$f(x) = f(\tan(\arctan(x))) = \psi(\arctan(x)).$$

- (d) La fonction arctan est (strictement) croissante sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. La fonction f a donc la même monotonie que ψ .

On en déduit le tableau de variation de f ainsi que les valeurs aux bornes par composition :

x	0	1	$+\infty$
arctan		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f	0	$\frac{\pi}{2}$	0

Remarque : Par composition, et si nécessaire, les monotonies sont strictes.

4. À l'aide de sa dérivée.

(a) Avec $1 + x^2 \neq 0$, rien de difficile. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = 1 + x^2 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

L'équation $\frac{2x}{1+x^2} = -1$ n'a, quant à elle, pas de solution sur $\mathbb{R}_+$ car le membre de gauche est clairement positif.

(b) Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est dérivable et à valeurs dans le domaine de dérivabilité de $\arcsin$ $] -1; 1[$ si, et seulement si $x \neq 1$ d'après la question précédente.

Donc, f est dérivable sur $\mathcal{D}' = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

(c) Soit $x \in \mathcal{D}'$. Avec $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (2x)^2}} \quad , 1+x^2 > 0 \\ &= \frac{2(1-x)(1+x)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{(1+2x+x^2)(1-2x+x^2)}} \quad , a^2 - b^2 = \dots \\ &= \frac{2}{1+x^2} \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2}} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \frac{1+x}{1+x} \frac{1-x}{|1-x|} \quad , 1+x > 0 \text{ si } x \in \mathcal{D}' \\ &= \frac{2\varphi(1-x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Commentaires : *Pensez à justifier que $1+x > 0$.*

(d) Soit $x \in \mathcal{D}'$. Comme $\frac{2}{1+x^2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(1-x)$.

Or, d'après l'étude de φ , on sait que $\varphi(t)$ est du même signe que t si $t \neq 0$. Par conséquent, $\varphi(1-x)$ est du signe de $1-x$ s'annulant pour $x = 1$ et on a :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
f	0	$\frac{\pi}{2}$	0

— $f(0) = \arcsin(0) = 0$.

— $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

— Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ d'après les théorèmes sur les sommes, quotients puis produits de limites.

Par composition, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $+\infty$.

5. *Tracé.*

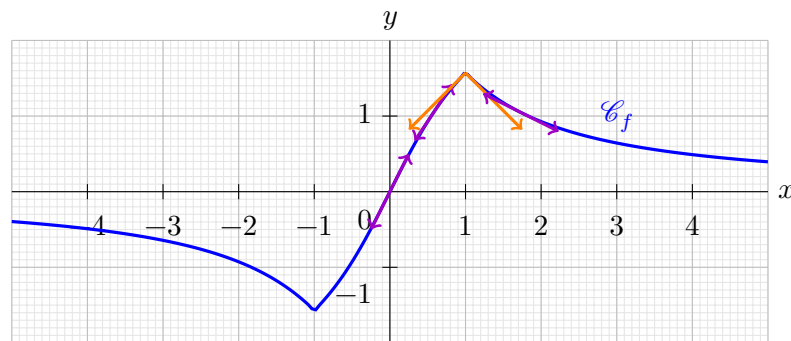
- (a) Après calcul, on obtient $f'(0) = 2$, $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3}{2}$ et $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$.
- (b) Si $x \in \mathcal{D}'$ et $x < 1$ i.e. $1 - x > 0$ et $\varphi(1 - x) = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les produits de limites,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = 1.$$

De même, si $x > 1$, $\varphi(1 - x) = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = -1$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1 mais sa courbe admet deux demi-tangentes à gauche et à droite de coefficient directeur respectif 1 et -1 .

- (c) En orange, les deux demi-tangentes et en violet, les trois tangentes particulières demandées. On complète la courbe par symétrie par rapport à l'origine. En particulier, f n'est pas dérivable non plus en -1 .



6. On peut simplifier selon les intervalles :

$$\forall x \in [0; 1[: f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)}.$$

On en déduit que sur l'intervalle $[0; 1[$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2\arctan(x) + k$.

Or, $f(0) = 0$ et $f(0) = \arctan(0) + k$

Donc, $k = 0$ i.e. $\forall x \in [0; 1[$, $f(x) = 2\arctan(x)$.

$$\forall x \in [1; +\infty[: f'(x) = -\frac{2}{(1+x^2)}.$$

On en déduit que sur l'intervalle $]1; +\infty[$, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2\arctan(x) + \ell$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\arctan(x) + \ell) = -\pi + \ell$.

Donc, $\ell = \pi$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \pi - 2\arctan(x)$.

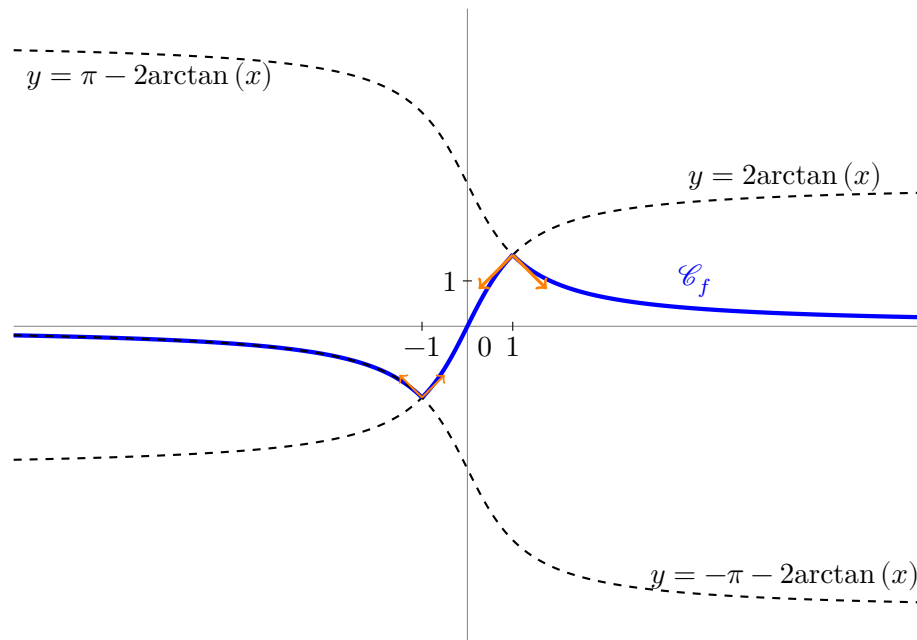
En $x = 1$: On peut remarquer que les deux expressions coïncident aussi lorsque $x = 1$ puisque $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et que, par ailleurs, $2\arctan(1) = \pi - 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

$\forall x \in]-\infty; 0]$: Par parité, on déduit que :

- Si $x \in [-1; 0]$, $f(x) = -f(-x) = -2\arctan(-x) = 2\arctan(x)$.
- Si $x \in]-\infty; 1]$, $f(x) = -f(-x) = -(\pi - 2\arctan(-x)) = -\pi - 2\arctan(x)$.

Au final,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi - 2\arctan(x) & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ 2\arctan(x) & \text{si } x \in [-1; 1] \\ \pi - 2\arctan(x) & \text{si } x \in [1; +\infty[. \end{cases}$$



Sommes & Fonctions trigonométriques

25 avril 2025

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 – Dans tout l'exercice, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les fonctions suivantes pour tout réel x :

$$\varphi : x \mapsto (1+x)^{2n}, \quad \psi : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k} \quad \text{et} \quad \theta : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k}.$$

On définit également les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \psi(x) + x\theta(x)$.
3. À partir de deux valeurs de φ bien choisies, en déduire l'expression des sommes S_n et T_n en fonction de n .

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, on se fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{k} \right)$.

Enfin, on introduit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) > 0$.
2. (a) Après avoir justifié leur existence, donner les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
(b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites en $\pm\infty$).
3. Établir l'encadrement suivant : $\forall x \in]0; 1[, 1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$.
4. En déduire que : $\forall n \geq 2, \ln \left(\frac{np+1}{n} \right) \leq S_n \leq -\ln \left(\frac{n-1}{np} \right)$.
5. Conclure quant à la limite de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 – On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x).$$

1. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin(2x) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$. On précisera les valeurs de la dérivée en $-\frac{\pi}{4}$, 0 et $\frac{\pi}{4}$.
4. Tracer soigneusement, sur la feuille donnée en annexe, la courbe représentative de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$. On tracera tout aussi soigneusement trois tangentes particulières.

On donne aussi les approximations $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ et $\frac{\pi}{4} \simeq 0,8$.

5. (a) Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.
(b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 1$.
Indication : si $t \in [-1; 1]$, quel est le signe de $t^2 - t^3$?
6. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.
(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $g \left(-\frac{\pi}{4} + x \right)$ et $g \left(-\frac{\pi}{4} - x \right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$ puis à $\mathbb{R}$ tout entier.

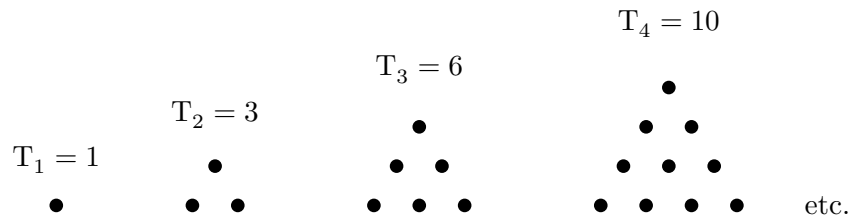
Problème 4 – Ce problème étudie une catégorie particulière d'entiers naturels, appelés *nombre polygonaux*. Commençons par quelques définitions préliminaires.

Définition 1 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle *polygone régulier à k côtés* tout polygone possédant k côtés de même longueur et k angles égaux.

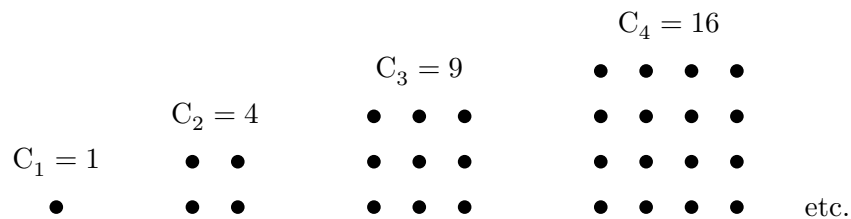
Définition 2 : Un *nombre polygonal* est un entier naturel pouvant être représenté par un polygone régulier.

Exemples et explications.

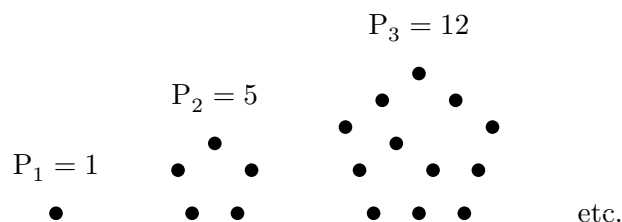
Cas des nombres triangulaires ($k = 3$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *triangulaire*, que l'on notera T_n , peut se représenter par un *triangle équilatéral* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres carrés ($k = 4$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *carré*, que l'on notera C_n , peut se représenter par un *carré* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres pentagonaux ($k = 5$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *pentagonal*, que l'on notera P_n , peut se représenter par un *pentagone régulier* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Remarque : Il est important de noter que chaque figure (et donc chaque nombre polygonal) s'obtient facilement à partir de la figure précédente...
C'est ce que l'on va utiliser dans ce qui suit pour calculer ces nombres.

Questions.

A. À propos des nombres triangulaires.

1. Calculer les nombres T_5 , T_6 et T_7 en faisant apparaître les calculs. *On n'attend pas de justification particulière, hormis des calculs un minimum détaillés.*
2. On pose $a_1 = 1$ et si $i \geq 2$, on pose $a_i = T_i - T_{i-1}$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n = \sum_{i=1}^n a_i$.
 - (b) Expliquer le plus simplement possible pourquoi on a $a_i = i$.
 - (c) En déduire l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_n en fonction de n .

B. À propos des nombres carrés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre carré C_n en fonction de n . *Justifier brièvement.*
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.
 - (a) Écrire Γ_n sous la forme d'une somme $\sum_{i=1}^n b_i$ où b_i est un entier à expliciter en fonction de i .
 - (b) En déduire Γ_n en fonction de n . Que remarque-t-on ?

C. À propos des nombres pentagonaux.

1. Calculer P_4 et P_5 en faisant apparaître les calculs. *Justifier brièvement.*
2. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq 2$. Établir la relation de récurrence :

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.

D. Bonus : toute trace de recherche est la bienvenue !

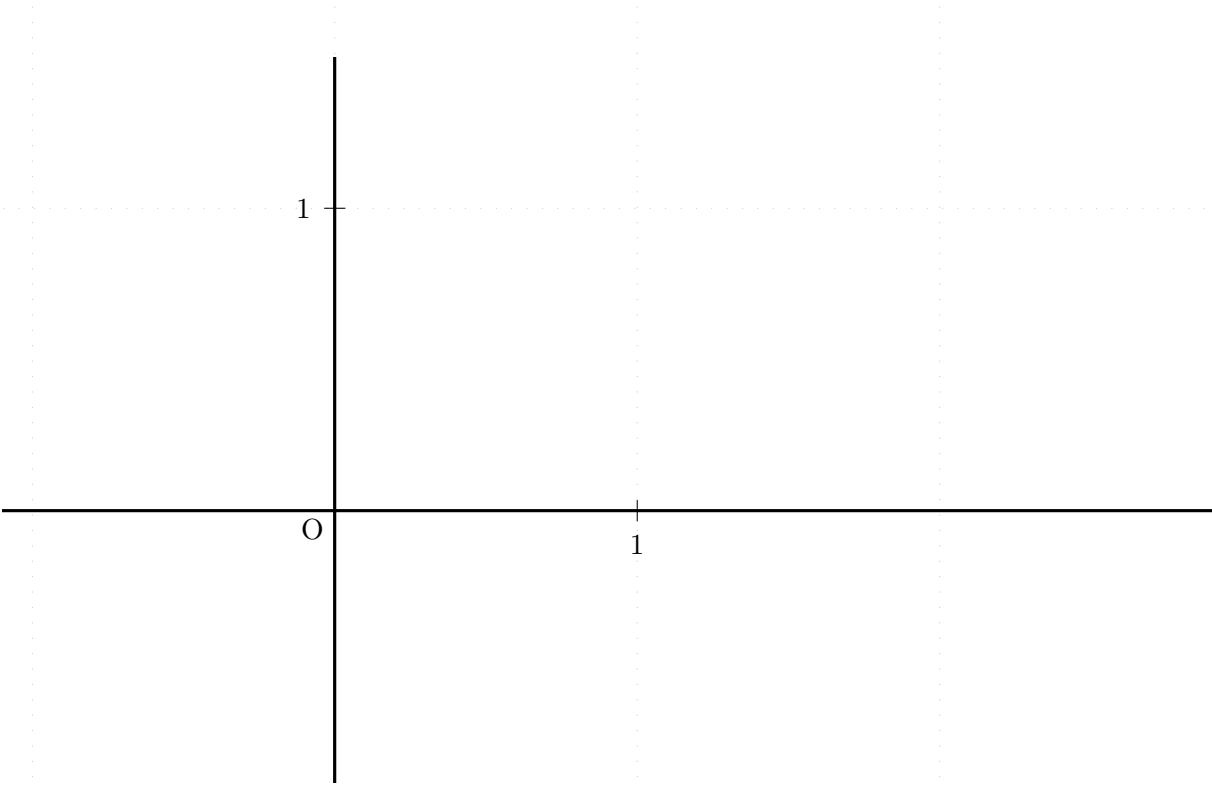
Existe-t-il des entiers naturels ≥ 2 qui sont à la fois un nombre triangulaire et un nombre carré ?
Même question pour des entiers ≥ 2 étant à la fois un nombre carré et un nombre pentagonal.

Nom :

Prénom :

ANNEXE

Exercice 3 –



Sommes et Fonctions trigonométriques

Commentaires :

- J'ai été ravi de constater à quel point je n'avais parlé pour rien en essayant de vous expliquer la différence entre une fonction f et ses valeurs $f(x)$. Si vous savez tout, pourquoi m'écouter ?
- Est-il possible de ne plus voir des expressions de la forme $(-1) \times \frac{3}{\sqrt{2}} \times 1 \times 0$ ou $(-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 0$?
- Combien d'élèves de prépa ne savent pas dériver une expression aussi simple que $\cos^3(x)$?
- Cessez d'écrire ou de commencer par le résultat qu'on vous demande de démontrer !
- Pour justifier la dérivabilité d'une fonction entraînez-vous à faire des phrases directes, courtes, claires et concises plutôt que vos romans qui ne font que tenter de noyer le poisson !

Exercice 1 – Dans tout l'exercice, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les fonctions suivantes pour tout réel x :

$$\varphi : x \mapsto (1+x)^{2n}, \quad \psi : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k} \quad \text{et} \quad \theta : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k}.$$

On définit également les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.

Correction : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Commentaires : Combien auront précisé qui étaient les a et b ? Seulement 9 !

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \psi(x) + x\theta(x)$.

Correction : D'après la formule du binôme, on sait que $\varphi(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Somme que l'on sépare entre puissances paires et impaires de x par linéarité :

$$\varphi(x) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \binom{2n}{k} x^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \binom{2n}{k} x^k.$$

Or, dans la 1^{ère} somme, tout nombre pair k compris entre 0 et $2n$, s'écrit $k = 2\ell$ où $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

De même, dans la 2^{ème} somme, si k est un nombre impair compris entre 0 et $2n$, alors il s'écrit $k = 2\ell + 1$ où $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} x^{2\ell+1} \quad (\text{puis on factorise par } x \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme}) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} x^{2\ell} + x \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} x^{2\ell} \\ &= \psi(x) + x\theta(x).\end{aligned}$$

3. À partir de deux valeurs de φ bien choisies, en déduire l'expression des sommes S_n et T_n en fonction de n .

Correction : Utilisons l'identité précédente avec $x = 1$:

$$\begin{aligned}\varphi(1) = \psi(1) + \theta(1) &\Leftrightarrow (1+1)^{2n} = \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} 1^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} 1^{2\ell+1} \\ &\Leftrightarrow 2^{2n} = \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} \\ &\Leftrightarrow S_n + T_n = 2^{2n}.\end{aligned}$$

De même, avec $x = -1$:

$$\begin{aligned}\varphi(-1) = \psi(-1) - \theta(-1) &\Leftrightarrow (1-1)^{2n} = \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} (-1)^{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} (-1)^{2\ell+1} \\ &\Leftrightarrow 0 = \sum_{\ell=0}^n \binom{2n}{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} \\ &\Leftrightarrow S_n - T_n = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les sommes S_n et T_n sont solutions du système suivant, que l'on résout :

$$\begin{cases} S_n + T_n = 2^{2n} \\ S_n - T_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_n = T_n \\ 2S_n = 2^{2n} \end{cases} \Leftrightarrow S_n = T_n = 2^{2n-1}.$$

Exercice 2 – Dans tout l'exercice on se fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 2$ on pose $S_n = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Enfin, on introduit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) > 0$.

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ donc $\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) = \text{sh}^2(x) + \text{sh}(x) + 1$.

Quitte à poser $X = \text{sh}(x)$, on reconnaît le polynôme $X^2 + X + 1$ de discriminant strictement négatif donc de signe strictement positif.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) > 0.$$

Commentaires : **Méthode Solal :** $\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Très bien !

$$= \frac{1}{4} ((e^x + e^{-x})^2 + 2(e^x - e^{-x}))$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{-2x} - 2e^{-x} + 1)$$

$$= \frac{1}{4} ((e^x + 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2) > 0.$$

2. (a) Après avoir justifier leur existence, donner les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Somme et composée de fonctions au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est également et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{ch}(x) e^{\operatorname{sh}(x)} - 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x)) e^{\operatorname{sh}(x)}.$$

Commentaires : *Ne pas savoir dériver de telles fonctions est très inquiétant à mon sens.*

- (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites en $\pm\infty$).

Correction : D'après la question (1), f' est croissante.

Or, $f'(0) = 0$.

On en déduit donc le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Commentaires :

— Sans difficulté, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

— En $+\infty$, $f(x) = x \left(\frac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{x} - 1 \right) - 1$.

Or, $\frac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{x} = \frac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{\operatorname{sh}(x)} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ et les deux facteurs tendent vers $+\infty$ (le deuxième car $\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \geq \frac{e^x}{2x}$). Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

3. Établir l'encadrement suivant : $\forall x \in]0; 1[, 1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$.

Correction : Comme, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, on en déduit déjà que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\operatorname{sh}(x)} \geq x + 1$.

D'autre part, en appliquant la relation en $-x$, on obtient aussi $e^{-\operatorname{sh}(x)} \geq 1 - x$.

Pour $x < 1$, $1 - x > 0$ et on peut composer par la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Réunissant les deux inégalités, on obtient :

$$\forall x \in]0; 1[, 1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

4. En déduire que : $\forall n \geq 2, \quad \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$

Correction : Les inégalités précédentes étant strictement positives, on peut composer par le logarithme, fonction croissante, pour avoir

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \ln(1+x) \leq \operatorname{sh}(x) \leq -\ln(1-x).$$

Pour $k > 1$, on applique l'inégalité précédente avec $x = \frac{1}{k} \in]0; 1[$:

$$\forall k > 1, \quad \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

Il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités membre à membre pour $k = n$ à $k = np$:

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

En simplifiant les deux sommes télescopiques aux extrémités :

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np+1}\right).$$

5. Conclure quant à la limite de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Correction : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln(p).$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{p + \frac{1}{n}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln(p).$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(p).$$

Exercice 3 – On considère la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x).$

1. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Les fonctions $\cos^3$ et $\sin^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car ce sont des puissances entières de fonctions usuelles) donc par somme, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x)).$$

Commentaires : *Ne pas savoir dériver une telle fonction est très inquiétant à mon sens.*

2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin(2x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Correction : Il est connu que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

En factorisant par $\sqrt{2}$, et reconnaissant l'expression de $\cos(a+b)$, on obtient également que :

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) \right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin(2x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3. En déduire les variations de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. On précisera les valeurs de la dérivée en $-\frac{\pi}{4}$, 0 et $\frac{\pi}{4}$.

Correction : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\cos$ est positif. La dérivée de g est donc du signe opposé de $\sin(2x)$.

Or, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \geq 0 \iff u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit le signe de $\sin(2x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\sin(2x) \geq 0 \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sin(2x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$$

Finalement, le tableau de variations de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ s'écrit

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
$\sin(2x)$	—	0	+
$g'(x)$	+	0	—
g	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

On calcule rapidement :

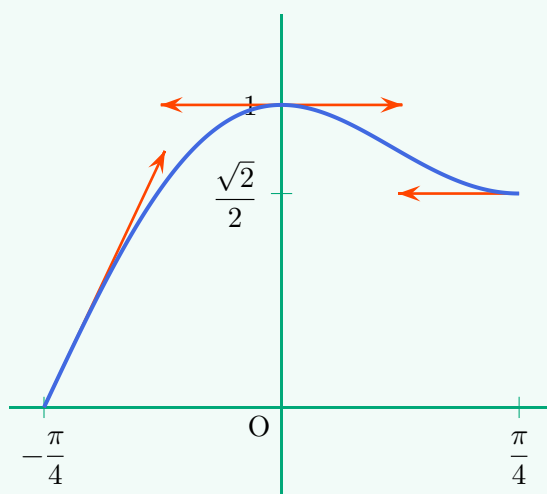
$$g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

4. Tracer soigneusement, sur la feuille donnée en annexe, la courbe représentative de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. On tracera tout aussi soigneusement trois tangentes particulières.

On donne aussi les approximations $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ et $\frac{\pi}{4} \simeq 0,8$.

Correction : La courbe $\mathcal{C}_g$ possède deux tangentes horizontales en $(0; 1)$ et $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La tangente en $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ a pour coefficient directeur $g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 2,1$.



5. (a) Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.

Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Commentaires : *Combien auront pensé au domaine de définition ? $\forall x \in \mathbb{R}$. Seuls ceux-là ont fait des mathématiques. Seulement 7 élèves !*

- (b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 1$.

Indication : si $t \in [-1; 1]$, quel est le signe de $t^2 - t^3$?

Correction : Commençons par l'indication : si $-1 \leq t \leq 1$, alors en multipliant par $t^2 \geq 0$, on obtient $-t^2 \leq t^3 \leq t^2$ donc en particulier $t^2 - t^3 \geq 0$.

Passons à l'équation $g(x) = 1$, où $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff \cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 \\ &\iff \cos^3(x) + \sin^3(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &\iff \underbrace{\cos^2(x) - \cos^3(x)}_{\text{« } t^2 - t^3 \text{ »} \geq 0} + \underbrace{\sin^2(x) - \sin^3(x)}_{\text{« } t^2 - t^3 \text{ »} \geq 0} = 0 \end{aligned}$$

Or, une somme de deux nombres positifs est nulle, si et seulement si ces deux nombres sont tous les deux nuls. Ainsi :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x) (1 - \cos(x)) = 0 \\ \sin^2(x) (1 - \sin(x)) = 0 \end{cases}$$

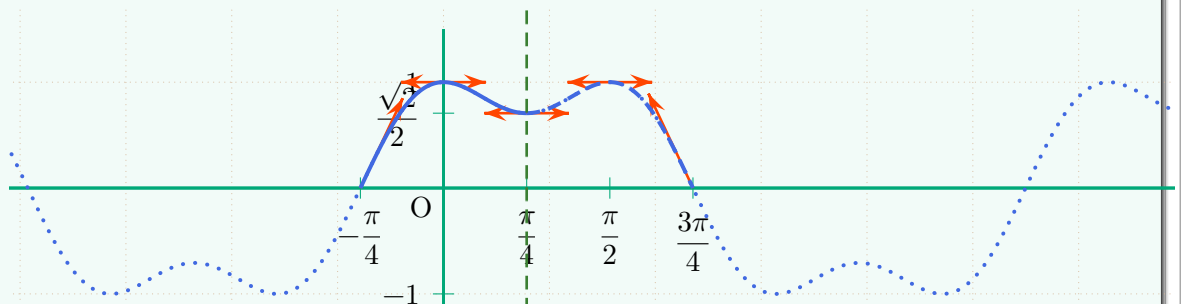
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \text{ (impossible) ou } \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 1 \end{cases} \text{ (impossible).}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0 [2\pi].$$

6. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^3(x) + \cos^3(x) = g(x)$.

On peut donc compléter la courbe de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ par symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$.



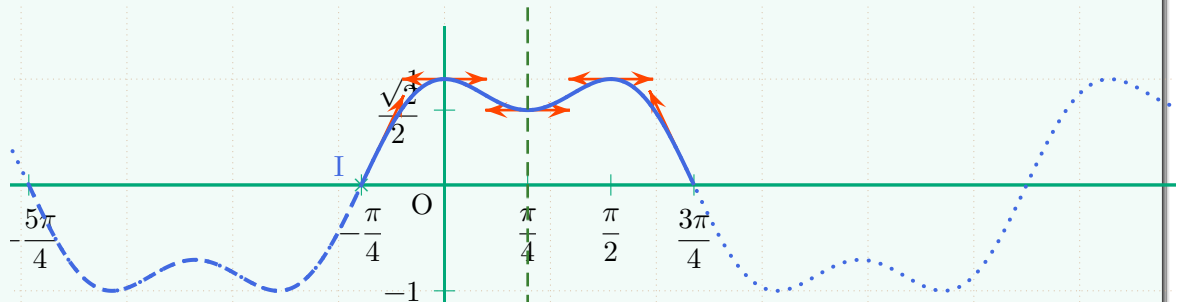
- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $g\left(-\frac{\pi}{4} + x\right)$ et $g\left(-\frac{\pi}{4} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ puis à $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) &= \cos^3\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) \\ &= \cos^3\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) \\ &= \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \\ &= -\cos^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= -\cos^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= -g\left(-\frac{\pi}{4} - x\right). \end{aligned}$$

On peut donc compléter la courbe de g sur $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ par symétrie de centre $I\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

Enfin, g étant clairement 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ invariant par translations et $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ de longueur $\frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2\pi$, on peut compléter la courbe de $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ à $\mathbb{R}$ tout entier par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.



Commentaires : En fait, nul n'est besoin de faire tout ça pour avoir la courbe de g .

En effet, à partir de la 2π -périodicité et de la dérivée trouvée en (2), il suffit d'étudier le signe de cette dernière sur un intervalle de longueur 2π bien choisi i.e. $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ et de trouver :

x	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	
$\sin(2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	0		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0

Bien sûr, la recherche des symétries centrales et axiales est plus jolie mais hors-programme en PTSI;-)

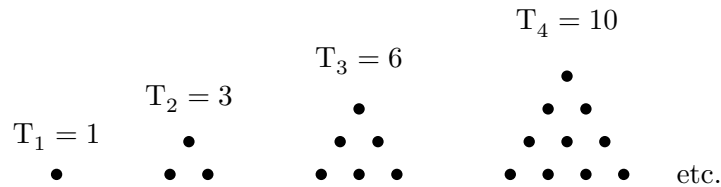
Problème 4 – Ce problème étudie une catégorie particulière d'entiers naturels, appelés *nombre polygonaux*. Commençons par quelques définitions préliminaires.

Définition 1 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle *polygone régulier à k côtés* tout polygone possédant k côtés de mêmes longueurs et k angles égaux.

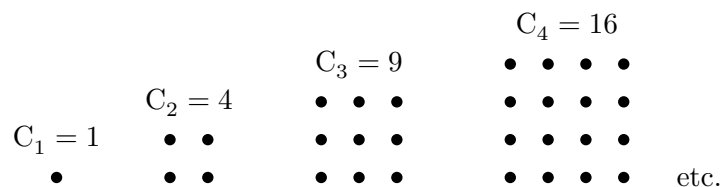
Définition 2 : Un *nombre polygonal* est un entier naturel pouvant être représenté par un polygone régulier.

Exemples et explications.

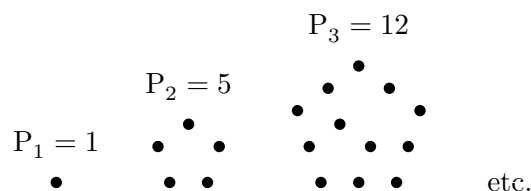
Cas des nombres triangulaires ($k = 3$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n -ième nombre *triangulaire*, que l'on notera T_n , peut se représenter par un *triangle équilatéral* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres carrés ($k = 4$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n -ième nombre *carré*, que l'on notera C_n , peut se représenter par un *carré* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres pentagonaux ($k = 5$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n -ième nombre *pentagonal*, que l'on notera P_n , peut se représenter par un *pentagone régulier* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Remarque. Il est important de noter que chaque figure (et donc chaque nombre polygonal) s'obtient facilement à partir de la figure précédente... C'est ce que l'on va utiliser dans ce qui suit pour calculer ces nombres.

Questions.**A. À propos des nombres triangulaires.**

1. Calculer les nombres T_5 , T_6 et T_7 en faisant apparaître les calculs. On n'attend pas de justification particulière, hormis des calculs un minimum détaillés.

Correction : On a $T_5 = T_4 + 5 = 10 + 5 = 15$, $T_6 = T_5 + 6 = 21$ puis $T_7 = T_6 + 7 = 28$.

Commentaires : On pouvait aussi calculer directement sans relation de récurrence (mais plus fastidieux) :

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$T_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

2. On pose $a_1 = 1$ et si $i \geq 2$ on pose $a_i = T_i - T_{i-1}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de sommer les a_i pour $i = 1$ à n et de reconnaître une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= a_1 + \sum_{i=2}^n a_i && \text{On fait attention à ce que } T_0 \text{ n'existe pas.} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^n (T_i - T_{i-1}) && \text{On reconnaît la somme télescopique} \\ &= 1 + T_n - T_1 = 1 + T_n - 1 \\ &= T_n. \end{aligned}$$

(b) Expliquer le plus simplement possible pourquoi on a $a_i = i$.

Correction : Le nombre a_i est la différence entre le $i^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_i et le $(i-1)^{\text{ème}}$ T_{i-1} .

Or, T_i s'obtient à partir de T_{i-1} en ajoutant un côté possédant i points afin de former un triangle équilatéral dont chaque côté possède i points régulièrement espacés.

Ceci justifie que $a_i = T_i - T_{i-1} = i$.

(c) En déduire l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_n en fonction de n .

Correction : À l'aide de ce qui précède, $T_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

B. À propos des nombres carrés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre carré C_n en fonction de n . Justifier brièvement.

Correction : Le nombre C_n est le nombre de points dans un carré formé de n lignes avec n points chacune soit $C_n = n \times n = n^2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

(a) Écrire Γ_n sous la forme d'une somme $\sum_{i=1}^n b_i$ où b_i est un entier à expliciter en fonction de i .

Correction : En posant $b_i = 2i - 1$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a facilement

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = \sum_{i=1}^n b_i.$$

(b) En déduire Γ_n en fonction de n . Que remarque-t-on ?

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \sum_{i=1}^n (2i-1) = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 && \text{(par linéarité de } \sum \text{)} \\ &= n(n+1) - n = n^2.\end{aligned}$$

La somme des n premiers nombres impairs vaut donc C_n , le $n^{\text{ème}}$ nombre carré.

C. À propos des nombres pentagonaux.

1. Calculer P_4 et P_5 en faisant apparaître les calculs. Justifier brièvement.

Correction : Pour passer de P_3 à P_4 , on ajoute 3 côtés possédant chacun 4 points (car pentagone dont les côtés possèdent 4 points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3 \times 4 - 2 = 10$ points, d'où

$$P_4 = P_3 + 10 = 22.$$

De même, pour passer de P_4 à P_5 , on ajoute 3 côtés possédant chacun 5 points (car pentagone dont les côtés possèdent 5 points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3 \times 5 - 2 = 13$ points, d'où

$$P_5 = P_4 + 13 = 35.$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq 2$. Établir la relation de récurrence :

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

Correction : Reprenons le même raisonnement que ci-dessus. Pour passer de P_{i-1} à P_i , on ajoute 3 côtés possédant chacun i points (car pentagone dont les côtés possèdent i points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3i - 2$ points, d'où

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

Commentaires : Autre façon de le voir : on ajoute à P_{i-1} les 3 côtés manquants, possédant chacun $i-1$ points plus 1 point extrême qu'on ne compte pas car il sera pris en compte dans le côté suivant (sauf pour le troisième et dernier côté). Ainsi, on doit ajouter $3(i-1)$ points plus le tout dernier point extrême (qui n'était commun à aucun autre sommet), d'où $P_i = P_{i-1} + 3(i-1) + 1 = \dots$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Correction : Il suffit de remarquer que $P_i - P_{i-1} = 3i - 2$.

En sommant les deux membres pour $i = 2$ à n , en faisant attention à ne pas écrire P_0 et en reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, \sum_{i=2}^n (P_i - P_{i-1}) &= \sum_{i=2}^n (3i - 2) \\ P_n - P_1 &= 3 \sum_{i=1}^n i - 3 - \sum_{i=2}^n 2 \\ P_n &= P_1 + \frac{3n(n+1)}{2} - 2(n-1) - 3 \\ &= \frac{3n(n+1) - 4(n-1) - 4}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n(3n-1)}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est encore vraie pour $n = 1$ avec $\frac{1 \times (3 \times 1 - 1)}{2} = 1 = P_1$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.

D. Bonus : toute trace de recherche est la bienvenue !

Existe-t-il des entiers naturels ≥ 2 qui sont à la fois un nombre triangulaire et un nombre carré ?
Même question pour des entiers ≥ 2 étant à la fois un nombre carré et un nombre pentagonal.

Correction :

Entier à la fois nombre triangulaire et nombre carré : On cherche à savoir s'il existe un couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ (avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$), tel que $T_n = C_p$.

Autrement dit, on cherche des solutions **entières** de l'équation $\frac{n(n+1)}{2} = p^2$.

Cette question s'avère difficile et sort du programme de PTSI...

Néanmoins, on peut quand même s'aider de l'outil informatique pour voir s'il existe *au moins* un couple solution ! en comparant des tables de valeurs des C_n et des T_n .

On trouve les deux premiers couples solutions $(n, p) = (8, 6)$ et $(n, p) = (49, 35)$.

Plus précisément :

$$T_8 = C_6 = 36 \quad \text{ou encore} \quad T_{49} = C_{35} = 1225.$$

Ainsi, 36 et 1225 sont à la fois des nombres triangulaires et carrés.

Entier à la fois nombre carré et nombre pentagonal : La même méthode pas très fine appliquée à l'équation $\frac{n(3n-1)}{2} = p^2$ conduit à un premier couple solution $(n, p) = (81, 99)$:

$$P_{81} = C_{99} = 9801.$$

Ainsi, 9801 est à la fois un nombre carré et pentagonal.

Nombres Complexes I

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;
- ... ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

1. Nombres complexes

- Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.
- Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.
- Plan complexe.

2. Conjugaison et module

- Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Image du conjugué dans le plan complexe.
- Module : relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

3. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

- Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Notation $\mathbb{U}$.
- Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.
- Formules d'Euler.
- Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$. *Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.*
- Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
- Formule de Moivre. *Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.*

4. Forme trigonométrique

- Forme trigonométrique $re^{i\theta}$, ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul.
- Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.
- Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

5. Équations algébriques (début)

- Pour P fonction polynomiale à coefficients **réels** admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.
- Résolution des équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$.

6. Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
- Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.
- Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.



Les Nombres Complexes I

Les nombres complexes ont été introduits par Cardan et Bombelli au 16^{ème} siècle, comme moyen d'exprimer certaines racines de polynômes de degrés 3 ou 4.

À cette époque, l'introduction des nombres imaginaires (via des racines de réels négatifs) est un pur artifice. La notation i sera introduite par Euler ^[1] en 1777 pour remplacer la notation $\sqrt{-1}$ qui n'avait pas de sens.

Ainsi, dès leur origine, les nombres complexes sont introduits pour pallier l'absence de racines (réelles) de certains polynômes comme, par exemple, $X^2 + 1$.

On démontrera plus tard que ceci implique que tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1. C'est, en substance, le théorème de D'Alembert-Gauss qui se réexprime ainsi :

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine.

Ce théorème est d'une importance capitale, puisqu'il motive la construction de $\mathbb{C}$. Il est conjecturé depuis longtemps déjà lorsque d'Alembert en propose une preuve en 1743. Cette preuve n'est pas satisfaisante, Gauss ^[2] va jusqu'à la qualifier de *petitio principii*, puisqu'elle part de l'hypothèse de l'existence de racines « fictives ».

La première preuve complète et rigoureuse revient à Gauss, au 19^{ème} siècle d'où le nom qu'a laissé la postérité à ce théorème.

[1]. **Leonhard Euler** (15 avril 1707 - 18 septembre 1783) naît à Bâle. Il étudia les mathématiques sur les conseils de Johann Bernoulli, qui était ami avec son père. Il s'installa à Saint-Petersbourg, auprès de Pierre le Grand, puis à Berlin sous le règne de Frédéric II, où à chaque fois il rencontra un environnement scientifique exceptionnel. Son œuvre est considérable.

Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière, ...), les mathématiques, où il met au premier plan le concept de fonction. On lui doit aussi la très jolie relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe (ex : le cube, le tétraèdre, ...).

La santé d'Euler était assez fragile. Il perdit son œil droit en 1735, puis son œil gauche en 1771 en raison d'une cataracte. Il fut donc pendant 12 ans totalement aveugle. Cela obligeait ce mathématicien très prolifique, qui publia 886 ouvrages, le tout en 80 volumes, à faire appel à des personnes de son entourage à qui il dictait ses mémoires. Il décède le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg d'une hémorragie cérébrale.

Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous. »

[2]. **Carl Friedrich Gauss** (30 avril 1777 [Brunswick] - 23 février 1855 [Göttingen]) est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. Il est à la fois le dernier des classiques, et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Par exemple, il démontra comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide des seuls règle et compas, ce qui était un problème ouvert depuis les grecs. Mieux, il démontra pour quels nombres ce partage en parts égales est possible.

Mathématicien et physicien, Carl Friedrich Gauss est une figure incontournable du XIX^{ème} siècle, non seulement pour la quantité monumentale de ses découvertes et la profondeur de ses idées, mais aussi pour sa rigueur à laquelle il attachait la plus haute importance. Sa devise, *Pauca sed matura* (peu mais mûr), illustre la précaution que prenait Gauss à ne publier que des textes soigneusement affinés : une de ces phrases célèbres est que « lorsqu'un bel édifice est achevé, on ne doit pas y lire ce qui fut l'échafaudage ». On peut ainsi concevoir qu'il n'ait pas souhaité la publication de certains de ses travaux.

CONTENU

I	L'ensemble des nombres complexes.	415
I.1	Construction de $\mathbb{C}$	415
I.2	Conjugué d'un nombre complexe.	420
I.3	Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude).	423
II	Nombres et Plan complexes.	424
II.1	Représentation des nombres complexes.	425
II.2	Module d'un nombre complexe.	426
II.3	Inégalité triangulaire.	428
III	L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$	430
III.1	Fonctions vectorielles.	430
III.2	Notation d'Euler.	432
III.3	Nombres complexes de module 1.	434
IV	Forme polaire.	435
IV.1	Forme trigonométrique et exponentielle.	435
IV.2	Règles de calcul en notation exponentielle.	441
IV.3	Argument d'un nombre complexe.	442
V	Applications à la trigonométrie.	444
V.1	Formule d'Euler et de Moivre.	444
V.2	Linéarisation des puissances de cosinus et sinus.	446
V.3	Factorisation par l'angle de l'arc moitié.	447
V.4	Calculs de sommes de cosinus et sinus.	448
V.5	« Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev.	449
V.6	Factorisation de sommes de cosinus et de sinus.	450
VI	Exponentielle complexe.	451
	<i>Feuille d'exercices n°8 : Les Nombres Complexes I.</i>	455
	<i>Test n°9 : Fonctions circulaires - Nombres complexes.</i>	471
	<i>Test n°10 : Remédiation - Nombres complexes.</i>	475
	<i>Test n°11 : Nombres complexes et trigonométrie.</i>	477
	<i>Test n°12 : Nombres complexes et intégration.</i>	481
	<i>Devoir en temps libre n°7 : Un peu de trigonométrie circulaire.</i>	485
	<i>Correction.</i>	486
	<i>Devoir en temps libre n°8 : Un peu de géométrie.</i>	490
	<i>Correction.</i>	492
	<i>Programme du chapitre IX.</i>	499

Gauss influencera considérablement la vie mathématique de son époque et de fait annonce la révolution cantorienne.

Gauss est né dans une famille modeste : sa mère était femme de chambre, son père exerçait toute sorte de métiers, du jardinage à la trésorerie d'une société d'assurances. Il est un élève particulièrement précoce. Un épisode célèbre (peut-être romancé !) de son enfance rapporte qu'alors qu'il était âgé de 9 ans, son maître demanda de calculer $1+2+\dots+100$. Gauss inscrivit presque immédiatement le résultat sur son ardoise, ayant trouvé une méthode extrêmement efficace pour calculer de telles sommes.

À 11 ans, Gauss entre au lycée, où il étudie latin, grec, mathématiques, etc... Il est un élève tellement brillant que le duc de Brunswick souhaite le rencontrer. Visiblement séduit par cet entretien, le duc le prend sous sa protection et lui accorde une bourse : c'est ainsi que Gauss, quoiqu'issu d'une famille modeste, pourra poursuivre ses études.

Il entre à l'université de Göttingen à l'automne 1795. Un an plus tard, après avoir découvert comment construire à la règle et au compas le polygone régulier à 17 côtés, il décide de se consacrer aux mathématiques. Sa thèse, soutenue en 1799, contient la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Deux ans plus tard, il publie *Disquisitiones Arithmeticae*, un ouvrage consacré à la théorie des nombres, où il explore des méthodes complètement nouvelles. Cette même année, en 1801, il détermine l'orbite de Cérès, une planète naine du système solaire, apparue furtivement sur les écrans des télescopes au début de 1801, et disparue ensuite. À cette occasion, Gauss introduit un outil fondamental, la méthode des moindres carrés.

En 1831 arrive à Göttingen Wilhelm Weber avec qui Gauss s'entend à merveille. Pendant six ans, jusqu'à ce que Weber soit chassé de l'Université pour avoir protesté contre le régime, les deux savants mènent des recherches sur l'électro-magnétisme. Ainsi, le « gauss » est devenu l'unité d'induction magnétique.

I/ L'ensemble des nombres complexes

On suppose l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ces deux opérations $+\mathbb{R}$ et $\times\mathbb{R}$ connu et on construit un nouvel ensemble que l'on munit également de ses propres lois :

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) : On appelle ensemble des *nombre complexes*, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+\mathbb{C}$ et $\times\mathbb{C}$ définies par :

- $(a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b')$,
- $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'; a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1; 0) \quad \text{et} \quad i = (0; 1).$$

L'application $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une injection qui permet alors de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x; 0)$.

Muni de cette identification, on a immédiatement quelques propriétés :

Proposition 1 (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

1. Soient $z = (a; b)$ et $z' = (a'; b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a =_{\mathbb{R}} a' \\ b =_{\mathbb{R}} b' \end{cases}$$

2. Les lois $+\mathbb{C}$ et $\times\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$:
3. Les lois $+\mathbb{C}$ et $\times\mathbb{C}$ sont associatives et commutatives.
4. $\times\mathbb{C}$ est distributive sur $+\mathbb{C}$.
5. La loi $+\mathbb{C}$ possède un *élément neutre* $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$ que l'on notera encore 0.

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ possède un symétrique pour $+\mathbb{C}$ appelé *opposé de z* et noté $-z$ et tel que :

$$-z = (-a; -b).$$

6. La loi $\times\mathbb{C}$ possède un *élément neutre* $1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$ que l'on notera encore 1.

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ non nul possède un symétrique pour $\times\mathbb{C}$ appelé *inverse de z* et noté $\frac{1}{z}$ et tel que :

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

7. Enfin, le nombre $(0; 1)$ est tel que $(0; 1)^2 = (-1; 0)$. On le notera i .

En particulier, on a :

$$i^2 = -1.$$

L'assertion 2 permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et $\times$.

Preuve :

1. D'après la définition de $\mathbb{R}^2$, $(a; b) = (a'; b') \iff a = a'$ et $b = b'$.
2. $\forall a, a' \in \mathbb{R}$, $(a; 0) +_{\mathbb{C}} (a'; 0) = (a +_{\mathbb{R}} a'; 0) = a +_{\mathbb{R}} a'$.
3. Il suffit de calculer et comparer $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b')$ et $(a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a; b)$.

Même chose avec $(a; b) \times_{\mathbb{C}} ((a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a''; b''))$ et $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a''; b'')$.

La commutativité permettant de montrer la dernière égalité avec $((a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b')) \times_{\mathbb{C}} (a''; b'')$.

On montrera les mêmes propriétés de la même façon pour la loi $+_{\mathbb{C}}$ et on remarquera bien que celles-ci sont induites par les propriétés des lois $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$.

4. Idem avec $(a; b) \times_{\mathbb{C}} ((a'; b') +_{\mathbb{C}} (a''; b''))$ et $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') +_{\mathbb{C}} (a; b) \times_{\mathbb{C}} (a''; b'')$.
5. $\forall z = (a; b) \in \mathbb{C}$, $(a; b) +_{\mathbb{C}} (0; 0) = (0; 0) +_{\mathbb{C}} (a; b) = (a; b)$.

Donc $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$ est élément neutre pour $+_{\mathbb{C}}$.

De plus $z +_{\mathbb{C}} (-a; -b) = (a +_{\mathbb{R}} (-a); b +_{\mathbb{R}} (-b)) = (0; 0)$.

Par commutativité de $+_{\mathbb{C}}$, on a également $(-a; -b) +_{\mathbb{C}} z = (0; 0)$.

Donc, tout nombre complexe z possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé *opposé* de z et noté $-z$.

6. $\forall z = (a; b) \in \mathbb{C}$, $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (1; 0) = (1; 0) \times_{\mathbb{C}} (a; b) = (a; b)$.

Donc $1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$ est élément neutre pour $\times_{\mathbb{C}}$.

De plus, $\forall z = (a; b) \neq (0; 0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} z \times_{\mathbb{C}} \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(a \times_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + b^2} +_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2 + b^2}; -a \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2 + b^2} +_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + b^2} \times_{\mathbb{R}} b \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}; \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1; 0). \end{aligned}$$

Par commutativité de $\times_{\mathbb{C}}$, on a également $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \times_{\mathbb{C}} z = (1; 0)$.

Tout nombre complexe z non nul admet donc un symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé *inverse* de z et noté $\frac{1}{z}$.

7. Il suffit de calculer :

$$(0; 1)^2 = (0; 1) \times_{\mathbb{C}} (0; 1) = (0 \times_{\mathbb{R}} 0 -_{\mathbb{R}} 1 \times_{\mathbb{R}} 1; 0 \times_{\mathbb{R}} 1 +_{\mathbb{R}} 0 \times_{\mathbb{R}} 1) = (-1; 0) = -(1; 0) = -1.$$

Si cela était au programme, la **proposition (1)** pourrait simplement se résumer en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve grâce à 6 que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

Preuve : Si $zz' = 0$ et $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z}$ existe et on a $\frac{1}{z} \times zz' = 0 \iff z' = 0$. La réciproque est évidente.

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) : Tout nombre complexe $z = (a; b)$ peut s'écrire de manière *unique* la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

— Le nombre réel a s'appelle la *partie réelle* de z notée $\operatorname{Re}(z)$.

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur* et on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.

— Le nombre réel b s'appelle la *partie imaginaire* de z notée $\operatorname{Im}(z)$.

Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, le nombre complexe z est *réel* dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$.

— L'écriture $z = a + ib$ est appelée la *forme algébrique* de z .

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Preuve :

Existence : Soit $z = (a; b)$ un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned} z = (a; b) &\Leftrightarrow (a; 0) + (0; b) \Leftrightarrow z = (a; 0) + b \times (0; 1) \\ &\Leftrightarrow z = (a; 0) + (b; 0) \times i \\ &\Leftrightarrow z = a + ib. \end{aligned}$$

Unicité : Soient deux couples de réels $(a; b)$ et $(a'; b')$ tels que $z = a + ib = a' + ib'$.

$$\text{On a alors } a - a' = (b' - b)i \Leftrightarrow (a - a'; 0) = (0; b' - b) \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$
- $z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$
- $z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i.$

Exercice 1 : On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Calculer $1 + j + j^2$ et j^3 .

Correction :

1. $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$$

$$= 0.$$
2. $j^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1.$

Exemples 2 :

- $\operatorname{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3}$ et $\operatorname{Im}(\sqrt{3} - i) = -1$.
- $\operatorname{Re}(4i) = 0$ et $\operatorname{Im}(4i) = 4$.

Remarques : $\operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Méthode 1 (Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire) :

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

1. On l'écrit sous sa forme algébrique.
2. On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
3. On résout l'équation ainsi écrite.

Exercice 2 : Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

1. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée

(a) $f(z) \in \mathbb{R}$

(c) $\operatorname{Im}(f(z)) = 2$

(b) $f(z)$ imaginaire pur

(d) $\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Im}(z)$

Correction :

1. Pour $z = x + iy$, $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$.
2. (a) $f(z) \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \iff xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$.
 $\iff (x; y)$ appartient aux axes du repère.
- (b) $f(z) \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = x \text{ ou } y = -x$
 $\iff (x; y)$ appartient à la première ou la seconde bissectrice.
- (c) $\operatorname{Im}(f(z)) = 2 \iff xy = 1 \iff x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x}$
 $\iff (x; y)$ appartient l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.
- (d) $\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Im}(z) \iff x^2 - y^2 = 2xy \iff (x - y)^2 - 2y^2 = 0$
 $\iff (x - (1 + \sqrt{2})y)(x - (1 - \sqrt{2})y) = 0$
 $\iff y = (\sqrt{2} - 1)x \text{ ou } y = (\sqrt{2} + 1)x$.

Avec la forme algébrique, la **proposition (1)** peut se réécrire :

Corollaire 1.1 :

— Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

— Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- $zz' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$.
- $-z = -a - ib$.
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.

Désormais, nous abandonnons la notation d'un complexe sous forme d'un couple, et nous représenterons un nombre complexe sous la forme $a + ib$.

ATTENTION

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si $\ll$ était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

- soit $iz \ll iz' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.
- soit $iz' \ll iz \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

Proposition 2 (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) :

Soient a et b deux nombres complexes.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- $(a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2$.
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2abi - b^2$.
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$.

Preuve : Seules, les dernières égalités sont nouvelles :

$$(a \pm ib)^2 = a^2 \pm 2abi + (ib)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2,$$

et

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Vous pourrez enfin factoriser une somme de deux carrés... dans $\mathbb{C}$!

I.2 Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 3 : Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \frac{2-i}{3+2i}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{\quad}$ » sachant que $i^2 = -1$.

D'après la **proposition (2)**, $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3-2i$:

$$z = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - i \frac{7}{13}.$$

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle *conjugué* de z , noté $\bar{z}$, le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\overline{\bar{7}} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 3 : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

$$z_1 = \frac{3}{7} - i\sqrt{7}$$

$$z_2 = \sqrt{2} - 3$$

$$z_3 = \sqrt{7} + i\pi$$

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Il suffit d'écrire :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Petite propriété simplette qui aura de grandes conséquences dont la première :

Méthode 2 (Forme algébrique d'un quotient) :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 4 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+i}$$

$$z_2 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$z_3 = \frac{7}{i}$$

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$1. \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$3. \overline{\bar{z}} = z$$

$$4. \forall z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$2. \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$5. \forall z' \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \bar{z}^n}$.

Une fois n'est pas coutume, remarquez que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition et la multiplication. Fait exceptionnel !

Preuve : Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

1. La première assertion est triviale.
2. Calculons et comparons :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

et

$$\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b).$$

Donc $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ et on conclut par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ puis symétrie par rapport à 0 avec $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

3. Easy.

4. Avec $z \neq 0$ inversible, modifions tout d'abord l'expression de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - ib).$$

De la même manière $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a + ib)$.

Comme $\frac{1}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$, il est alors clair que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - ib)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times \overline{(a - ib)} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a + ib) = \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

5. Avec $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{z'} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exercice 5 : Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = z + 5 - i$$

$$z_2 = iz + 2$$

$$z_3 = z + \frac{1}{\overline{z}}$$

$$z_4 = z + i\overline{z}$$

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\text{— } \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

$$\text{— } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

$$\text{— } z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}.$$

$$\text{— } z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}.$$

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

Preuve : On a :

$$z + \overline{z} = a + \cancel{ib} + a - \cancel{ib} = 2a = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z).$$

Le reste est trivial comme, par exemple : $z = \overline{z} \iff \operatorname{Re}(z) = \frac{\cancel{z} + \cancel{z}}{\cancel{2}} \iff z \in \mathbb{R}.$

Exercice 6 : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

Méthode 3 (Nombres réels et imaginaires purs) :

1. Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = z$ ou $\operatorname{Im}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \overline{z}$.
2. Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = -z$ ou $\operatorname{Re}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \overline{z}$.

I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude)**Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

On appelle *discriminant* de l'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ , le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes *conjuguées* : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

ATTENTION

Pour l'instant, faites bien attention que ce théorème ne s'applique qu'à des équations à coefficients réels. Seules les solutions sont complexes.

Preuve : La démonstration est identique à celle de première si ce n'est que l'on n'est plus gêné par le cas où le discriminant est négatif.

La forme canonique s'écrit :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

- Pour les deux premiers cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ on retrouve les cas vus en première.
- si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ d'où $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta} \right)^2$.

On factorise à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \\ &= \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right). \end{aligned}$$

On en déduit les deux solutions de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans ce cas.

Exemple 5 : Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Exercice 7 (À savoir faire absolument !) : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 7z = 0$.

2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.

3. $-8 = 3z^2$.

Théorème 7 :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients *réels*.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\bar{\alpha}$ est une racine de P .

Preuve : Par compatibilité du conjugué avec les lois de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{P(X)} &= \overline{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0} \\ &= \overline{a_n X^n} + \overline{a_{n-1} X^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 X} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{X}^n + a_{n-1} \overline{X}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{X} + a_0. \end{aligned}$$

Il est alors clair que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff \overline{P(\alpha)} = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0 \iff \bar{\alpha} \text{ est racine de } P.$$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

II/ Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :

L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

$$(a; b) \mapsto z = a + ib$$

Preuve : D'après le **théorème (5)**, tout nombre complexe z possède un unique antécédent $\left(\frac{z + \bar{z}}{2}; \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$ dans $\mathbb{R}^2$ par φ qui est donc bien bijective entre ces deux ensembles.

Remarque : Pour l'injectivité, c'est simplement une traduction du **corollaire (1.1)**.

En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leur partie réelle et imaginaire sont égales.

Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ appelé *plan complexe*.

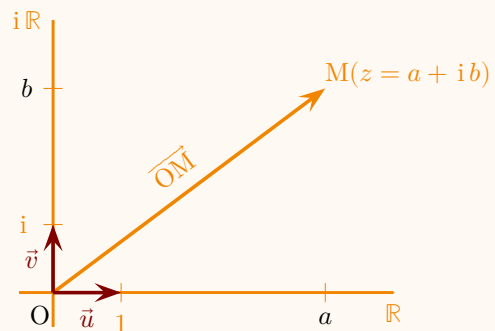
II.1 Représentation des nombres complexes

Le **théorème (8)** permet donc d'associer à $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a; b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(M)}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(M)} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Plus précisément,

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $M(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$.

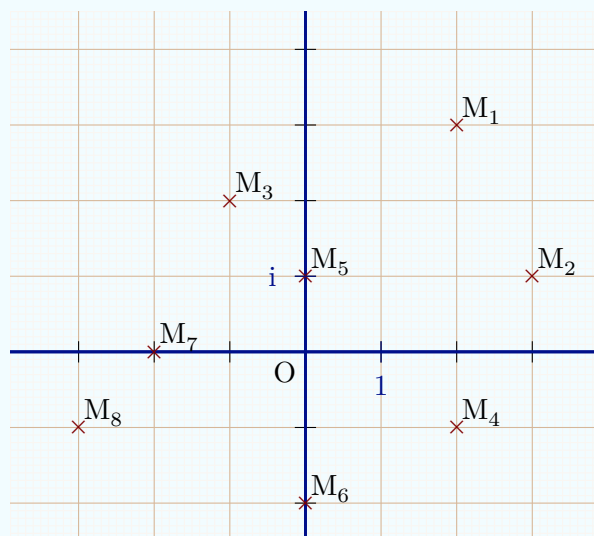


1. Le plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est appelé *plan complexe*.
2. Le nombre complexe z est appelé l'*affiche* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et on écrit $M(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(z)$.

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaires purs.

Exemple 6 :

1. $z_1 = 2 + 3i$
2. $z_2 = 3 + i$
3. $z_3 = -1 + 2i$
4. $z_4 = 2 - i$
5. $z_5 = i$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -i - 3$



Exercice 9 : Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $\operatorname{Re}(z) = -2$

2. $\operatorname{Im}(z) = 1$

3. $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$

4. $\operatorname{Im}(z^2) = 0$

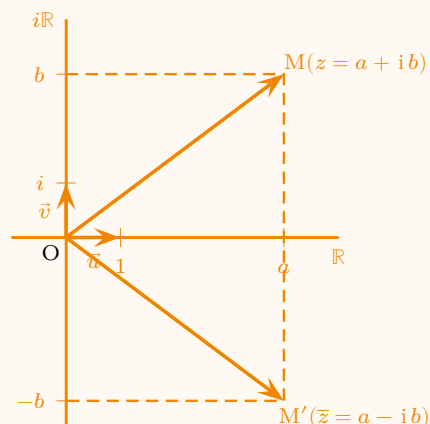
5. $\operatorname{Im}(z^2) = 2$

6. $\operatorname{Re}((z-1)^2) = 0$

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe z .

Le point M' d'affixe $\bar{z} = a - ib$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 10 : On pose $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

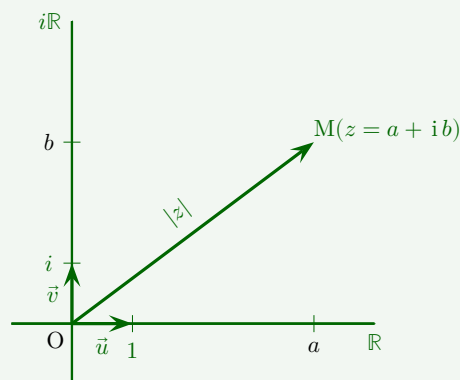
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective $1, \bar{1}, i, \bar{i}, j$ et $\bar{j}$.

II.2 Module d'un nombre complexe

Définition 4 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe z .

On appelle *module* de z , noté $|z|$, la distance OM i.e. le réel positif tel que :

$$|z| = \|\vec{OM}\| \\ = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Exercice 11 : Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 4i$$

$$z_2 = 1 - i$$

$$z_3 = -5 - 2i$$

$$z_4 = -5$$

$$z_5 = 9i$$

Proposition 11 :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$— z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

$$\text{En particulier, si } z \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$$— |z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$$

$$— |-z| = |z| \text{ et } |\bar{z}| = |z|.$$

$$— |z \times z'| = |z| \times |z'|.$$

$$\text{En particulier, } \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$$

$$— \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \text{ avec } z \neq 0.$$

$$— \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \text{ avec } z' \neq 0.$$

$$\text{En particulier, } \forall n \in \mathbb{Z}, \left| \frac{z}{z'} \right|^n = \frac{|z|^n}{|z'|^n}.$$

$$— |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

$$— |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a} \bar{a} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

$$— \text{Il suffit de calculer : } z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

La forme de $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ est tout de même plus sympathique que celle de la **proposition (1)** !

$$— |z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

Observez surtout que l'on a une équivalence entre un zéro complexe ($z = 0_{\mathbb{C}}$) et un zéro réel ($|z| = 0_{\mathbb{R}}$) !

Une autre manière est d'écrire :

$$|z| = 0 \iff z\bar{z} = 0 \iff z = 0 \text{ ou } \bar{z} = 0 \iff z = 0.$$

$$— a^2 + b^2 = |-z| = |\bar{z}| = |z| \text{ ou en revient à la définition :}$$

$$|-z| = \sqrt{(-z)(-\bar{z})} = \sqrt{(-z)(-\bar{z})} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|.$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|.$$

$$— |z \times z'| = \sqrt{(zz') \times \overline{(zz')}} = \sqrt{z \times z' \bar{z} \times \bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z} \times z'\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}} \times \sqrt{z'\bar{z}'} = |z| \times |z'|.$$

— Comme $z \neq 0$ alors $|z| \neq 0$ et $\bar{z} \neq 0$ et on a :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \sqrt{\frac{1}{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{z} \times \frac{1}{\bar{z}}} = \sqrt{\frac{1}{z\bar{z}}} = \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{1}{|z|}.$$

Une autre méthode est de montrer que $|z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$ i.e. $\left| \frac{1}{z} \right|$ est l'inverse de $|z|$ soit $\frac{1}{|z|}$.

$$- \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$

— Doit-on vraiment montrer que $a^2 \leq a^2 + b^2$ ou $b^2 \leq a^2 + b^2$?

Exercice 12 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$$

$$z_3 = \left(\frac{-3i}{1 + i\sqrt{3}} \right)^2$$

$$z_2 = i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}$$

II.3 Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ i.e. les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Preuve : Pour l'inégalité de droite, on a :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.1})$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| \quad (\text{VIII.2})$$

$$\begin{aligned} &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

Inégalité entre deux réels positifs donc $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Pour l'inégalité de gauche, il suffit d'écrire que $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ i.e. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$. Par symétrie entre z_1 et z_2 , on a aussi $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$.

En conclusion, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Supposons avoir l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ alors les inégalités (VIII.2) et (VIII.3) doivent être des égalités i.e.

$$2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| = 2|z_1 \overline{z_2}|.$$

Ainsi $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$ puis

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) &= |z_1 \overline{z_2}| \iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})^2 = |z_1 \overline{z_2}|^2 \quad (\text{les nombres réels étant positifs}) \\ &\iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})^2 = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})^2 + \operatorname{Im}(z_1 \overline{z_2})^2 \\ &\iff \operatorname{Im}(z_1 \overline{z_2})^2 = 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, le nombre $z_1 \overline{z_2}$ est donc un réel positif λ .

Si $z_2 = 0$, $|z_1| \leq |z_1|$ est clairement une égalité.

Sinon, on finit en écrivant, $z_1 = z_1 \times \frac{z_2 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \times z_2 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} \times z_2 = \alpha z_2$ où $\alpha = \frac{\lambda}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, si $z_1 = \alpha z_2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a facilement :

$$|z_1 + z_2| = |\underbrace{(\alpha + 1)}_{\geq 0} z_2| = (\alpha + 1)|z_2| = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} |z_2| + |z_2| = |\alpha z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Remarque : En remplaçant z_2 par $-z_2$, on a aussi :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Quoi qu'il en soit, on a coutume de dire qu'on majore les valeurs absolues de réels et les modules de complexes.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors :

$$\|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires de même sens.

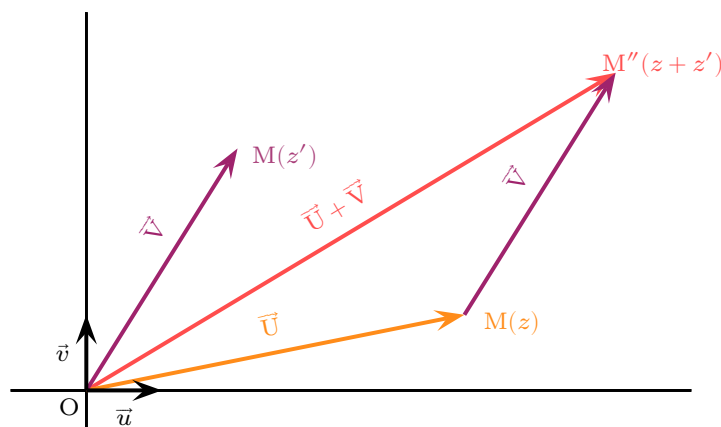


Figure VIII.1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

Par récurrence, on montre facilement que,

Corollaire 12.1 :

Pour toute famille $z_1, z_2, \dots, z_n$ de nombres complexes, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

III/ L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

III.1 Fonctions vectorielles

Définition 5 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

$$\begin{aligned} \text{— partie réelle de } f : \quad \operatorname{Re}(f) : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{— et partie imaginaire de } f : \quad \operatorname{Im}(f) : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) + i \operatorname{Im}(f)(x). \end{aligned}$$

En identifiant $\mathbb{C}$ au plan complexe $\mathbb{R}^2$, la fonction f est un exemple de fonctions, dites *vectorielles*.

En particulier, on peut également définir les fonctions $\bar{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$$\forall x \in I, \quad \bullet \bar{f}(x) = \overline{f(x)}. \quad \bullet |f|(x) = |f(x)|.$$

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

$$\bullet \operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2}. \quad \bullet \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Exercice 13 : Soit $f : x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$.

Définir les fonctions $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\bar{f}$ et $|f|$.

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Preuve : Tout repose sur l'inégalité triangulaire de la proposition (12). Soit a un élément de I .

Supposons $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ continues en a . Alors

$$|f(x) - f(a)| \leq |\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)| + |\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)|.$$

La continuité de f en a en découle.

Réciproquement, si f est continue en a , on en déduit que $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont trivialement à l'aide des inégalités de la proposition (11) :

$$|\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)| = |\operatorname{Re}(f(x) - f(a))| \leq |f(x) - f(a)|$$

et

$$|\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)| = |\operatorname{Im}(f(x) - f(a))| \leq |f(x) - f(a)|.$$

Théorème 14 (Dérivabilité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont et on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + i \operatorname{Im}(f)'(x).$$

Autrement dit $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re}(f))'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im}(f))'$.

Preuve : Soit $a \in I$. La démonstration est identique à la précédente en majorant les quotients ci-dessous suivant les besoins :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (\operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a)) &= \frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Re}(f)'(a) \\ &\quad + i \left(\frac{\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Im}(f)'(a) \right). \end{aligned}$$

Les limites $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} = \operatorname{Re}(f)'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)}{x - a} = \operatorname{Im}(f)'(a)$ existant, on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a) \quad \text{i.e.} \quad f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a).$$

Réciproquement, il suffira d'écrire, exemple, que :

$$\frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Re}(f)'(a) = \operatorname{Re} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right),$$

puis se rappeler encore que $|\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$.

Si f est une fonction à valeurs complexes, ce n'est pas encore à proprement parler, une fonction complexe car elle n'est pas encore « de la variable complexe » mais plutôt un cas particulier de *fonctions vectorielles*.

Augmenter le but, ne pose pas vraiment de problèmes et l'on pourrait tout aussi bien considérer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

ATTENTION

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Augmenter la source, demandera de redéfinir totalement les notions de continuité et de dérivabilité notamment à partir d'une *topologie* de $\mathbb{C}$ à définir aussi.

On parlera alors de *fonctions holomorphes* qui ont de très puissantes propriétés notamment leur analyticité. To be continued...

Exemple 7 : La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$x \mapsto \sin(x) + i e^x.$$

$$f'(x) = \cos(x) + i e^x.$$

Exercice 14 : Montrer que la fonction $f: x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Citons par exemple :

Proposition 15 :

Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\frac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Preuve : Il suffit simplement d'écrire et d'identifier. Montrons par exemple que $(fg)' = f'g + fg'$ en notant f_1, f_2, g_1 et g_2 les fonctions réelles et imaginaires de f et g respectivement :

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1).$$

En dérivant et en identifiant, on a, d'une part :

$$(fg)' = (f'_1g_1 + f_1g'_1 - f'_2g_2 - f_2g'_2) + i(f'_1g_2 + f_1g'_2 + f'_2g_1 + f_2g'_1).$$

D'autre part, en développant $f'g + fg'$:

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= (f'_1 + i f'_2)(g_1 + i g_2) + (f_1 + i f_2)(g'_1 + i g'_2) \\ &= (f'_1g_1 + f_1g'_1 - f'_2g_2 - f_2g'_2) + i(f'_1g_2 + f_1g'_2 + f'_2g_1 + f_2g'_1). \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

III.2 Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned}$$

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$

2. f vérifie $f(0) = 1$.
3. La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = i y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$, on pose comme définition : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = e^{i\theta}$.

Conclusion : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$.

Autrement écrit :

Théorème 16 (Relation d'Euler) :
Pour tout nombre réel θ , on a :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

(VIII.4)

Cette relation relie d'une manière quasi-miraculeuse, les 5 constantes universelles des mathématiques 0, 1, π , i et e et avec elles, relie, dans l'ordre, l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse.

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

1. $e^{i0} = 1$.
2. $|e^{i\theta}| = 1$.
3. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.
5. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.

On récupère ainsi toutes les propriétés de l'exponentielle réelle.

Preuve :

1. $e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$.
2. $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$.
3. $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$
 $= \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i (\sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta'))$
 $= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$
 $= e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
4. Par récurrence sur n à partir de la relation précédente.
5. Il suffit d'écrire et d'utiliser la parité des fonctions $\cos$ et $\sin$:

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

$$6. e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{cases} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi].$$

III.3 Nombres complexes de module 1

En remarquant que $|e^{i\theta}| = 1$ i.e. le point d'affixe $e^{i\theta}$ se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1, on est encouragé à s'intéresser à ce dernier :

Définition 6 (Cercle trigonométrique) : On appelle *cercle trigonométrique* et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}$.

Preuve :

1. Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1 \implies zz' \in \mathbb{U}$.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $z \neq 0$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Enfin, $|z| = 1 \iff z \times \bar{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$.

Remarque : Tout élément de $\mathbb{U}$ admet donc un symétrique (inverse) pour la multiplication. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est encore un élément de $\mathbb{U}$ et $1 \in \mathbb{U}$. Ces trois propriétés font dire de $\mathbb{U}$ qu'il est un *groupe* multiplicatif à l'instar de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15 : Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve : Comme $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$, on a facilement $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$.

Réciproquement, par définition des fonctions $\cos$ et $\sin$, tout point $M(z)$ du cercle trigonométrique a pour coordonnées $(\cos(\theta); \sin(\theta))$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ i.e. pour affixe $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et l'inclusion voulue.

En conclusion, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Plus particulièrement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel θ est, de plus, unique si on impose $\theta \in]-\pi; \pi]$.

Corollaire 19.1 :

1. La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha; \alpha + 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.

2. La fonction $(r; \theta) \mapsto r e^{i\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Preuve :

1. Simple traduction du **théorème (19)**.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme $z \neq 0$ alors $r = |z| \neq 0$ et on peut écrire $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Il existe alors un unique $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ ou encore un unique couple $(r; \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ tel que :

$$z = |z| e^{i\theta} = r e^{i\theta}.$$

L'application $(r; \theta) \mapsto r e^{i\theta}$ est bien une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

IV/ Forme polaire

IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle

De manière pratique, le **corollaire (19.1)** se traduit par le résultat suivant :

Définition/Théorème 7 :

1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

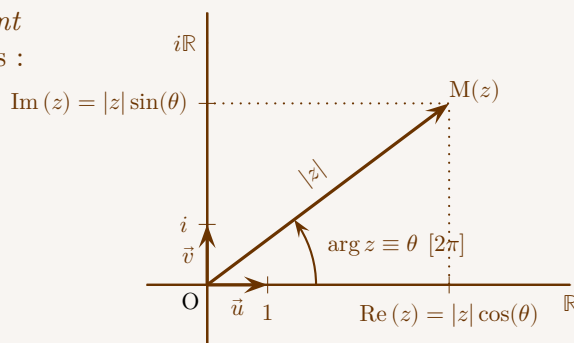
$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} && \text{avec } r = |z| && \text{(forme exponentielle)} \\ &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). && && \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

Cette écriture s'appelle la *forme trigonométrique/exponentielle/polaire* de z .

2. Tout réel θ de ce type s'appelle un *argument* de z et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

On note alors $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.



3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ où M est le point du plan d'affixe z .
4. L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi; \pi]$ définit l'argument principal de z , noté $\arg(z)$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel *positif*.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de ses arguments est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0; 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi; \pi]$.
- Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \dots$. Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 [\pi].$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$

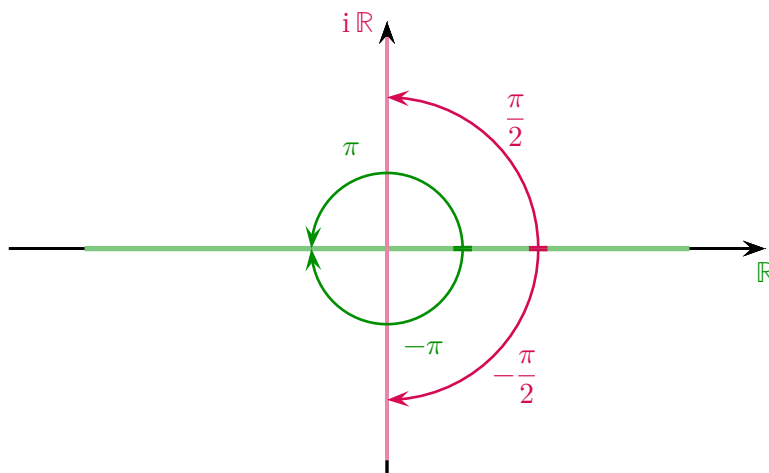


Figure VIII.2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 : Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2 e^{i \frac{\pi}{3}}$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$	$1 + i\sqrt{3}$

Exemple 9 : Quelle est la forme algébrique de $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i.$$

Exercice 16 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z_2 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

Exemples 10 : Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

$$— e^{i0} = e^{i2\pi} = 1.$$

$$— e^{i \frac{\pi}{2}} = i.$$

$$— e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1.$$

$$— 2 e^{i \frac{\pi}{3}} = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i 2 \sin \frac{\pi}{3} \\ = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$— \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \\ = 1 + i.$$

$$— 2 e^{i \frac{\pi}{6}} = 2 \cos \frac{\pi}{6} + i 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ = \sqrt{3} + i.$$

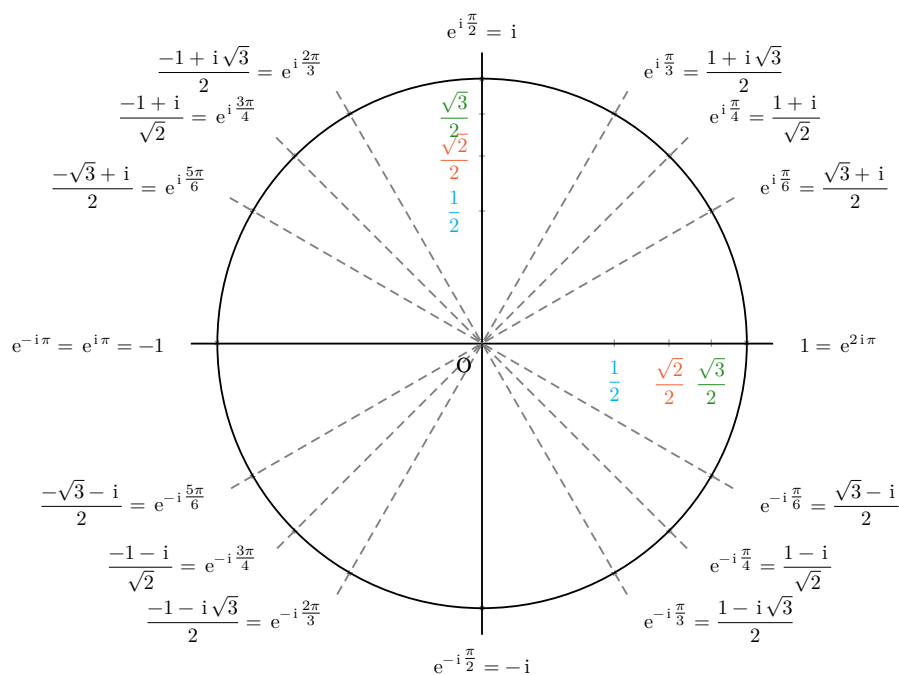


Figure VIII.3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 11 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

(Forme exponentielle)

$$= 4 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

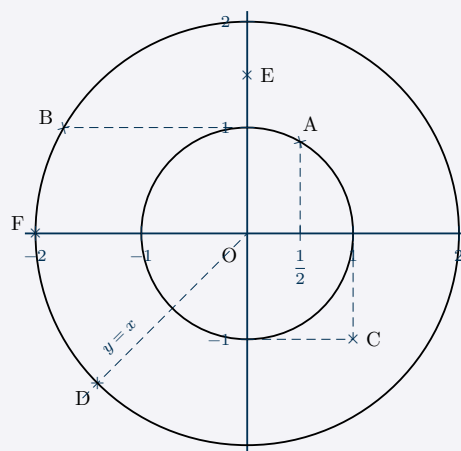
(Forme trigonométrique)

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.$$

(Forme algébrique)

Exercice 17 : Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



Méthode 4 (Mettre sous forme trigonométrique un nombre complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

$$\text{Au pire, si } a \neq 0, \theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

Exemples 12 :

1. $\arg(3 + 2i) \equiv \arctan\left(\frac{2}{3}\right) [2\pi]$.

2. $\arg(-1 + i) \equiv \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

3. $\arg(-3 - i\sqrt{3}) \equiv \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$.

Exemples 13 : Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

$$\text{--- } z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{D'où } r = \sqrt{2}, \theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{--- } z_2 = -\sqrt{3} + i : \begin{cases} |-\sqrt{3} + i| = 2 \\ \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } r = 2, \theta \equiv \frac{5\pi}{6} \text{ et } z_2 = -\sqrt{3} + i = 2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] \\ = 2 e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Exercice 18 : Trouver un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2 + 2i$.

2. $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Correction :

$$1. z_1 = -2 + 2i : \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{2}{|-2+2i|} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{|2+2i|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Donc $\arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$.

$$2. z_2 = 1 - i\sqrt{3} : \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{|1-i\sqrt{3}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Donc $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

Exemples 14 (Factorisation directe) : Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$?

1. Tout d'abord, on calcule $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.

2. Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

3. On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

D'où, $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}$.

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
- $i = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π .

Preuve : Soient deux nombres complexes $z = |z| e^{i\theta}$ et $z' = |z'| e^{i\theta'}$ non nuls sous leur forme exponentielle.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| e^{i\theta} = |z'| e^{i\theta'} \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z'|} = e^{i(\theta' - \theta)} \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Or, } e^{i(\theta' - \theta)} \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \theta - \theta' \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi].$$

$$\text{Mais alors } \frac{|z|}{|z'|} = e^{0i} = 1 \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et c'est le résultat escompté.}$$

Proposition 22 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

$$\text{— Produit : } r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta + \theta')}.$$

$$\text{— Puissance : } (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

$$\text{— Conjugué : } \overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}.$$

$$\text{— Quotient : } \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}.$$

$$\text{— Inverse : } \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

Moralité :

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Preuve : Rien à faire si ce n'est rappeler les propriétés de la fonction exponentielle.

Exemple 15 (Forme exponentielle et calculs de produits et quotients) :

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2^4 &= (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^4 \\ &= (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144 e^{i\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} \\ &= \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 19 : Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right).$$

IV.3 Argument d'un nombre complexe

L'analogie avec la fonction exponentielle et l'idée géniale de remarquer qu'un nombre complexe puisse se mettre sous une forme exponentielle permet d'obtenir rapidement et simplement grâce à la **proposition (22)** des propriétés sur les modules et les arguments. Concentrons-nous donc sur ces derniers.

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(z z') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \arg z$.

ATTENTION

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}.$$

Bien sûr, tout le monde aura remarqué que la fonction $\arg$ se comporte comme la fonction $\ln$ avec les produits.

Preuve : La **proposition (23)** n'est qu'un cas particulier de la **proposition (22)** en ne considérant que les arguments.

On considère donc deux nombres complexes $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ écrits sous leur forme exponentielle.

- $z z' = r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta + \theta')}$. Donc $\arg(z z') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.^[3]
- $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$ et si $z \neq 0 \iff r \neq 0$, $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$. En ne regardant que les arguments, on obtient $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$.^[4]

— Pour l'argument du quotient, soit on écrit que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) \equiv \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \\ &\equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi]\end{aligned}$$

en transformant le quotient en produit et on utilise les formules précédentes, soit on préfère la forme exponentielle :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')} \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi]. \quad [5]$$

— La dernière assertion est une conséquence de $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$. [6]

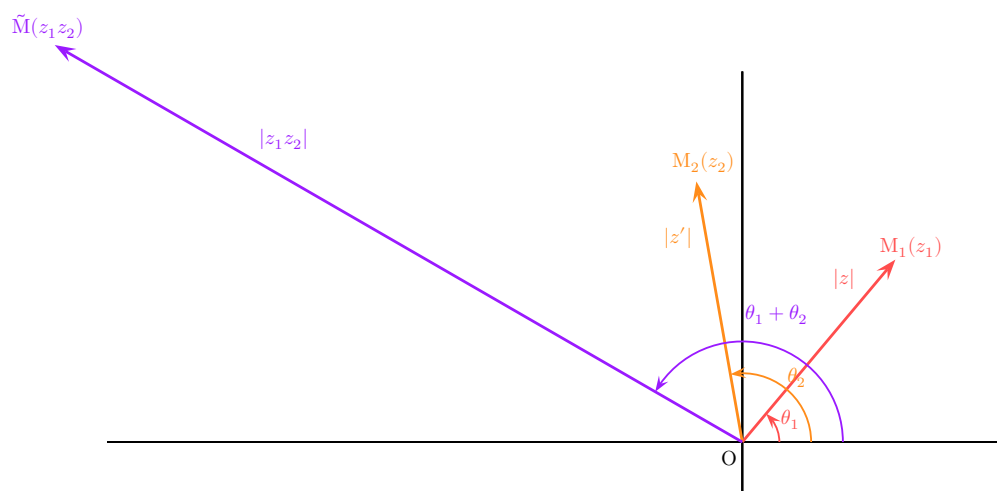


Figure VIII.4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se *multiplient* et les arguments s'*ajoutent*.

Exemple 16 : En reprenant les notations de l'exemple (15), on obtient, *sans calculs* :

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

[3]. Sur les modules, on obtiendrait $|zz'| = |z| \times |z'|$.

[4]. Sur les modules, on obtiendrait $|\bar{z}| = |z|$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

[5]. Sur les modules, on obtiendrait $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

[6]. Sur les modules, on obtiendrait $|z^n| = |z|^n$.

V/ Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Exemple 17 (Expression de $\cos \frac{\pi}{12}$) : Il suffit de remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

D'où :

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

V.1 Formule d'Euler et de Moivre

Commençons par réécrire une des assertions du **théorème (5)** :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Preuve : On a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta).$$

La somme et la différence des deux expressions précédentes donnent le résultat.

Exercice 20 : Développer $A = (e^{i\theta} - 1)^3$ et $B = (1 + e^{i\theta})^4$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \operatorname{ch}(ix) &= \cos(x) & \operatorname{sh}(ix) &= i \sin(x) \\ \cos(ix) &= \operatorname{ch}(x) & \sin(ix) &= i \operatorname{sh}(x). \end{aligned}$

Il est alors aisé de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques à partir de leurs homologues circulaires.

Par exemples :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(ix) + \sin^2(ix) &= 1 \iff \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1. \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(i(a+b)) &= \cos(ia)\cos(ib) - \sin(ia)\sin(ib) \\ &\iff \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b). \end{aligned}$$

Théorème 25 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Preuve : Magique de simplicité grâce à la notation exponentielle, c'est simplement une réécriture de la **proposition (17)** :

$$\left(e^{i\theta} \right)^n = e^{in\theta} \iff \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Un peu d'histoire :

- Abraham de Moivre (1667, Vitry-le-François - 1667, Londres) était un mathématicien ami des physiciens et astronomes Newton et Halley qu'il rencontra lors de son exil forcé en Angleterre à la suite de la révocation de l'édit de Nantes en 1685 et la recrudescence des persécutions contre les huguenots^a. Il faudrait théoriquement dire « formule de De Moivre », (selon la règle de conservation de la particule onomastique pour les noms d'une syllabe, comme de Gaulle), mais on dit plus souvent « formule de Moivre ».
- La version démontrée par Moivre est la version donnée avec les fonctions $\sin$ et $\cos$, le lien avec les propriétés de l'exponentielle n'ayant été découvertes que plus tard par Euler (19^{ème} siècle), qui est à l'origine de la notation exponentielle $e^{i\theta}$.

a. protestants (ndp.)

Exemple 18 (Duplication des angles) : À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).$

D'autre part, en développant, $\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^2 = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta).$

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus.

Proposition 26 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Preuve : Pour tous a et b réels, on a :

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a \quad \text{et} \quad e^{ib} = \cos b + i \sin b.$$

Or, $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$ mais aussi :

$$\begin{aligned} e^{ia} \times e^{ib} &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\sin a \cos b + \cos a \sin b). \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les deux premières formules. Il suffit alors de remplacer b par $-b$ et d'utiliser la parité de $\cos$ et l'imparité de $\sin$ pour avoir la deuxième série de formules.

V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en $\cos^2$ et $\sin^2$.

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

Méthode 5 (Linéarisation de $\cos^k x \sin^\ell x$) :

1. On utilise les formules d'Euler de la proposition (24) pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec e^{ix} et e^{-ix} .
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton [7].
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

Exercice 21 : Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x) \sin^3(x)$.

Correction : Appliquons la méthode :

$$\begin{aligned} 1. \cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{16} \cos(5x) + \frac{5}{32} \cos^3(x) + \frac{5}{16} \cos(x). \end{aligned}$$

$$[7]. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$$\begin{aligned}
2. \cos^2(x) \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^2} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \times \frac{1}{2^3 i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i} (e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} - e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
&= -\frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{1}{16} \sin(3x) + \frac{1}{8} \sin(x).
\end{aligned}$$

On pouvait aussi faire autrement :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) \sin^3(x) &= \frac{1}{4} \sin^2(2x) \sin(x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x)) \sin(x) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} (\sin(5x) + \sin(3x)) \\
&= -\frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{1}{16} \sin(3x) + \frac{1}{8} \sin(x).
\end{aligned}$$

V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 (Factorisation par l'angle de l'arc moitié) :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la [proposition \(24\)](#)

Exercice 22 : Factoriser les expressions suivantes :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$.
2. (a) Soient p et q des réels. Montrer que $e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}$.
(b) En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p) + \cos(q)$, $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$ avec $(p; q) \in \mathbb{R}^2$.

Cette méthode, appelée aussi *principe de symétrisation des arguments*, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}
e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}. \\
e^{ia} - e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.
\end{aligned}$$

Remarquez que c'est une façon commode de retenir ou retrouver les formules de factorisation des fonctions trigonométriques (transformation d'une somme en produit).

Conséquence de l'exercice (22), une nouvelle série de formules trigonométriques :

Proposition 27 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$

Preuve : Afin de ne pas tout redémontrer, il sera bon de se rappeler, à partir de la première expression de $\cos(p) + \cos(q)$, que

$$-\cos q = \cos(q \pm \pi) \quad \text{et} \quad \pm \sin(p) = \cos\left(p \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 23 : Mettre $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

Correction : $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{4}}.$

V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus

Les nombres complexes à travers la forme exponentielle sont aussi utiles pour le calcul de sommes de cosinus ou sinus

On écrira alors que $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$, $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$ et on utilisera la linéarité des opérateurs Re et Im avant de remarquer, souvent, un binôme de Newton ou une série géométrique.

Exercice 24 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$A_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad \text{le noyau de Dirichlet, et} \quad B_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k(t).$$

Montrer que $A_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $B_n(t) = \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.$

Correction : Pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{it} \neq 1$ et on a :

$$\begin{aligned}
 A_n(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + \overline{e^{ikt}}) \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{it})^k \right) - 1 \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) - 1 = 2 \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{nt}{2}} \frac{e^{-i \frac{(n+1)t}{2}} - e^{i \frac{(n+1)t}{2}}}{e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}} \right) - 1 \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{nt}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) - 1 = 2 \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} - 1 \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} + \frac{(n+1)t}{2} \right) - \sin \left(\frac{nt}{2} - \frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} - 1 \\
 &= \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})t \right) - \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} - 1 = \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.
 \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
 B_n(t) &= \sum_{k=0}^n A_k(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \left(\frac{(2k+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} = \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{(2k+1)t}{2}} \right) = \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \right) \\
 &= \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) = \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{e^{-i \frac{(n+1)t}{2}} - e^{i \frac{(n+1)t}{2}}}{e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) = \left(\frac{\sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2.
 \end{aligned}$$

V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la [proposition \(25\)](#).

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en $\cos$ ou en $\sin$, on procède comme à l'[exemple \(20\)](#) *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$) :

1. On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 25 : Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 28 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et ω un réel, il existe $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Preuve : On utilise, comme précédemment, les formules de la proposition (24).

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = a \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - ib \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} = \frac{a - ib}{2} e^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2} e^{-i\omega t}.$$

Notons $z = \frac{a + ib}{2} \neq 0$ et $r e^{-i\varphi}$ sa forme polaire [8].

$$\begin{aligned} \text{D'où, } a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) &= \bar{z} e^{i\omega t} + z e^{-i\omega t} = \bar{z} e^{i\omega t} + \overline{\bar{z} e^{i\omega t}} = 2\operatorname{Re}(\bar{z} e^{i\omega t}) \\ &= 2\operatorname{Re}(r e^{i(\omega t + \varphi)}) = \underbrace{2r}_A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

En particulier, $A = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = -\arg(a + ib)$.

Remarque : Une telle fonction $t \mapsto a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ est appelée *signal sinusoïdal*.

Physiquement, le réel A représente son amplitude, et φ son déphasage. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est alors le module de $a + ib$ et la phase son argument.

Exercice 26 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. Simplifier l'expression $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta)$.
2. Donner une interprétation physique de ce résultat.
3. Même question avec $\sqrt{3} \cos(\theta) - \sin(\theta)$.

Correction :

1. $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta) = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. La somme des signaux $\theta \mapsto \sqrt{2} \cos(\theta)$ et $\theta \mapsto \sqrt{6} \sin(\theta)$ est encore un signal sinusoïdal de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $-\frac{\pi}{6}$.

[8]. $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On prend un argument en notation négative simplement pour des facilités d'écriture.

$$3. \sqrt{3} \cos(\theta) - \sin(\theta) = 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

VI/ Exponentielle complexe

Définition 8 : Pour tout nombre complexe z , on appelle *exponentielle de z* , noté $\exp(z)$ ou e^z , le nombre défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

Exemple 19 : $e^{2 + \frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{i e^2}{\sqrt{2}}.$

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III). Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in i\mathbb{R}$ alors $e^z \in \mathbb{U}$.

Ici aussi, ce n'est pas encore la *fonction* exponentielle complexe qui existe et qui est définie par

$$\begin{aligned} e : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

ATTENTION

mais seulement la définition *algébrique* du nombre complexe e^z .

De façon immédiate, on a les résultats suivants :

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Encore une fois, la relation précédente n'est facile que par la définition algébrique que l'on a donné du nombre e^z .

Montrer cette même formule dans le cadre de la fonction $z \mapsto e^z$ définie en (VIII.5) demande un peu plus de bagages mathématiques. Le **théorème (29)** est d'ailleurs une propriété caractéristique de cette fonction.

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$
- $\arg e^z \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi].$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$

Preuve : Il suffit d'écrire et d'identifier à partir de :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))).$$

Pour la dernière assertion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'après le **théorème (29)** :

$$e^z \times e^{-z} = e^0 = 1.$$

On en déduit deux choses :

1. La première : e^z ne peut être nul, pas plus que e^{-z} .
2. La seconde : e^z est inversible pour tout $z \in \mathbb{C}$ et son inverse est e^{-z} .
Magique !

Théorème 31 (Noyau de l'exponentielle) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi]. \end{aligned}$$

Preuve : Déjà fait maintes fois. Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\Leftrightarrow \begin{cases} |e^z| = |e^{z'}| \\ \arg e^z \equiv \arg e^{z'} [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi]. \end{aligned}$$

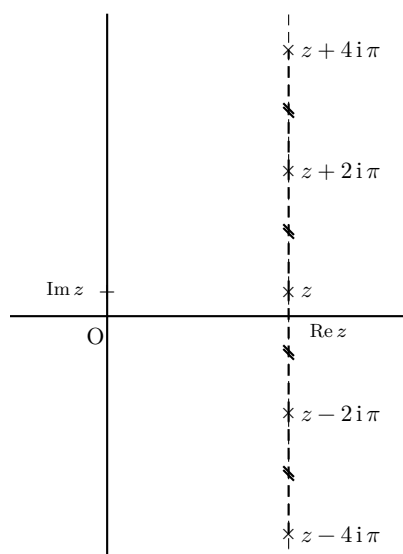


Figure VIII.5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

Théorème 32 (Image réciproque) :

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $e^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $e^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |\omega| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi].$$

Autrement dit, $z \equiv \ln(|\omega|) + i \arg(\omega) [2i\pi]$.

Preuve : Il suffit d'écrire (encore) les égalités entre module et argument.

Exercice 27 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $e^z = 2 + i$.

Correction : $z \equiv \frac{1}{5} \ln(5) + i \arctan\left(\frac{1}{2}\right) [2i\pi]$.

Moralité : Le **théorème (29)** et le **théorème (31)** montrent que l'application exponentielle est *un morphisme continue surjectif* de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 33 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I .

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = e^\varphi$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}.$$

Preuve : On a rapidement :

$$f_1 = \operatorname{Re}(e^\varphi) = e^{\operatorname{Re}(\varphi)} \cos(\operatorname{Im}(\varphi)) \quad \text{et} \quad f_2 = \operatorname{Im}(e^\varphi) = e^{\operatorname{Re}(\varphi)} \sin(\operatorname{Im}(\varphi)).$$

Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur I , $\exp(\varphi)$ est dérivable sur I d'après le **théorème (14)** et en utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned} (e^\varphi)' &= f_1' e^{f_1} (\cos(f_2) + i \sin(f_2)) + e^{f_1} (-f_2' \sin(f_2) + i f_2' \cos(f_2)) \\ &= (f_1' + i f_2') e^{f_1} (\cos(f_2) + i \sin(f_2)) \\ &= \varphi' e^\varphi. \end{aligned}$$

Exemple 20 : Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \mapsto e^{ax}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} = a^n f(x).$$

Exercice 28 : Dériver les fonctions complexes $t \mapsto e^{e^{it}}$ et $t \mapsto e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}$.

Les Nombres Complexes I

I/ Formes algébrique et exponentielle

Exercice 1 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

Vérifier vos résultats à la calculatrice.

$$z_1 = (2 - i)(i + 1)$$

$$z_2 = \frac{5 + i}{5 - i} + i$$

$$z_3 = (7i - 3)(7 - 3i)$$

$$z_4 = i^{2n}$$

$$z_5 = i^{2n+1}$$

$$z_6 = (1 + i)^2$$

$$z_7 = (1 - i)(1 + i)$$

$$z_8 = (1 + i\sqrt{2})^2$$

$$z_9 = (1 - 2i)^3$$

$$z_{10} = \frac{1}{2 + 3i}$$

$$z_{11} = \frac{1}{4i - 3}$$

$$z_{12} = \frac{6 - i}{3 - 3i} \times \frac{1 - i}{2 - i}$$

$$z_{13} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$z_{14} = \frac{1 + i}{1 - i}$$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

$$1. \frac{z - 2}{z + i} \in i\mathbb{R}$$

$$2. \frac{z - 2}{z + i} \in \mathbb{R}$$

$$3. \frac{z - 2}{2z + i} \in \mathbb{R}$$

$$4. \frac{z - 1}{z - i} \in i\mathbb{R}$$

Correction :

1. Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \neq -i, \frac{z - 2}{z + i} &= \frac{x - 2 + iy}{x + (y + 1)i} = \frac{((x - 2) + iy)(x - (y + 1)i)}{x^2 + (y + 1)^2} \\ &= \frac{x(x - 2) + y(y + 1) + ((2 - x)(y + 1) + xy)i}{x^2 + (y + 1)^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z - 2}{z + i} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow x(x - 2) + y(y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ ne vérifie pas l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \neq -i, \frac{z-2}{z+i} &= \frac{x-2+iy}{x+(y+1)i} = \frac{((x-2)+iy)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)i}{x^2+(y+1)^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R} &\iff (2-x)(y+1)+xy=0 \\ &\iff 2-x+2y=0 \\ &\iff x-2y-2=0. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x-2y-2=0$ privé du point $(0; -1)$.

3. Posons $z = x + iy$. On suppose $z \neq \frac{i}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{2z+i} &= \frac{(x-2)+iy}{2x+i(2y+1)} = \frac{((x-2)+iy)(2x-i(2y+1))}{4x^2+(2y+1)^2} \\ &= \frac{2x(x-2)+y(2y+1)+i(2xy-(x-2)(2y+1))}{4x^2+(2y+1)^2} \end{aligned}$$

Comme le dénominateur ne peut être nul,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{2z+i} \in \mathbb{R} &\iff 2xy-(x-2)(2y+1)=0 \\ &\iff -x+4y+2=0 \end{aligned}$$

Les solutions sont les points de la droite d'équation $(\mathcal{D}) : x-4y-2=0$.

Remarque : On vérifiera bien que le point $(0; \frac{1}{2}) \notin (\mathcal{D})$.

4. Posons $z = x + iy$. On suppose $z \neq i$.

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} &= \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{((x-1)+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x(x-1)+y(y-1)+i(xy-(x-1)(y-1))}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

Comme le dénominateur ne peut être nul,

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} \in i\mathbb{R} &\iff x(x-1)+y(y-1)=0 \\ &\iff x^2+y^2-x-y=0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Les solutions sont les points du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On vérifiera bien que le point $(0; 1) \in \mathcal{C}$.

L'ensemble cherché est donc le cercle $\mathcal{C}$ privé du point $A(i)$.

Une autre méthode :

$$\begin{aligned}
 \frac{z-1}{z-i} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} = -\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z-i} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} \\
 &\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+i) + (z-i)(\bar{z}-1) = 0 \quad z \neq i \Rightarrow \bar{z} \neq -i \\
 &\Leftrightarrow 2|z|^2 - \overline{(1+i)}z - (1+i)\bar{z} = 0 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 - \frac{1}{2}\overline{(1+i)}z - \frac{1}{2}(1+i)\bar{z} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{2}(1+i)\right|^2 - \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Commentaires : $\left|z - \frac{1}{2}(1+i)\right|^2 = \left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)\overline{\left(z - \frac{1}{2}(1+i)\right)}$.

$$= |z|^2 - \frac{1}{2}\overline{(1+i)}z - \frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + \frac{1}{2}$$

En posant $M(z)$, on reconnaît $M\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i.e. les points qui sont à la distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de Ω . C'est le cercle précédent privé de A.

Exercice 3 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer de deux façons différentes que $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ est un réel.
2. Montrer de deux façons différentes que $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$ est un imaginaire pur.

Correction :

Avec les parties réelle et imaginaire : On compare avec les conjugués, en utilisant la compatibilité avec le somme et les quotients :

1. $\overline{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ donc $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)$ donc $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \in i\mathbb{R}$.

Avec les parties réelle et imaginaire : Posons $z = x + iy$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

1. $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x+iy} + \frac{1}{x-iy} = \frac{x-iy+x+iy}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x-iy} = \frac{x-iy-x-iy}{x^2+y^2} = -\frac{2iy}{x^2+y^2} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1+i)z = 1-i$	7. $\begin{cases} z+z' = 2-5i \\ z+3z' = i-1 \end{cases}$	13. $3z^2 - 2z = 1$
2. $2iz - 1 - i = z + 2i$	8. $\begin{cases} z+iz' = 2 \\ 2z+2z' = 2+3i \end{cases}$	14. $\frac{3+z}{3-z} = z$
3. $\frac{2}{z} + 3i = -2 - 5i$	9. $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 1-2i$	15. $(z-2)^2 = -4$
4. $\frac{iz+1}{z-3i} = 2+i$	10. $(1+i)\bar{z} + 2iz = 1-i$	16. $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$
5. $(2z+1-i)(iz+3) = 0$	11. $-2z^2 + 6z + 5 = 0$	17. $(z-2)^2 = (3+iz)^2$
6. $(z-i)^2 = (z+1+i)^2$	12. $-2z + z^2 + 2 = 0$	18. $z^2 = 3iz$
		19. $-z^2 + (1+\sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$
		20. $(z^2+z-3)^2 + (z^2-z+1)^2 = 0$

Exercice 5 : Pour θ nombre réel dans $[0 ; \pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.
- Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ .

Correction :

- L'existence des solutions réelles dépend du signe de $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$.

L'équation admettra donc des solutions réelles si, et seulement si $\sin(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0 [\pi]$ soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ dans notre intervalle.

- Soit $\theta \not\equiv 0 [\pi]$.

L'équation à coefficients réels admet donc deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $x_2 = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = e^{-i\theta}$.

Commentaires : *Merci de retenir que $(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = z^2 - 2\cos(\theta)z + 1$ et, d'une manière plus générale :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2.$$

Exercice 6 : Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0. \quad (\text{VIII.1})$$

- Montrer que i est solution de l'équation de (VIII.1).
- Résoudre alors l'équation (VIII.1).

Correction :

- $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 - i + 13i - 4 - 13i = 0$ donc i est solution de (VIII.1).
- Il suffit de factoriser de la manière que vous voulez :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 + bz + 13)$$

En identifiant les coefficients des z^2 :

$$-(4 + i) = b - i \iff b = -4$$

$$= (z - i)(z^2 - 4z + 13)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6i)^2 \text{ et } z_{12} = -2 \pm 3i$$

$$= (z - i)(z + 2 - 3i)(z + 2 + 3i).$$

On trouve donc $\mathcal{S}_{(\text{VIII.1})} = \{i, -2 + 3i, -2 - 3i\}$.

Exercice 7 : On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1. Montrer que si z est une racine de P , alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont également des racines de P .
2. Vérifier que $1 + i$ est une racine de P .
3. Déterminer toutes les racines de P .

Correction :

1. Comme P est à coefficients réels, z est racine de P si, et seulement si $\bar{z}$ l'est :

$$P(z) = 0 \iff \overline{P(z)} = 0 \iff \overline{z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1} = 0$$

$$\iff \bar{z}^4 - 3\bar{z}^3 + \frac{9}{2}\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 1 = 0$$

$$\iff P(\bar{z}) = 0.$$

$$\text{Si } z \neq 0, \text{ alors } P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^4} - 3\frac{1}{z^3} + \frac{9}{2}\frac{1}{z^2} - 3\frac{1}{z} + 1 = \frac{1}{z^4} \left(1 - 3z + \frac{9}{2}z^2 - 3z^3 + z^4\right) = \frac{1}{z^4}P(z).$$

Donc $z \neq 0$ est racine de P si, et seulement si $\frac{1}{z}$ l'est également.

2. Il suffit de calculer. Le plus simple est de le faire sous forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$P\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 4e^{i\pi} - 6\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}} + 9e^{i\frac{\pi}{2}} - 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + 1 = -4 + 6 - 6i + 9i - 3 - 3i + 1 = 0.$$

Donc $1 + i$ est racine de P .

3. D'après les deux questions précédentes, les racines de P , au nombre de 4, sont :

$$\mathcal{S} = \left\{1 + i, \overline{1 + i} = 1 - i, \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2}, \overline{\left(\frac{1}{1 + i}\right)} = \frac{1 + i}{2}\right\}.$$

Exercice 8 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\text{Montrer que } |a - b| = |1 - \bar{a}b| \iff |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1.$$

Aide : On pourra développer intelligemment $(|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1)$.

2. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Cette relation est appelée *égalité du parallélogramme*. Pourquoi ?

Correction :

2. Soient $u, v \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)(\overline{u+v}) + (u-v)(\overline{u-v}) \\ &= (u+v)(\overline{u} + \overline{v}) + (u-v)(\overline{u} - \overline{v}) \\ &= [u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v}] + [u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v}] \\ &= 2(u\overline{u} + v\overline{v}) \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice 9 : Déterminer z pour que z , $z-1$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

Correction : Il est déjà clair que $z \neq 0$.

Avec la forme exponentielle : De l'égalité $|z| = \frac{1}{|z|}$, on tire $|z| = 1$ i.e. $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Enfin } |z-1| = 1 &\iff \left| e^{i\frac{\theta}{2}} 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 1 \iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{3} [4\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{3} [4\pi]. \end{aligned}$$

Les solutions cherchées sont donc $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et son conjugué $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Avec la forme algébrique : Posons $z = x + iy$ avec $x^2 + y^2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} - &|z|^2 = x^2 + y^2. \\ - &|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ - &\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Il suffit de résoudre des systèmes pour obtenir x et y :

$$|z|^2 = |z-1|^2 \iff x^2 = (x-1)^2 \iff x^2 - (x-1)^2 = 0 \iff 2x-1=0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

$$|z|^2 = \left|\frac{1}{z}\right|^2 \iff (x^2 + y^2)^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{4} + y^2\right)^2 = 1 \underset{\frac{1}{4} + y^2 > 0}{\iff} \frac{1}{4} + y^2 = 1 \iff y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On retrouve $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 10 : Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| &= |1+z+z^2+\dots+z^{n-1}| \\ &\leq |1|+|z|+|z^2|+\dots+|z^{n-1}|, \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq 1+|z|+|z|^2+\dots+|z|^{n-1} \\ &\leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|} \quad \text{car } |z| \neq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \quad \left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 11 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) & z_5 &= e^{ik\pi}, k \in \mathbb{Z} & z_8 &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \\ z_2 &= e^{i\pi} + 1 & z_6 &= 3e^{i\frac{\pi}{4}(1+4k)}, k \in \mathbb{Z} & z_9 &= \frac{1+ib}{2b+(b^2-1)i} \quad \text{où} \\ z_3 &= 4e^{i\frac{\pi}{3}} & z_7 &= \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5 & & (b \in \mathbb{R}). \\ z_4 &= e^{i\frac{\pi}{2}} & & & & \end{aligned}$$

Correction :

$$z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^5 = (e^{-i\frac{\pi}{2}})^5 = i.$$

z_9 : En multipliant numérateur et dénominateur par $2b - (b^2 - 1)i \neq 0$ ou,

$$z_9 = \frac{1+ib}{2b+(b^2-1)i} = \frac{1+ib}{-i(1+ib)^2} = \frac{1}{b-i} = \frac{b+i}{b^2+1}.$$

Exercice 12 : Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned} z_1 &= -2+2i & z_{10} &= \sqrt{2}+i\sqrt{6} & z_{16} &= i(1+i) & z_{22} &= (1+i\sqrt{3})^6 \\ z_2 &= 1+i & z_{11} &= i\sqrt{3}+1 & z_{17} &= \frac{1-i}{1+i} & z_{23} &= \frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}, \quad \text{où} \\ z_3 &= -3-3i & z_{12} &= -9i & z_{18} &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 & & \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[. \\ z_4 &= \sqrt{3}+i & z_{13} &= 5e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} & z_{19} &= (1+i\sqrt{3})^3 & z_{24} &= \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n \\ z_5 &= 3i & z_{14} &= \frac{e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} & z_{20} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} & z_{25} &= 1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) \\ z_6 &= 3 & z_{15} &= \frac{8e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} & z_{21} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} & z_{26} &= (1+\cos\theta-i\sin\theta)^n \\ z_7 &= -i & & & & & \\ z_8 &= 1-\sqrt{3}i & & & & & \\ z_9 &= \frac{-1+i}{3} & & & & & \end{aligned}$$

Correction :

$$z_{21} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$z_{22} = (1 + i\sqrt{3})^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6.$$

$$z_{23} = \frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi} = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = e^{2i\varphi}.$$

$$\begin{aligned} z_{24} &= \left(\frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 - \sqrt{2} - i}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + 1}{e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n \\ &= \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n = \underbrace{\tan^n\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{3n\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$z_{25} = 1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}} & \text{si } \alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(4k-1)\pi; (4k+1)\pi] \\ 2 \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| e^{i(\frac{\alpha}{2} + \pi)} & \text{si } \alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(4k+1)\pi; (4k+3)\pi] \end{cases}.$$

$$z_{26} = (1 + \cos \theta - i \sin \theta)^n = \begin{cases} 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{n\theta}{2}} & \text{si } \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(4k-1)\pi; (4k+1)\pi] \\ 2^n \left|\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| e^{-i\left(\frac{n\theta}{2} + \pi\right)} & \text{si } \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(4k+1)\pi; (4k+3)\pi] \end{cases}$$

Exercice 13 (Fondamental) : Simplifier $\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ pour $\theta \in]-\pi; \pi[$.

Correction : Pour $\theta \in]-\pi; \pi[$, $e^{i\theta} + 1 \neq 0$. On factorise par l'angle moitié $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler :

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Remarque : On vérifiera que $\frac{\theta}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 14 (*) :

- Déterminer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1 + i \tan(a)}$ avec $a \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
- Quel est l'ensemble des points d'affixe z quand a décrit $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$?
- En déduire une construction simple du point A d'affixe $\frac{1}{1 + i \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

Correction :

- Comme $a \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(a) \neq 0$ et on a :

$$z = \frac{1}{1 + i \tan(a)} = \frac{\cos(a)}{\cos(a) + i \sin(a)} = \cos(a) e^{-ia}.$$

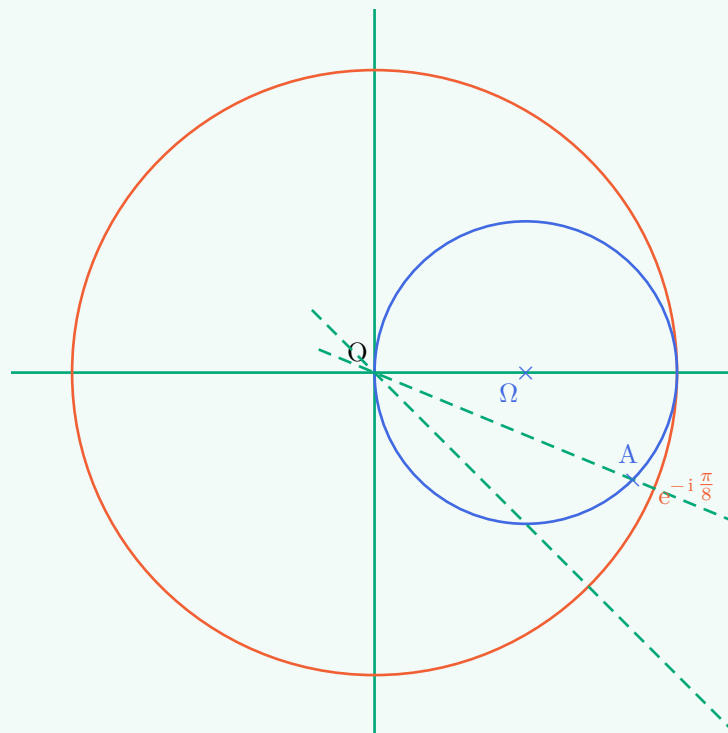
Sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(a) > 0$ d'où $|z| = \cos(a)$ et $\arg(z) = -a$.

2. Il va falloir faire un peu de trigonométrie :

$$\begin{aligned} z &= \cos^2(a) + i \cos(a) \sin(a) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a) + i \sin(2a)) \\ &= \frac{1}{2} e^{2ia} + \frac{1}{2} \\ \text{D'où, } \left| z - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Les points d'affixe z décrivent donc le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega \left(\frac{1}{2} \right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. L'argument de l'affixe du point A qui appartient au cercle $\mathcal{C}$ est $-\frac{\pi}{8}$. On trace donc la bissectrice de la deuxième bissectrice qui coupe le cercle unité en $e^{-\frac{\pi}{8}}$ et le cercle $\mathcal{C}$ en A.



Exercice 15 : Soit $f : x \mapsto (1 + ix)^2$.

Définir les fonctions $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\bar{f}$ et $|f|$.

Exercice 16 : Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^x \cos(x)$

2. $g : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$

3. $h : x \mapsto e^x \sin(\sqrt{3}x)$

Correction :

1. On reconnaît $f = \operatorname{Re}(\varphi)$ où $\varphi(x) = e^{(1+i)x}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n)}(x) = (1 + i)^n \varphi(x) = \sqrt{2^n} e^{i \frac{n\pi}{4}} \varphi(x)$.

Par linéarité de la dérivation et de la partie réelle, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \operatorname{Re}(\varphi^{(n)}(x)) = \sqrt{2^n} \operatorname{Re}\left(e^{x+(x+\frac{n\pi}{4})i}\right) = \sqrt{2^n} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) e^x.$$

2. Le raisonnement est identique : $g = \operatorname{Im}(\phi)$ où $\phi(x) = e^{(-1+i)x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{(n)}(x) = (-1 + i)^n \varphi(x) = \sqrt{2^n} e^{i \frac{3n\pi}{4}} \varphi(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = \operatorname{Im}(\phi^{(n)}(x)) = \sqrt{2^n} \operatorname{Im}\left(e^{-x+(x+\frac{3n\pi}{4})i}\right) = \sqrt{2^n} \sin\left(x + \frac{3n\pi}{4}\right) e^{-x}.$$

3. $h = \operatorname{Im}(\psi)$ où $\psi(x) = e^x e^{i\sqrt{3}x} = e^{(1+i\sqrt{3})x}$ avec $\psi^{(n)}(x) = (1 + i\sqrt{3})^n \psi(x) = 2^n e^{i \frac{n\pi}{3}} \psi(x)$.

$$\text{Donc } h^{(n)}(x) = 2^n e^x \sin\left(x\sqrt{3} + n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 17 : Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i.e. un complexe non réel.

Pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, montrer que

$$a + b\alpha = a' + b'\alpha \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

Correction : $a + b\alpha = a' + b'\alpha \iff a - a' = (b' - b)\alpha$.

Si $b' = b$ alors $a' = a$ et le résultat est démontré.

Sinon $b' \neq b \implies \alpha = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$ ce qui contredit la définition de α .

La réciproque étant évidente, on a le résultat pour tout α non réel.

C'est exactement le même raisonnement dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ par exemple i.e. avec les éléments de la forme $a + b\sqrt{2}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$.

Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$, on démontrerait de même que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \iff a = a' \text{ et } b = b'$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

II/ Trigonométrie

Exercice 18 : Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$ puis en déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Si $n = 0$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta = 2\pi$. Sinon,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta = \left[\frac{1}{in} e^{in\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{in} (-1 + 1) = 0.$$

Par linéarité de la partie réelle et de l'intégrale, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(e^{in\theta}) d\theta = \operatorname{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta\right) = 0.$$

Exercice 19 : En utilisant les formules d'Euler, établir les identités suivantes :

$$1. \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$3. \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}$$

$$2. \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$4. \cos^3(\theta) = \frac{3\cos(\theta) + \cos 3\theta}{4}$$

Exercice 20 : À l'aide des formules de Moivre :

1. Linéariser $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

3. Linéariser $\cos^3(2\theta) \sin^4(\theta)$.

2. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$.

Exercice 21 :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique.

2. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^3 x$ et $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$.

3. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction $x \mapsto e^{-x} \cos(3x)$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 22 :

1. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire $\int_0^{\pi} \sin^5(x) dx$.

2. Proposer une méthode plus efficace pour le calcul de $\int_0^{\pi} \sin^5(x) dx$.

Aide : Poser $u = \cos(x)$

Correction :

1. Les formules d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sin^5(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} (e^{5x} - e^{-5x} - 5e^{-3x} + 5e^{3x} + 10e^x - 10e^{-x}) \\ &= \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin(x). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^\pi \sin^5(x) dx = \left[-\frac{1}{80} \cos(5x) + \frac{5}{48} \cos(3x) - \frac{5}{8} \cos(x) \right]_0^\pi = \frac{16}{15}.$$

2. Posons $u = \cos(x)$ alors $du = -\sin(x) dx$. Lorsque x parcourt l'intervalle $[0; \pi]$, u parcourt $[-1; 1]$ dans le sens rétrograde par décroissance de $\cos$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \int_0^\pi \sin^5(x) dx &= \int_0^\pi \sin^4(x) \sin(x) dx = - \int_0^\pi (1 - \cos^2(x))^2 (-\sin(x) dx) \\ &= \int_{-1}^1 (1 - u^2)^2 du = \int_{-1}^1 1 - 2u^2 + u^4 du \\ &= \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_{-1}^1 = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Exercice 23 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi; \pi]$:

1. $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$	3. $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0$
2. $\cos(2x) - 2 \cos(x) = -\frac{3}{2}$	4. $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$
	5. $2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 2 \leq 0$

Correction :

- $\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \dots$
- $\cos(2x) - 2 \cos(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2(x) - 1 - 2 \cos(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4 \cos^2(x) - 4 \cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \dots$
- $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dots$
- $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dots$
- $2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 2 \leq 0$

Exercice 24 : On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

2. En utilisant la valeur $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3. Démontrer que $\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2$ et que $\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Correction :

1. On développe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 1 - z^5$.

Il ne reste plus qu'à diviser pour $z \neq 1$.

2. Comme $z_0^5 = e^{it \frac{10\pi}{5}} = 1$, la formule précédente nous donne :

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$

En simplifiant par $z_0^2 \neq 0$,

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3. Il suffit de développer le membre de droite :

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2 = z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} + 2 \Leftrightarrow \left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2.$$

De plus, $\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) = e^{i \frac{2\pi}{5}} + e^{i \frac{-2\pi}{5}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'après les formules d'Euler.

4. D'après les questions précédentes, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$ dont les racines sont

$$\phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\varphi = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ et on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Remarque : On en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0$ avec la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 25 : Montrer que $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

Correction :

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^4 \left(e^{i \frac{\pi}{11}} \right)^{2k+1} \right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 \left(e^{i \frac{\pi}{11}} \right)^{2k+1} &= e^{i \frac{\pi}{11}} \sum_{k=0}^4 \left(e^{i \frac{2\pi}{11}} \right)^k \\ &= e^{i \frac{\pi}{11}} \frac{1 - e^{i \frac{10\pi}{11}}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{11}}} \\ &= e^{i \frac{5\pi}{11}} \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} &= \frac{\cos \left(\frac{5\pi}{11}\right) \sin \left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{11}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{10\pi}{11}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{11}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{11}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{11}\right)} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 26 : Calculer les sommes suivantes :

1. $A_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta).$

2. $B_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$

Correction :

1. et 2. Pour θ congru à 0 modulo 2π , on a $A_n(\bar{0}) = n+1$ et $B_n(\bar{0}) = 0$. On considère dorénavant $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$.

Sommes classiques de chez classiques à savoir faire absolument. Je vous propose trois méthodes de la plus naturelle à la plus jolie :

Avec une suite géométrique : Par linéarité, $A_n(\theta) + iB_n(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ki\theta}.$

Or,

$$\sum_{k=0}^n e^{ki\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

On factorise numérateur et dénominateur par leur angle moitié,

$$\begin{aligned}&= e^{ni\frac{\theta}{2}} \frac{e^{-(n+1)i\frac{\theta}{2}} - e^{(n+1)i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{ni\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \left(\cos \left(n\frac{\theta}{2}\right) + i \sin \left(n\frac{\theta}{2}\right) \right) \frac{\sin \left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire :

$$A_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\cos \left(n\frac{\theta}{2}\right) \sin \left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad B_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin \left(n\frac{\theta}{2}\right) \sin \left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En connaissant un peu le résultat :

$$2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n 2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(k\theta)$$

Or, $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b),$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \theta \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \theta \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \theta \right) - \sin \left(\left((k-1) + \frac{1}{2}\right) \theta \right) \right) \\ &= \sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

Pour retrouver la même formule, on utilise $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,

$$= 2 \sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{Avec } \frac{\theta}{2} \neq \frac{\pi}{2}, \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Le raisonnement est identique pour $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

La plus jolie avec une somme télescopique :

$$(e^{i\theta} - 1) \sum_{k=0}^n e^{ki\theta} = e^{i(n+1)\theta} - 1$$

$$\text{Avec } \theta \neq 0 \pmod{2\pi}, \sum_{k=0}^n e^{ki\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \dots$$

Exercice 27 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $D_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $E_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

Correction :

1. Données ensemble, les deux expressions sont à traiter ensemble :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \right) + i \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) \right) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \\ &= (1 + e^{i\theta})^n = (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})^n e^{in\frac{\theta}{2}} \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

2. Easy d'en déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}^n \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 28 :

1. Calculer de deux manières $(1+i)^n + (1-i)^n$.
2. En déduire $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots$ et $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots$

Correction :

1. D'une part,

$$\begin{aligned}(1+i)^n + (1-i)^n &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\ &= (\sqrt{2})^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, avec le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}(1+i)^n + (1-i)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+(-1)^k) i^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k.\end{aligned}$$

2. En identifiant, on obtient :

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Pour calculer la deuxième somme, il nous faudra calculer $(1+i)^n - (1-i)^n$ de deux manières. Le raisonnement est identique et l'on trouve :

$$(1+i)^n - (1-i)^n = i (\sqrt{2})^{n+2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Puis,

$$(1+i)^n - (1-i)^n = 2i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

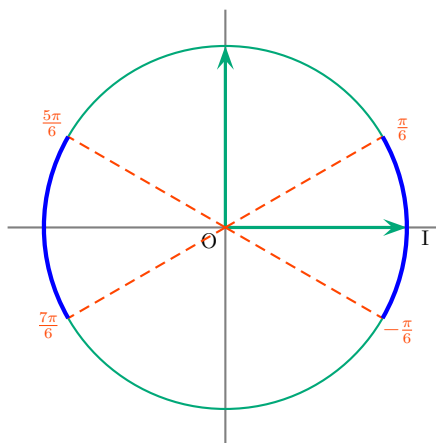
Enfin,

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Fonctions circulaires - Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(2x) \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi.$$



2. Après avoir donné le domaine de définition, exprimer $G = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

G est défini si, et seulement si $1 + \sin(x) \neq 0 \iff x \not\equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

De même, u est défini si, et seulement si $x \not\equiv \pi [2\pi]$.

On travaillera donc avec $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \right[\cup \left] \pi + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \right)$.

$$\text{On a alors } G = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t}.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$.

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 &= 0 \iff (\sin(x) - 1)(\sin(x) + 3) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 1 \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]. \end{aligned}$$

4. Donner le domaine de définition puis simplifier l'expression $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.

$$\forall x \in [-1; 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Comme } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ alors } \forall x \in]-1; 1[\Rightarrow \arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathcal{D}_{\tan} \text{ et } \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Donner la partie imaginaire de $\frac{1}{2+3i}$.

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13} \text{ donc } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2+3i}\right) = -\frac{3}{13}.$$

6. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall z \neq -i, \frac{z-2}{z+i} = \frac{x-2+iy}{x+(y+1)i} = \frac{((x-2)+iy)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)i}{x^2+(y+1)^2}.$$

D'où,

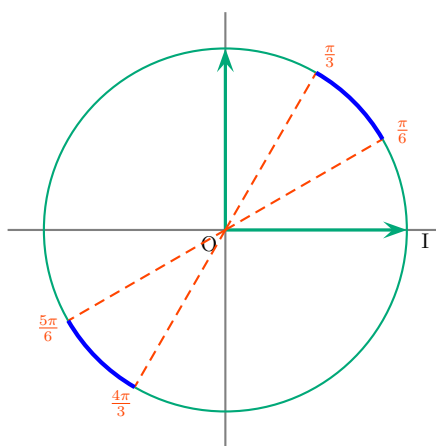
$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R} &\iff (2-x)(y+1)+xy=0 \\ &\iff 2-x+2y=0 \\ &\iff x-2y-2=0. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x-2y-2=0$ privé du point $(0; -1)$.

Fonctions circulaires - Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sin(2x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(2x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi.$$



2. Après avoir donné le domaine de définition, exprimer $D = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

G est défini si, et seulement si $1 + \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi [2\pi]$.

De même, u est défini si, et seulement si $x \neq \pi [2\pi]$.

On travaillera donc avec $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi[$.

$$\text{On a alors } D = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = t.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$.

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0 &\Leftrightarrow (\cos(x) - 1)(\cos(x) + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0 [2\pi]. \end{aligned}$$

4. Donner le domaine de définition puis simplifier l'expression $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.

$$\forall x \in [-1; 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\forall x \in [-1; 0[\cup]0; 1] \implies \arccos(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \subset \mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

5. Donner la partie réelle de $\frac{1}{4-3i}$.

$$\frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{25} \text{ donc } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{4-3i}\right) = \frac{4}{25}.$$

6. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z-2}{z+i} \in i\mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall z \neq -i, \frac{z-2}{z+i} = \frac{x-2+iy}{x+(y+1)i} = \frac{((x-2)+iy)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)i}{x^2+(y+1)^2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+i} \in i\mathbb{R} &\iff x(x-2)+y(y+1)=0 \\ &\iff x^2-2x+y^2+y=0 \\ &\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0; -1)$.

Remédiation - Nombres complexes

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \arcsin^3(x)$.

Justifier la dérivabilité de g sur un intervalle à préciser puis calculer $g'(x)$ sur celui-ci.

Les fonctions $u \mapsto \arcsin(u)$ et $u \mapsto u^3$ sont respectivement dérivables sur $] -1; 1[$ et $\mathbb{R}$ donc g , composée de ces dernières, l'est également sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, g'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^2(x).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $13z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.

$$z_{12} = \frac{\sqrt{3} \pm 7i}{26}.$$

4. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie

$$|z - 1 + i| = |z + 2|.$$

$$|z - 1 + i|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ et } |z + 2|^2 = (x + 2)^2 + y^2 \text{ donc}$$

$$|z - 1 + i| = |z + 2| \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2$$

$$\iff -2x + 2y + 2 = 2x + 4$$

$$\iff 2x - y + 1 = 0.$$

C'est la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Remédiation - Nombres complexes

1. Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \arccos^3(x)$.

Justifier la dérivabilité de g sur un intervalle à préciser puis calculer $g'(x)$ sur celui-ci.

Les fonctions $u \mapsto \arccos(u)$ et $u \mapsto u^3$ sont respectivement dérivables sur $] -1 ; 1[$ et $\mathbb{R}$ donc g , composée de ces dernières, l'est également sur $] -1 ; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1 ; 1[, \quad g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \arccos^2(x).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $11z^2 - z\sqrt{8} + 1 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm 3i}{11}.$$

4. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'afixe vérifie

$$|z - 1 + i| = 2.$$

$$|z - 1 + i|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ donc}$$

$$|z - 1 + i| = 2 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

C'est le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2.

Nombres complexes et trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$, calculer $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2. En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right).$$

3. En remarquant que $\frac{7}{4} = 2 \times \frac{7}{8}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$$\text{D'où, } \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Comme $\frac{7\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

4. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

$$z = 2 + \sqrt{3} + i = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = \underbrace{4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5. Donner la forme exponentielle de $z = -2 \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) + i \left(\sqrt{6} - \sqrt{2} \right)$.

C'était cadeau !

$$z = 4 e^{i \frac{11\pi}{12}}.$$

6. Soit $z_G = e^{1+i \frac{\pi}{3}}$. Donner $\operatorname{Re}(z_G)$, $\operatorname{Im}(z_G)$, $\arg(z_G)$ et $|z_G|$.

$$- \operatorname{Re}(z_G) = \frac{e}{2}$$

$$- \arg(z_G) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$- \operatorname{Im}(z_G) = \frac{e\sqrt{3}}{2}$$

$$- |z_G| = e$$

7. Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.

$$z = \ln(2) + i \frac{\pi}{6} [2i\pi].$$

8. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de $f : t \mapsto e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et on a :

$$\forall t \in] -1 ; 1[, f'(t) = \frac{-1 + i}{\sqrt{1 - t^2}} e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}.$$

Nombres complexes et trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2. En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{7\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right).$$

3. En remarquant que $\frac{11\pi}{6} = 2 \times \frac{11\pi}{12}$, calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$$\text{D'où, } \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right).$$

4. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

$$z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = 4 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

5. Donner la forme exponentielle de $z = -2 \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) + i \left(\sqrt{6} + \sqrt{2} \right)$.

C'était cadeau !

$$z = 4 e^{i \frac{7\pi}{12}}.$$

6. Soit $z_D = e^{1+i \frac{\pi}{6}}$. Donner $\operatorname{Re}(z_D)$, $\operatorname{Im}(z_D)$, $\arg(z_D)$ et $|z_D|$.

$$- \operatorname{Re}(z_D) = \frac{e\sqrt{3}}{2}$$

$$- \arg(z_D) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$- \operatorname{Im}(z_D) = \frac{e}{2}$$

$$- |z_D| = e$$

7. Résoudre $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

$$z = \ln(2) + i \frac{\pi}{3} [2i\pi].$$

8. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de $f : t \mapsto e^{\arctan(t) + i t}$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2} + i \right) e^{\arctan(t) + i t}.$$

Nombres complexes et intégration

1. Donner la forme algébrique de $\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i}\right)^6$

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i}\right)^6 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $13z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.

$$z_{12} = \frac{\sqrt{3} \pm 7i}{26}.$$

3. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'abbre vérifie

$$|z - 1 + i| = 2.$$

$$|z - 1 + i|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ donc}$$

$$|z - 1 + i| = 2 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

C'est le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2.

4. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \neq -i, \frac{z-2}{z+i} &= \frac{x-2+iy}{x+(y+1)i} = \frac{((x-2)+iy)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)i}{x^2+(y+1)^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R} &\iff (2-x)(y+1)+xy=0 \\ &\iff 2-x+2y=0 \\ &\iff x-2y-2=0. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x - 2y - 2 = 0$ privé du point $(0; -1)$.

5. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

$$z = 2 + \sqrt{3} + i = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \underbrace{4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

6. Résoudre $e^z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

$$z = \frac{3}{2} \ln(2) + i \frac{\pi}{6} [2i\pi].$$

7. Donner le domaine de primitivabilité et une primitive F de $f : t \mapsto \frac{-1+i}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)+i \arcsin(t)}$.

D'après les théorèmes sur les composées et produits de fonctions continues, f est continue sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall t \in I \subset] -1; 1[, F(t) = e^{\arccos(t)+i \arcsin(t)}.$$

8. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+it} dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-it}{t^2+1} dt \left[\arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) i \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \right) i.$$

9. À l'aide d'une IPP, calculer $\int_0^1 t \ln(t) dt$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et $]0; 1]$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \ln(t) dt &= \underbrace{\left[\frac{1}{2} t^2 \ln(t) \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 \times \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nombres complexes et intégration

1. Donner la forme algébrique de $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right)^{12}$

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i}\right)^{12} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = e^{i\pi} = -1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $11z^2 - z\sqrt{8} + 1 = 0$.

$$z_{12} = \frac{\sqrt{2} \pm 3i}{11}.$$

3. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'abbre vérifie

$$|z - 1 + i| = |z + 2|.$$

$$|z - 1 + i|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ et } |z + 2|^2 = (x + 2)^2 + y^2 \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| = |z + 2| &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow -2x + 2y + 2 = 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow 3x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

C'est la droite d'équation $3x - y + 1 = 0$.

4. En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z - 2}{z + i} \in i\mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -i$.

Ensuite, en posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall z \neq -i, \frac{z - 2}{z + i} &= \frac{x - 2 + iy}{x + (y + 1)i} = \frac{((x - 2) + iy)(x - (y + 1)i)}{x^2 + (y + 1)^2} \\ &= \frac{x(x - 2) + y(y + 1) + ((2 - x)(y + 1) + xy)i}{x^2 + (y + 1)^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z - 2}{z + i} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow x(x - 2) + y(y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

En vérifiant que $-i = (0; -1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0; -1)$.

5. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

$$z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \underbrace{4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

6. Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

$$z = \ln(2\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{4} [2i\pi].$$

7. Donner le domaine de primitivabilité et une primitive F de $f : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^2} + i \right) e^{\arctan(t)+it}$.

D'après les théorèmes sur les composées et produits de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in I \subset \mathbb{R}, F(t) = e^{\arctan(t)+it}.$$

8. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t+i} dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t+i} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t-i}{t^2+1} dt \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) - i \arctan(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right) - i.$$

9. À l'aide d'une IPP, calculer $\int_0^1 t e^t dt$.

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t e^t dt &= [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= e - [e^t]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Un peu de trigonométrie circulaire

Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité puis de calculer la dérivée de

$$h: x \mapsto \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$$

1. Préliminaires.

Résoudre les inéquations $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

2. Soit $f: x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(a) Quel est le domaine de définition de f ? On le notera $\mathcal{D}_f$.

(b) Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.

(c) Démontrer soigneusement que f est dérivable sur $] -1; 1[$ puis calculer sa dérivée.

(d) En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}_f$.

(e) Étudier la dérivabilité de f en -1 (*via* un taux d'accroissement). Qu'en déduit-on graphiquement?

(f) Tracer le plus soigneusement possible la courbe représentative de f sur $\mathcal{D}_f$.

3. Étude de la fonction h

(a) Exprimer h en fonction de f .

(b) En déduire le domaine de définition de h , que l'on notera $\mathcal{D}_h$.

(c) On décide d'étudier h sur $\left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Expliquer pourquoi cela suffit et comment on obtiendra toute la courbe sur $\mathcal{D}_h$.

(d) Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} h(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2} \\ x > -\frac{3\pi}{2}}} h(x)$.

(e) Démontrer que h est dérivable sur $\left] -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Calculer alors h' .

(f) Que dire de la dérivabilité de h en $-\frac{\pi}{2}$?

(g) Dresser le tableau de variation complet de h sur $\left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

(h) Tracer le plus soigneusement possible la courbe représentative de h sur $\left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right[$.

Un peu de trigonométrie circulaire

Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité puis de calculer la dérivée de $h: x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$.

1. Préliminaires.

Soit $x \neq 1$. On a :

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \iff x \in [-1; 1[\quad \text{et} \quad \frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1; 1[.$$

2. (a) Soit $x \neq 1$. Alors $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ i.e. $x \in [-1; 1[$ d'après la question précédente.

Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = [-1; 1[$.

- (b) Comme $\lim_{x \rightarrow 1} 1+x = 2 > 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 1-x = 0^+$, d'après les théorèmes sur les quotients et les composées de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty$.

La courbe de f admet donc une asymptote d'équation $x = 1$.

Commentaires : Ne pensez pas que vous demander systématiquement une interprétation graphique est une lubie de prof de maths. Ça vous permet surtout de donner du sens à ce que vous faites et montrer au correcteur que vous n'êtes pas là pour ne faire que des calculs.

- (c) La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et à valeurs strictement positives si, et seulement si $x \in]-1; 1[$.

Par composition avec la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Commentaires : Il est tout à fait inutile de simplifier la dérivée plus avant sachant qu'on a ici clairement le signe de celle-ci.

- (d) D'après la question précédente, $\forall x \in]-1; 1[, f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	-1	1
$f'(x)$		+
f	0	$+\infty$

- (e) Soit $x \in]-1; 1[$. Calculons le taux d'accroissement de f en -1 :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{1-x}}.$$

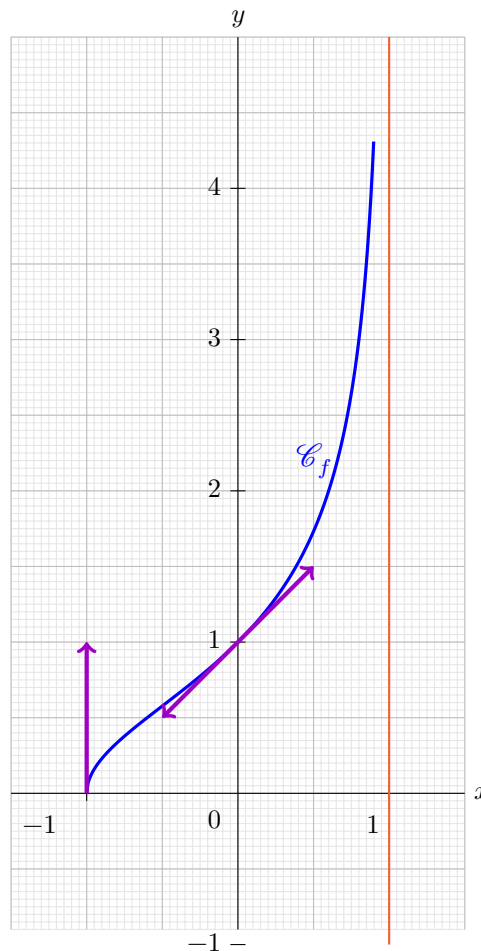
Or, $\sqrt{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1_+} 0_+$ et $\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -1_+} \sqrt{2}$ donc par produit puis passage à l'inverse, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty.$$

Ceci montre que f n'est pas dérivable en -1 et que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse -1 .

Commentaires : *Même remarque que précédemment et que ça devienne un automatisme pour vous : une limite pas « normale », quelle interprétation j'en fais ?*

- (f) Au point d'abscisse -1 , la courbe présente une tangente verticale. On s'aide aussi de $f(0) = 1$ avec $f'(0) = 1$ qui donne la pente de la tangente en 0 .



3. (a) Par définition de h , on remarque que $h = f \circ \sin$.
 (b) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 h(x) \text{ existe} &\iff f(\sin(x)) \text{ existe} \\
 &\iff \sin(x) \in \mathcal{D}_f \\
 &\iff -1 \leq \sin(x) < 1 \\
 &\iff \sin(x) \neq 1 \\
 &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \right[$.

- (c) Le domaine $\mathcal{D}_h$ est stable par les translations $x \mapsto x \pm 2\pi$, et si $x \in \mathcal{D}_h$, par 2π périodicité de $\sin$, $h(x + 2\pi) = h(x)$.

Ainsi, h est 2π -périodique, donc il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π inclus dans $\mathcal{D}_h$: l'intervalle $\left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ convient.

Toute la courbe s'obtiendra par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

- (d) Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin(x) = 1^-$, d'après la partie 1 et les théorèmes sur les limites de composées, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} h(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u < 1}} f(u) = +\infty.$$

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3\pi}{2} \\ x > \frac{3\pi}{2}}} \sin(x) = 1^-$ entraîne aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3\pi}{2} \\ x > \frac{3\pi}{2}}} h(x) = +\infty$.

La courbe de h admet donc des asymptotes d'équation $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Commentaires : La connaissance de la limite ne $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures vous donne, par 2π -périodicité, celle en $-\frac{3}{2}$ par valeurs inférieures mais pour obtenir celle par valeurs supérieures, c'est la symétrie d'axe $x = -\frac{\pi}{2}$ qu'il faudrait invoquer (et démontrer).

- (e) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans $] -1; 1[$ qui est le domaine de dérivabilité de f .

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $h = f \circ \sin$ est dérivable sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, h'(x) &= \sin'(x) f'(\sin(x)) \\ &= \cos(x) \frac{1}{(1 - \sin(x))^2} \sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}} \\ &= \frac{\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} \sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}}. \end{aligned}$$

- (f) Comme pour f en -1 , regardons le taux d'accroissement de h en $-\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \tau_{h, -\frac{\pi}{2}}(k) &= \frac{h\left(-\frac{\pi}{2} + k\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{k} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\right)}{1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\right)}}}{k} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos(k)}{1 + \cos(k)}}}{k} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{k}{2}\right)}}}{k} = \frac{\sqrt{\tan^2\left(\frac{k}{2}\right)}}{k} \end{aligned}$$

Alors, suivant le signe de k on a :

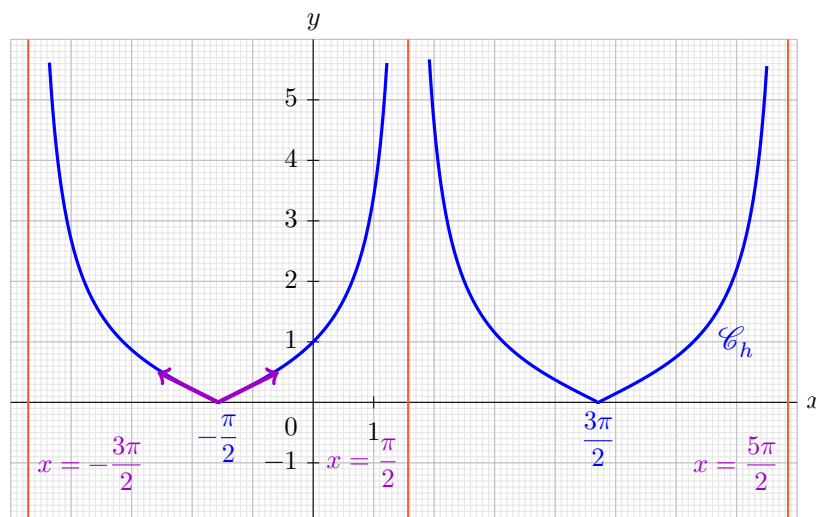
- Si $k > 0$ alors $\tau_{h, -\frac{\pi}{2}}(k) = \frac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{k} = \frac{1}{2} \frac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{\frac{k}{2}} \xrightarrow[k > 0]{k \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.
- Si $k < 0$ alors $\tau_{h, -\frac{\pi}{2}}(k) = \frac{-\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{k} = -\frac{1}{2} \frac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{\frac{k}{2}} \xrightarrow[k > 0]{k \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.

La fonction h n'est donc pas dérivable en $-\frac{\pi}{2}$ mais sa courbe y admet deux demi-tangentes de pente $\pm \frac{1}{2}$.

- (g) $\forall x \in \left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$. On en déduit le tableau de variation de h :

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		-	+
h	$+\infty$	0	$+\infty$

(h)



Commentaires : En regardant bien l'expression de f , on aurait aussi pu se dire qu'on était à deux doigts de pouvoir utiliser nos formules trigonométriques.

On pose alors $ct : x \mapsto h\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
 1. \text{ ct est définie sur le translaté de } \mathcal{D}_h \text{ de vecteur } -\frac{\pi}{2}\vec{i} \text{ soit } \mathcal{D}_{ct} &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\\
 &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]0 + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[\\
 &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([-\pi + 2k\pi; 2k\pi[\cup]2k\pi; \pi + 2k\pi] \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Sur } \mathcal{D}_{ct}, g(x) = h\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}} \\
 &= \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{|\tan\left(\frac{x}{2}\right)|}.
 \end{aligned}$$

3. Fonction paire et 2π -périodique sur un ensemble symétrique par rapport à l'origine et invariant par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ que l'on pourra étudier sur $]0; \pi[$ et compléter la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées puis translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Sur $]0; \pi[$, on aura d'ailleurs $ct(x) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ dont l'étude est facile : continuité, stricte décroissance par composition, asymptote en 0, prolongement par continuité en π , dérivabilité, demi-tangente en π .

4. La courbe de h sera alors obtenue à partir de celle de ct par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

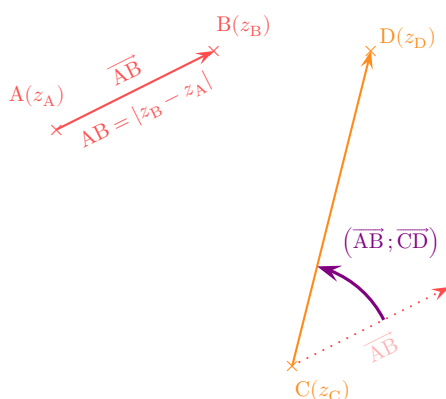
Un peu de géométrie

Dans tout ce devoir, on admettra le résultat suivant que l'on démontrera dans un chapitre ultérieur.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A , z_B , z_C et z_D .

Alors :

$$AB = \|\overline{AB}\| = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 2$ et le cercle Γ de centre O passant par A.

On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ puis on note B le point d'affixe $z_B = \alpha$ et C celui d'affixe $z_C = \bar{\alpha}$.

1. Donner la forme exponentielle de α .
2. Faire une figure **à la règle non graduée et au compas** que l'on complètera tout au long de l'exercice.

La feuille sera absolument blanche et sans carreaux. L'utilisation du rapporteur et de l'équerre est absolument interdite comme mesurer.

Prenez une échelle assez grande i.e. environ 2 phalanges pour la distance OA.

3. Montrer que $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$. Compléter la figure.
4. Dans la suite, θ désigne un réel quelconque dans $]-\pi; \pi]$.

On note D le point d'affixe $z_D = 2 e^{i\theta}$ puis on définit le point E (dont on notera l'affixe z_E) appartenant à Γ tel que $(\overline{OD}, \overline{OE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

- (a) Où se situe le point D ? Quelle est la nature du triangle ODE ?

Placer D et E sur la figure en justifiant les traits de construction.

- (b) En calculant son module et son argument, déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_E}{z_D}$.
- (c) En déduire que $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

5. On note F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

- (a) Montrer que F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et G pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

- (b) Vérifier que $\bar{\alpha} - 4 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 4)$.
- (c) En déduire que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$.
- (d) Montrer que le triangle AFG est équilatéral direct.

Compléter la figure avec tous les éléments précédents.

6. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur AF est minimale.

(a) Établir l'égalité $AF^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.

(b) Soit $f :]-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta \mapsto 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta).$$

Exprimer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ sous une forme **factorisée**.

(c) En déduire le tableau de variation de f sur $]-\pi; \pi]$.

(d) Conclure et placer le point D_{min} ainsi trouvé sur la figure.

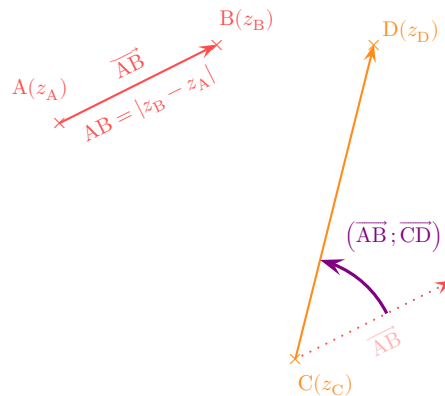
Un peu de géométrie

Dans tout ce devoir, on admettra le résultat suivant que l'on démontrera dans un chapitre ultérieur.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A , z_B , z_C et z_D .

Alors :

$$AB = \|\overline{AB}\| = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 2$ et le cercle Γ de centre O passant par A.

On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ puis on note B le point d'affixe $z_B = \alpha$ et C celui d'affixe $z_C = \bar{\alpha}$.

- Donner la forme exponentielle de α .

Correction : $\alpha = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

- Faire une figure à la règle non graduée et au compas que l'on complétera tout au long de l'exercice.

La feuille sera absolument blanche et sans carreaux. L'utilisation du rapporteur et de l'équerre est absolument interdite comme mesurer.

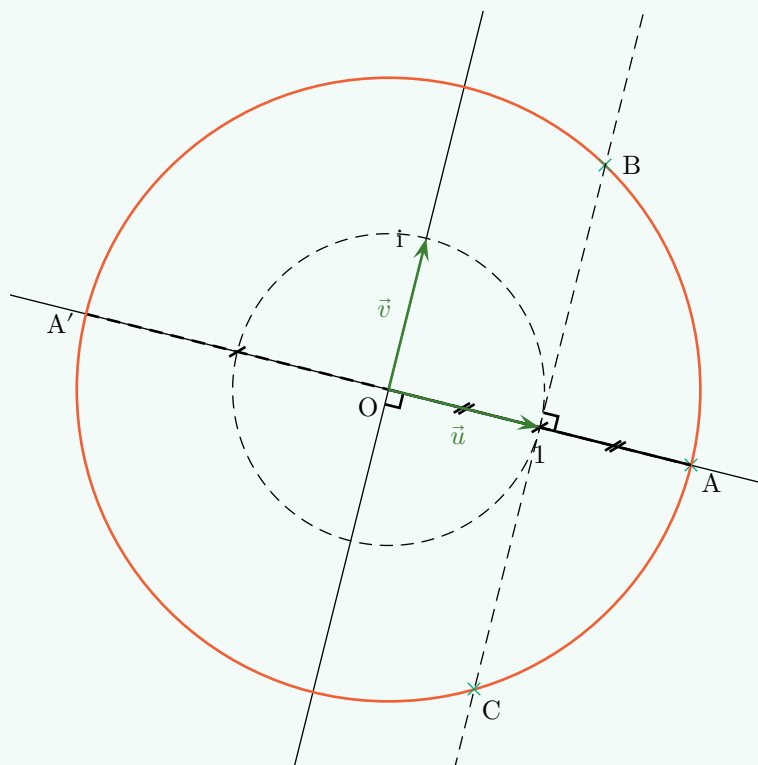
Prenez une échelle assez grande i.e. environ 2 phalanges pour la distance OA.

Correction : On construit la figure à la règle et au compas seuls :

- Soient deux points distincts O et A.
- Le symétrique A' de A par rapport à O permet de tracer l'axe des réels (AA').
- La médiatrice de [OA] intersecte (AA') en U(1) qui sera l'unité sur les abscisses.
- Le cercle de centre O et de rayon OU intersecte la médiatrice de [AA'] en V(i) de telle manière que $(\overline{OU}, \overline{OV}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est ainsi construit.

(v) La médiatrice de $[OA]$ intersecte aussi le cercle Γ en $B(\alpha)$ et $C(\bar{\alpha})$.



3. Montrer que $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$. Compléter la figure.

Correction : On a $OB = |z_B| = |\alpha| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ donc $B \in \Gamma$.

De même, $OC = |z_C| = |\bar{\alpha}| = |\alpha| = 2$ donc $C \in \Gamma$.

4. Dans la suite, θ désigne un réel quelconque dans $]-\pi; \pi]$.

On note D le point d'affixe $z_D = 2 e^{i\theta}$ puis on définit le point E (dont on notera l'affixe z_E) appartenant à Γ tel que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

(a) Où se situe le point D ? Quelle est la nature du triangle ODE ?

Placer D et E sur la figure en justifiant les traits de construction.

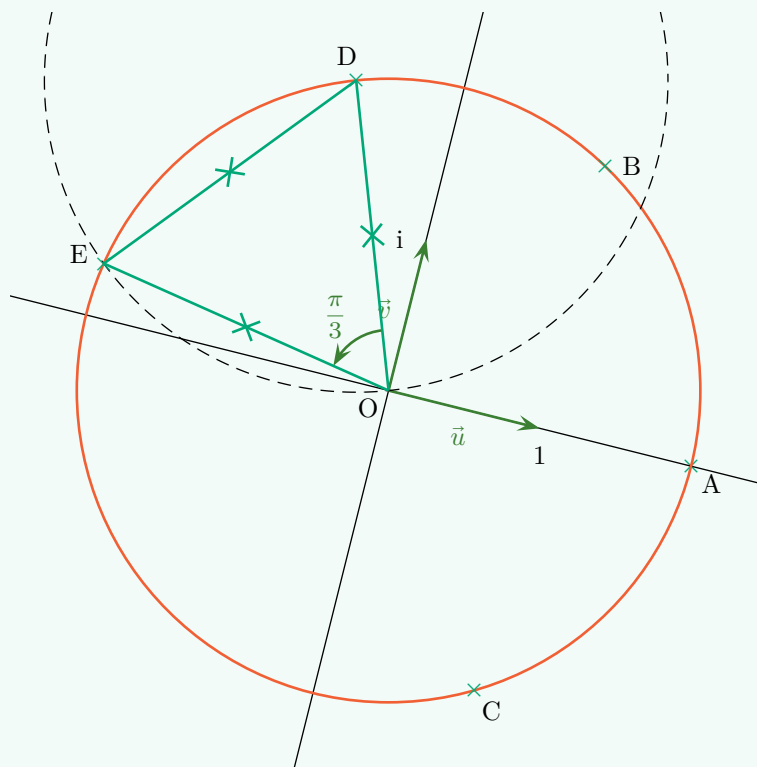
Correction : Comme $OD = |z_D| = |2 e^{i\theta}| = 2$, on en déduit que $D \in \Gamma$.

Comme $OD = OE$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, le triangle ODE est équilatéral direct. Le cercle de centre E et de rayon OD intersecte Γ en deux points tels que les triangles formés soient équilatéraux. On choisit pour E celui qui le rend équilatéral direct.

Sur la figure précédente :

(v) $D(2e^{i\theta})$ un point quelconque de Γ .

- (vi) Le cercle de centre E et de rayon EO intersecte Γ en deux points. On choisit E tel que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.



- (b) En calculant son module et son argument, déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_E}{z_D}$.

Correction : On a $\left| \frac{z_E}{z_D} \right| = \frac{|z_E|}{|z_D|} = \frac{OE}{OD} = 1$.

De plus, $\arg \left(\frac{z_E}{z_D} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_E - z_O}{z_D - z_O} \right) [2\pi] \equiv (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Finalement, $\frac{z_E}{z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- (c) En déduire que $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

Correction : D'après la question précédente :

$$\frac{z_E}{z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff z_E = z_D e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}.$$

5. On note F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

- (a) Montrer que F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et G pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

Correction : Comme F est le milieu de [BD], on a :

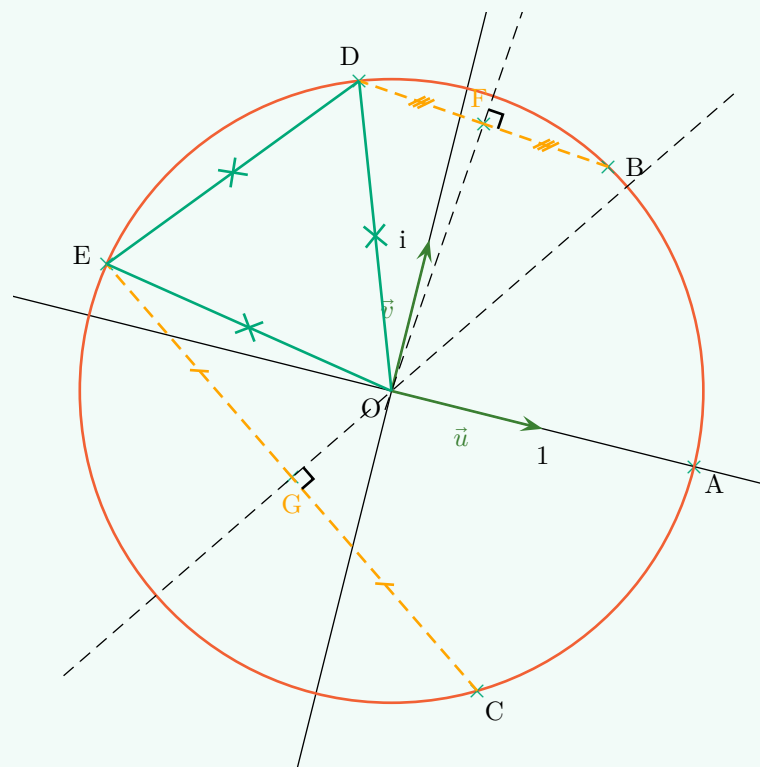
$$z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.$$

De même,

$$z_G = \frac{z_C + z_E}{2} = \frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2}.$$

Sur la figure précédente :

- (vii) La médiatrice de [BD] intersecte (BD) en F.
- (viii) La médiatrice de [CE] intersecte (CE) en G.



- (b) Vérifier que $\bar{\alpha} - 4 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 4)$.

Correction : Il suffit de calculer et comparer :

$$\bar{\alpha} - 4 = 1 - i\sqrt{3} - 4 = -3 - i\sqrt{3}$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 4) &= \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} - 3) \\ &= \frac{1}{2}(-6 - 2i\sqrt{3}) = -3 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Finalement et sans surprises, $\bar{\alpha} - 4 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 4)$.

- (c) En déduire que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$.

Correction : On a :

$$\begin{aligned}\frac{z_G - 2}{z_F - 2} &= \frac{\frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2} - 2}{\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \frac{\frac{1}{2}\alpha(\alpha - 4) + \alpha e^{i\theta}}{\alpha - 4 + 2e^{i\theta}} \quad (\text{question précédente}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha \frac{\alpha - 4 + 2e^{i\theta}}{\alpha - 4 + 2e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

(d) Montrer que le triangle AFG est équilatéral direct.

Compléter la figure avec tous les éléments précédents.

Correction : D'après ce qui précède,

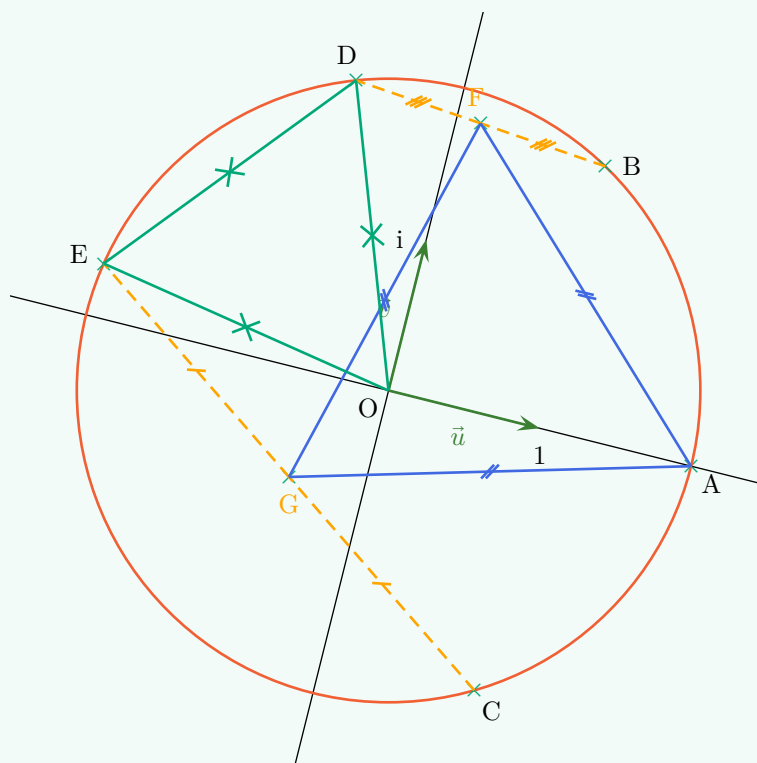
$$\frac{AG}{AF} = \left| \frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} \right| = \left| \frac{z_G - 2}{z_F - 2} \right| = \left| \frac{1}{2}\alpha \right| = \frac{1}{2}|\alpha| = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Donc $AG = AF$ et le triangle AFG est isocèle en A.

En outre,

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}) \equiv \arg \left(\frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} \right) \equiv \arg \left(\frac{1}{2}\alpha \right) \equiv \arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Le triangle AFG est donc équilatéral direct.



6. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur AF est minimale.

(a) Établir l'égalité $AF^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.

Correction : Peu de finesse, on développe et calcule sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
 AF^2 &= |z_F - z_A|^2 = \left| \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2 \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\theta) + i \sin(\theta) - 2 \right|^2 \\
 &= \left| \cos(\theta) - \frac{3}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta) \right) \right|^2 \\
 &= \left(\cos(\theta) - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta) \right)^2 \\
 &= \cos^2 \theta - 3 \cos(\theta) + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{3} \sin(\theta) + \sin^2 \theta \\
 &= 4 - 3 \cos(\theta) + \sqrt{3} \sin(\theta).
 \end{aligned}$$

(b) Soit $f :]-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta \mapsto 4 - 3 \cos(\theta) + \sqrt{3} \sin(\theta).$$

Exprimer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ sous une forme **factorisée**.

Correction : La fonction f est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) &= 3 \sin(\theta) + \sqrt{3} \cos(\theta) \\
 &= 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) \right) \\
 &= 2\sqrt{3} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right).
 \end{aligned}$$

(c) En déduire le tableau de variation de f sur $]-\pi; \pi]$.

Correction : Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi]$, $\theta - \frac{\pi}{3} \in \left] -\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$.

Or, à l'aide du cercle trigonométrique, sur $\left] -\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$, $\cos(u) \geq 0$ si, et seulement si $u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$
i.e. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $]-\pi; \pi]$:

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	7	$4 - 2\sqrt{3}$	$4 + 2\sqrt{3}$	7	

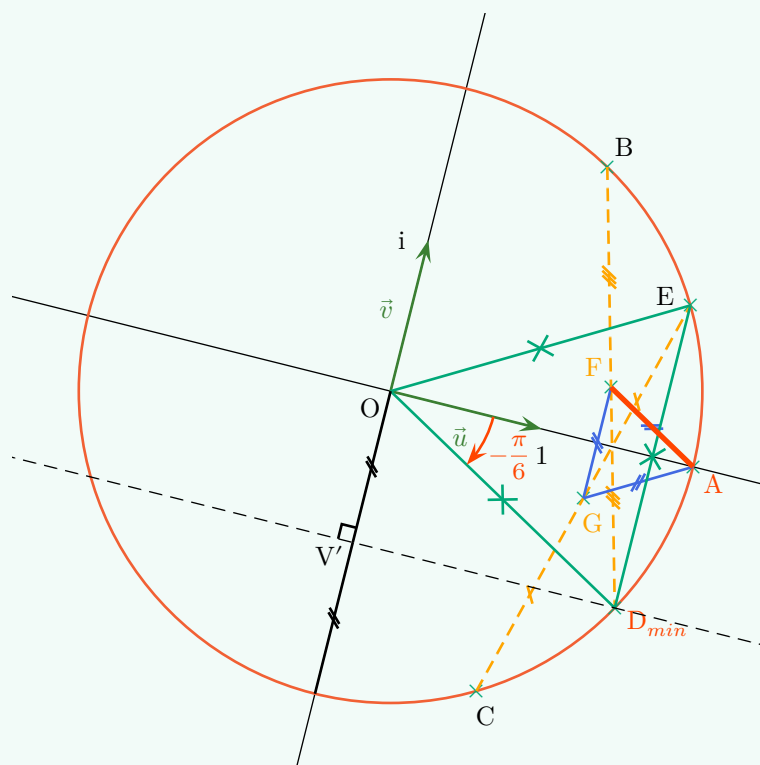
(d) Conclure et placer le point D_{min} ainsi trouvé sur la figure.

Correction : D'après la question précédente, la fonction f admet pour valeur minimale $4 - 2\sqrt{3} < 7$ en $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

La distance minimale cherchée est donc $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3}$ atteinte pour $D_{min} \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)$.

Sur la figure précédente :

- (ix) V' le symétrique de V par rapport à O .
- (x) La perpendiculaire à (VV') passant par V' intersecte Γ en deux points. On choisit pour D_{min} celui tel $(\vec{u}, \overrightarrow{OD_{min}}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.



Primitives et calcul intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures. Les objectifs de formation sont les suivants :

- ...
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- ...

1. Calcul de primitives

- (a) Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.
- (b) Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.
- (c) Lien entre intégrales et primitives.
- (d) On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue $f : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

2. Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

- (a) Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- (b) Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.
- (c) Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ et reconnaître les dérivées des fonctions composées.

3. Techniques élémentaires de calcul intégral

- (a) Intégration par parties
- (b) Changement de variable. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
- (c) Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour les fractions rationnelles trigonométriques.

Primitives et calculs d'intégrales

Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus. Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.

Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste si négatif. Le cosinus de répondre :

— « Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »

Et le sinus de répondre :

— « Eh bien, intègre-toi ! »

Dès l'aube du calcul différentiel et la formalisation de la dérivée d'une fonction f , les mathématiciens se sont naturellement posé la question de l'existence d'une fonction F dont f serait la dérivée. La notion de *primitive* était née.

La « primitivisation » apparaît alors comme l'opération « réciproque » de la dérivation. Ce nouvel outils va, en fait, devenir incontournable pour calculer des aires un peu moins triviales que celle d'un rectangle : l'aire délimitée par une portion de courbe par exemple.

Difficile a priori, ce problème trouve une solution élégante et triviale lorsque le lien avec les primitives est prouvé.

Comme demandé par le programme de PTSI, le point de vue adopté dans ce chapitre est exclusivement pratique. On y apprend essentiellement à faire du calcul exact de primitives et d'intégrales. La notion d'intégrale sera définie proprement en fin d'année et nous démontrerons alors tous les théorèmes énoncés dans les pages qui suivent.

CONTENU

I	Primitives	503
I.1	Primitives d'une fonction de la variable réelle	503
I.2	Primitives des fonctions de référence	506
II	Intégrales	510
II.1	Notions d'intégrales	510
II.2	Lien avec les primitives	514
III	Pratique élémentaire de l'intégration	519
III.1	Intégration par parties	519
III.2	Changement de variables	521
IV	Primitives de fonctions rationnelles	528
IV.1	Généralités sur la décomposition en éléments simples	529
IV.2	Intégration des éléments simples	532
V	Techniques à connaître	534
V.1	Primitives de $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$	534
V.2	Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$	535
V.3	Primitives de polynômes trigonométriques $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$	537
V.4	Primitives de fonctions rationnelles trigonométriques $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$	538
	<i>Feuille d'exercices n° 9 : Primitives et calculs d'intégrales</i>	540
	<i>Test n° 13 : Techniques d'intégration</i>	560
	<i>Devoir en temps libre n° 9 : Une fonction définie par une intégrale</i>	564
	<i>Correction</i>	565
	<i>Devoir en temps libre n° 10 : Primitives</i>	571
	<i>Correction</i>	572
	<i>Programme de Khôlle des semaines 9 et 10</i>	576
	<i>Programme du chapitre X</i>	577

I/ Primitives

I.1 Primitives d'une fonction de la variable réelle

Définition 1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une *primitive de f sur I* , notée $\int^x f(t) dt$, si F est dérivable sur I et de dérivée égale à f :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Notations : Le symbole $\int^x f(t) dt$, introduit par Leibniz^[1], désigne une primitive quelconque de f . Elle est définie à une constante additive près.

On ne parle donc pas de LA primitive, mais DES primitives de f .

Exemples 1 :

— $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

— La fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc F est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

— Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.

[1]. **Gottfried Wilhelm Leibniz**, né à Leipzig le 1^{er} juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

Esprit polymathe^[2], personnalité importante de la période Frühaufklärung, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».

En philosophie, Leibniz est, avec **René Descartes** et **Baruch Spinoza**, l'un des principaux représentants du rationalisme. Au principe de non-contradiction, il ajoute trois autres principes à la base de ses réflexions : le principe de raison suffisante, le principe d'identité des indiscernables et le principe de continuité.

Concevant les pensées comme des combinaisons de concepts de base, il théorise la caractéristique universelle, une langue hypothétique qui permettrait d'exprimer la totalité des pensées humaines, et qui pourrait résoudre des problèmes par le calcul grâce au *calculus ratiocinator*, anticipant l'informatique de plus de trois siècles.

En métaphysique, il invente le concept de monade. Enfin, en théologie, il établit deux preuves de l'existence de Dieu, appelées preuves ontologique et cosmologique. Au contraire de Spinoza, qui pensait Dieu immanent, Leibniz le conçoit transcendant, à la manière traditionnelle des religions monothéistes. Pour concilier l'omniscience, l'omnipotence et la bienveillance de Dieu avec l'existence du mal, il invente, dans le cadre de la théodicée, terme qu'on lui doit, le concept de meilleur des mondes possibles, qui sera raillé par Voltaire dans le conte philosophique *Candide*. Il aura une influence majeure sur la logique moderne développée à partir du XIX^{ème} siècle ainsi que sur la philosophie analytique au XX^{ème} siècle.

En mathématiques, la contribution principale de Leibniz est l'invention du *calcul infinitésimal* (calcul différentiel et calcul intégral). Si la paternité de cette découverte a longtemps fait l'objet d'une controverse l'opposant à **Isaac Newton**, les historiens des mathématiques s'accordent aujourd'hui pour dire que les deux mathématiciens l'ont développé plus ou moins indépendamment.

Il travaille également sur le système binaire comme remplaçant du système décimal, s'inspirant de vieux travaux chinois. Par ailleurs, il introduit la notation qui porte son nom et travaille également sur la *topologie*.

Écrivant en permanence, principalement en latin, français et allemand, il lègue un immense patrimoine littéraire, *Nachlass* en allemand, conservé à la bibliothèque de Hanovre. Il est composé d'environ 50 000 documents dont 15 000 lettres avec plus de mille correspondants différents, et n'est toujours pas entièrement publié.

[2]. La polymathie est la connaissance approfondie d'un grand nombre de sujets différents, en particulier dans le domaine des arts et des sciences. Le substantif associé est polymathe, parfois également nommé « personne d'esprit universel ».

- Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\omega} e^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.
 - La fonction S définie par $S(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $S'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
- Donc S est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $]1; +\infty[$.

ATTENTION

Il existe des fonctions n'admettant pas de primitives comme $x \mapsto [x]$.

Exercice 1 : Montrer qu'une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Proposition 1 (Unicité et linéarité) :

Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors elles sont égales sur I à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \quad F_1(x) = F_2(x) + c.$$

- Si f admet une primitive F sur I , alors elle en admet une infinité. En notant $\mathcal{P}_f$ l'ensemble de ses primitives sur I , on a :

$$\mathcal{P}_f = \{F + c / c \in \mathbb{K}\}.$$

- Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{K}$.

Si f admet une primitive F sur I , alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur b en a .

Preuve : Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I alors :

$$\forall x \in I, (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur I .

Remarques :

- Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».
- La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.

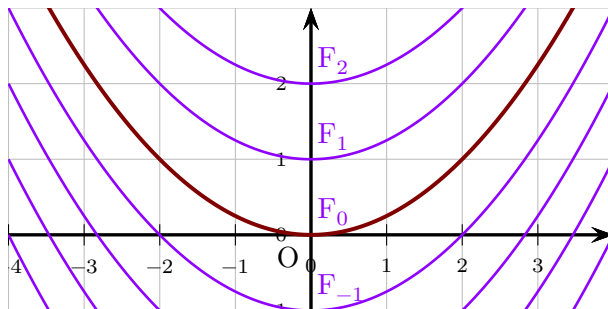


Figure IX.1 – Primitives de $x \mapsto \frac{x}{2}$.

- Sans condition de valeur en un point, on ne peut donc pas parler de la primitive de f , mais d'UNE primitive de f . En revanche, on peut parler de LA primitive de f prenant une valeur donnée en un point donné.
- En notant F une primitive de f sur I , la fonction $F_b : x \mapsto F(x) - F(a) + b$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F_b(a) = b$. Les physiciens parlent de *conditions initiales*.

Exemples 2 :

- Les primitives de $x \mapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + Cte$.
- La fonction $\ln$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Proposition 2 (Linéarité) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{K}$, $g : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g sur I alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I .

On dit que la primitivation est une opération *linéaire* ou encore *compatible* avec les combinaisons linéaires.

ATTENTION

Pas plus que pour la dérivée, sauf cas particuliers, une primitive d'un produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de fonctions ne s'obtient pas par produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de primitives.

Exemples 3 :

- $f : x \mapsto 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$.
Donc, $x \mapsto x^3 + \frac{1}{7} \sin(7x)$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- **Cas des fonctions polynomiales :**

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ admet pour primitive } x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Corollaire 2.1 (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) :

Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

f admet une primitive sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ aussi sur I .

Dans ce cas, si $F_1, F_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ sont à valeurs réelles, alors $F_1 + iF_2$ est une primitive de f si, et seulement si F_1 et F_2 sont, respectivement, des primitives de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Autrement dit, sur I :

$$\operatorname{Re}\left(\int^x f(t) dt\right) = \int^x \operatorname{Re}(f(t)) dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(\int^x f(t) dt\right) = \int^x \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Exemple 4 : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i\frac{x^2}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto x^2 + i \cos(x)$.
2. $x \mapsto e^{-ix}$
3. $x \mapsto e^x \cos(x)$

I.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».

Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I , n est un entier relatif non nul différent de -1 .

On note F une primitive de f sur I .

— Fonctions polynomiales et rationnelles :

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	

Exemples 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{t-\alpha} dt = \ln|x-\alpha| = \begin{cases} \ln(x-\alpha) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]\alpha; +\infty[\\ \ln(\alpha-x) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]-\infty; \alpha[. \end{cases}$$

ATTENTION $\left| \int^x \frac{1}{t-i} dt = \int^x \frac{t+i}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + i \arctan(x). \right.$

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k > 1$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{(t-\alpha)^k} dt = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}.$$

Remarque : Pour les fonctions polynomiales x^n ou les fonctions rationnelles $\frac{1}{x^n}$, une seule formule suffit à condition que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$:

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$
		$\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$

Exemple 6 : Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^8} = x^{-8}$ est $F(x) = -\frac{1}{7x^7}$.

— Fonctions usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	I
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x [3]	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

— Fonctions circulaires :

$f(x)$	$F(x)$	I
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1; 1[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$] -a; a[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	

— Fonctions hyperboliques :

[3]. Bouhouhou !

$f(x)$	$F(x)$	I
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$]1; +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$] -1; 1[$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$	$] -a; a[$

Remarques :

- Ces tableaux ne donnent qu'UNE primitive de la fonction f . Pour obtenir toutes les primitives de f , il suffit de rajouter une constante c à F .
- Il est tout à fait hors-programme de vous dire que les fonctions définies par $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{1-x^2}$ sont, respectivement, les dérivées des fonctions réciproques de sh , ch et th notées argsh , argch et argth . C'est dommage ! Cela aurait mis un peu plus d'homogénéité dans les formules de primitives.

Méthode 1 (Trouver une primitive) :

D'une manière générale, pour trouver une primitive F d'une fonction f , on revisite son tableau des fonctions dérivées à l'envers et on conjecture la forme de la fonction F puis on complète avec des coefficients multiplicateurs afin de simplifier ceux qui apparaîtraient en dérivant la fonction F .

Proposition 3 :

Soient $u : I \mapsto J$ et $F : J \mapsto \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

$F \circ u$ est une primitive de $u' \times (F' \circ u)$ sur I .

Corollaire 3.1 :

Pour a, b deux réels avec $a \neq 0$ tels que $ax + b \in J$ pour tout $x \in I$, si F est primitive de f sur J , alors $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$ sur I .

Exemples 7 :

- Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

À condition de reconnaître l'expression de u' en facteur, on pourra alors espérer retrouver des primitives de fonctions composées $u' \times f(u)$ que l'on écrira $F(u)$ où F est une primitive de f sur un intervalle adéquat I .

La **proposition (3)** avec F fonction usuelle et $u : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ s'écrit :

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0 : \forall x \in I, u(x) \neq 0$
$u' u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]-1; 1[$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\ln(u + \sqrt{u^2-1})$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]1; +\infty[$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]-1; 1[$

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u)$	
$\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\ln(u + \sqrt{u^2+1})$	

Exemples 8 :

— $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u' u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— $f : x \mapsto -3 e^{-3x-1}$ est du type $u' e^u$ de primitive e^u .

Donc, $x \mapsto e^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-x-2}$ est du type $\frac{u'}{u}$ de primitive $\ln |u|$.

Donc, $x \mapsto \ln |x^2 - x - 2|$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

— $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$.

Donc, $x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{3x+4}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $] -\frac{4}{3}; +\infty[$.

ATTENTION

— Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile^[4]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos(u), e^u$!

— Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (cf. le paragraphe (V)).

— Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale^[5].

— Contrairement à la dérivation qui est toujours techniquement possible, la recherche de primitives s'avère donc parfois impossible !...

Exercice 3 : Déterminer les primitives suivantes :

$$1. \int^x e^{4t+3} dt$$

$$2. \int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$3. \int^x (3t-1)(3t^2-2t+3)^3 dt$$

$$4. \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$5. \int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$6. \int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \text{ sur }]0; \pi[$$

$$7. \int^x \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} dt \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$8. \int^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$$

$$9. \int^x \frac{1}{1+i+t} dt$$

II/ Intégrales

II.1 Notions d'intégrales

Le calcul d'intégrale répond à une question simple : comment définir une aire qui n'est pas celle d'une figure géométrique simple ?

Pour $a \leq b$ deux réels, la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a; b]$ et à valeurs réelles a été introduite comme « aire algébrique » entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$: on compte l'aire positivement sur un intervalle où $f \geq 0$ et négativement sinon.

^[5]. Par exemple, la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

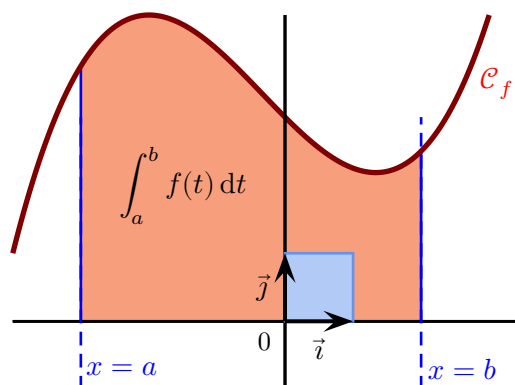


Figure IX.2 – $\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire algébrique du domaine **orangé** en unité d'**aire**.

L'idée est de subdiviser $[a; b]$ suivant des bases de plus en plus fines

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

et de faire la somme des aires des rectangles obtenus avec des valeurs de f sur cette subdivision : c'est la méthode des rectangles qui conduit à l'approximation où $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(t_k).$$

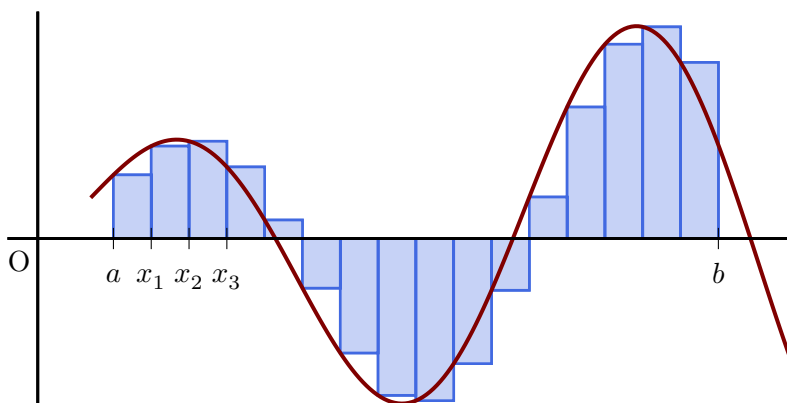


Figure IX.3 – Méthode des rectangles (à gauche).

On montre ensuite que, sous l'hypothèse f continue sur $[a; b]$, $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une limite indépendante de la subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ et les $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. C'est cette limite qu'on pose comme étant

$$\int_a^b f(t) dt :$$

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f).$$

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{Méthode des rectangles à gauche}) \quad (\text{IX.1})$$

Exemples 9 : Soit f une fonction constante sur $[a; b]$ égale à $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = \lambda(b-a).$$

Dans le cas où $a \leq b$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on retrouve l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ .

L'expression dans le second membre de (IX.1) porte le nom de *somme de Riemann* et permet, notamment, de prolonger la notion d'intégrale aux fonctions de la valeur réelle à valeurs complexes.

Définition 2 : Soient $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

- si $a \leq b$, on définit $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$.
- si $b \leq a$ on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

En particulier, cette définition entraîne :

$$\forall a \in I, \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Vocabulaire :

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ ».
- a et b s'appellent les *bornes d'intégration*.
- La fonction à intégrer s'appelle l'*intégrande*.
- Le t dans « dt » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(z) dz = \dots$$

Théorème 4 :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$

Relation de Chasles : $\forall c \in I, \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$

Inégalité triangulaire : si $a \leq b, \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$

À l'aide de la relation de Chasles, on redémontre facilement que :

$$1. \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0 \implies \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a \in I$.

$$\begin{aligned} \text{Si } F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ alors } \forall x, y \in I, F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^y f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^y f(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{IX.3})$$

Exercice 4 : À l'aide de l'inégalité triangulaire, pour tout x réel, montrer que $|\sin(x)| \leq |x|$.

Correction : $|\sin(x)| = \left| \int_0^x \cos(t) dt \right| \stackrel{\text{Parité}}{=} \left| \int_0^{|x|} \cos(t) dt \right| \stackrel{|x| \geq 0}{\leq} \int_0^{|x|} |\cos(t)| dt \leq \int_0^{|x|} 1 dt = |x|.$

Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Stricte positivité : Si $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0 \text{ sur } [a; b].$$

Si f est à valeurs strictement positives sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$ alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Croissance : Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a; b]$ alors : $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

En particulier, si $m \leq f(t) \leq M$ pour tout $t \in [a; b]$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

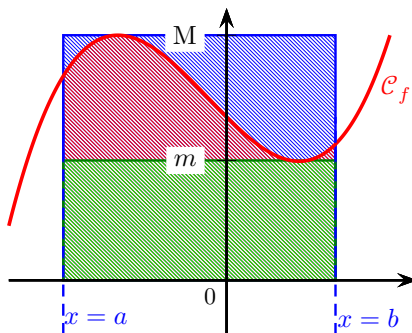


Figure IX.4 – D'un point de vue graphique, l'aire $\int_a^b f(t) dt$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ne peut donc faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle.

Remarque : La croissance de l'intégrale est une simple conséquence de la positivité. Il suffit d'appliquer le premier résultat à la fonction positive $g = f$.

II.2 Lien avec les primitives

Ce qui suit montre le lien de réciprocity entre la dérivation et l'intégration de fonctions, et fournit un moyen effectif de calculer une intégrale à l'aide de primitives, et réciproquement.

Théorème 6 (Fondamental) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in I$.

(i) $F_a : I \rightarrow \mathbb{C}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

(ii) Pour toute primitive F de f sur I : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, noté $\left[F(t) \right]_a^b$.

En particulier, la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F .

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b]; \mathbb{R})$.

(i) On ne va démontrer, pour l'instant, ce théorème que dans le cas où f est continue et monotone, par exemple, croissante sur I . Nous donnerons une démonstration complète au deuxième semestre.

Il est déjà clair que $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Si elle existe, cette primitive sera donc unique.

Soit x_0 quelconque dans l'intervalle I .

Montrons tout d'abord que F_a est continue en x_0 .

Considérons alors $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$.

$$|F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)| dt$$

Comme f est croissante sur $[x_0; x_0 + h]$ ou $[x_0 + h; x_0]$ suivant le signe de h ,

$$|f(t)| \leq M_{x_0} = \max(|f(x_0)|; |f(x_0 + h)|).$$

D'où,

$$= M_{x_0} \int_{x_0}^{x_0+h} dt = M_{x_0} \times h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

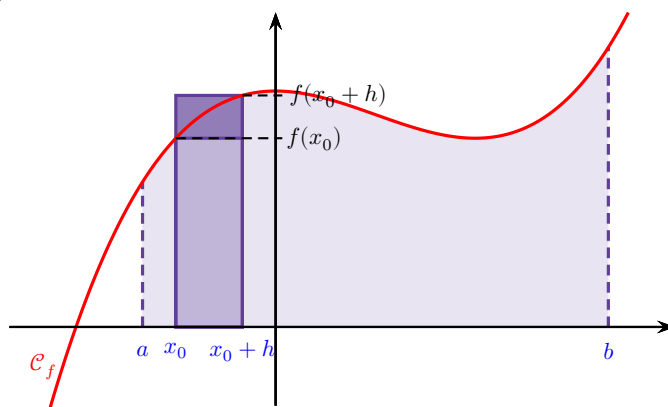
Donc, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ i.e. f est continue en $x_0 \in I$ quelconque i.e. $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Montrons alors que F_a est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

Cas $h > 0$: D'après la relation de Chasles,

$$F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_a^{x_0+h} f(t) dt = \int_{x_0+h}^a f(t) dt + \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Or, la fonction f étant croissante sur I , elle l'est en particulier sur $[x_0; x_0 + h]$. Pour tout t compris entre x_0 et $x_0 + h$ on a donc :



$$f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h).$$

Comme la fonction f est continue sur $[x_0; x_0 + h]$, on peut intégrer sur celui-ci et, par croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} h \times f(x_0) &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h) \\ hf(x_0) &\leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq hf(x_0 + h) \end{aligned}$$

En divisant l'inégalité par $h > 0$, on obtient alors un encadrement du taux de variation de F_a en x_0 :

$$f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Comme f est continue en x_0 , alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Cas $h < 0$: Le même raisonnement conduit successivement à :

$$h \times f(x_0 + h) \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq h \times f(x_0).$$

Puis, $f(x_0 + h) \geq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \geq f(x_0) \quad (h < 0!).$

Et enfin, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$

Conclusion : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$

La fonction F_a est donc dérivable en tout x_0 de I et $F'_a(x_0) = f(x_0)$. La fonction F est donc dérivable sur I et telle que $F' = f$: c'est une primitive de f sur I .

Comme $F_a(a) = 0$, c'est bien l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque : On vient de définir une primitive de f sur I à partir de son intégrale.

(ii) Soit F est une primitive de f sur I . on sait que les primitives d'une même fonction sur le même intervalle diffèrent d'une constante i.e.

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in I, F_a(x) = F(x) + c.$$

Or, $F_a(a) = 0$.

D'où $c = -F(a)$ i.e. $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$

Pour $x = b$, on obtient bien $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ que l'on note :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque : Réciproquement, à partir d'une primitive de f sur I , on peut définir son intégrale. C'est là toute la force de ce théorème de lier deux notions apparemment très différentes : *primitivation* et *intégration*.

Quand on calcule une primitive $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ d'une fonction continue f , le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive.

La notation des intégrales sans borne inférieure nous permet de faire du calcul À CONSTANCE ADDITIVE PRÈS. Le symbole d'égalité $=$ qui y figure n'est pas un vrai symbole d'égalité, c'est plutôt un symbole de congruence $\equiv$ modulo l'ensemble des fonctions constantes.

ATTENTION

Exemples 10 :

$$\text{— } \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

$$\text{En particulier, retenez que, } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

— Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,

$$\bullet \int_0^\pi \cos(t) \sin^3(t) dt = \left[\frac{1}{4} \sin^4(t) \right]_0^\pi = 0. \quad \bullet \int_0^1 t e^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{t^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Exercice 5 : Déterminer $\int^x e^{-t} \sin(t) dt$.

Correction :

$$\begin{aligned} \int^x e^{-t} \sin(t) dt &= \int^x \operatorname{Im} (e^{(-1+i)t}) dt = \operatorname{Im} \left(\int^x e^{(-1+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{(1+i)e^{ix}}{2} \right) e^{-x} \\ &= -(\sin(x) + \cos(x)) \frac{e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

À l'instar de la démonstration précédente, la croissance de l'intégrale est une propriété puissante dont nous nous servirons beaucoup en fin d'année. À ce stade, elle nous permet, par exemple, de redémontrer élégamment nos petites inégalités classiques de convexité.

Exemple 11 : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

Preuve : $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 \iff t \geq 0$.

$$\text{Donc, } \forall x \geq 0, e^x - 1 = \int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt = x \text{ et,}$$

$$\forall x \leq 0, 1 - e^x = \int_x^0 e^t dt \leq \int_x^0 1 dt = -x \iff e^x - 1 \geq x.$$

Dans tout les cas, on a le résultat escompté.

Corollaire 6.1 :

Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I.

Autrement dit, soit f une fonction continue sur un intervalle I , la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I pour tout $a \in I$. C'est LA primitive de f sur I qui s'annule en a .

$$\forall x \in I, \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Un type d'exercices très classique (et donc à maîtriser) consiste à faire étudier une fonction définie par une intégrale à bornes variables. Même si on ne sait pas intégrer la fonction sur l'intervalle, on pourra toujours réussir à calculer explicitement sa dérivée et ainsi trouver son comportement, comme dans les exercices suivants.

Exercice 6 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $a, b : I \rightarrow J$ dérivables.

1. Montrer que $H : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.
2. Étudier la fonction définie par $x \mapsto \int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t) dt$
(définition, dérivabilité, variations).

Le **théorème (6)** ramène donc le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ à la recherche d'une primitive F de f sur $[a; b]$. Il est important de faire le parallèle avec la résolution des équations et la nécessité de les factoriser : la résolution d'une équation dépend de sa factorisation, le calcul d'une intégrale dépend de la connaissance d'une primitive de l'intégrande.

Là est toute la difficulté. Cela semble simple sur des exemples élémentaires mais ne croyez pas que ce le soit. Nombre de fonctions pourtant simples en apparence n'ont pas de primitives explicites comme $x \mapsto e^{-x^2}$.

Exemple 12 : $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en zéro.

Méthode 2 (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive) :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

1. On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
2. On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
3. C'est tout !...

Exercice 7 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t} dt$

2. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$

3. $\int_0^\pi e^{\cos(t)} \sin(t) dt$

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) : Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : A \mapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A .

On note $\mathcal{C}^1(A; B)$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

Il est clair que $\mathcal{C}^1(A; B)$ est stable par somme, produit et quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On transposera également les propriétés de stabilité par composition.

Corollaire 6.2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$.

Alors, pour tous réels $a, b \in I$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

III/ Pratique élémentaire de l'intégration

ATTENTION

En accord avec le théorème (6), avant toute manipulation d'intégrales ou de primitives, on s'assurera de l'existence de l'objet en précisant bien que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration *i.e.* on commencera toujours par écrire :

La fonction ... est continue^[6] sur l'intervalle ... et on a ...

III.1 Intégration par parties

Proposition 7 (Intégration par parties) :

Soient u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

En terme de primitives, on écrira simplement :

$$\int^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt.$$

Preuve : Comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, la fonction uv l'est également.

En particulier uv est dérivable sur $[a; b]$ et on a :

$$\forall t \in [a; b], (uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

[6]. ou de classe $\mathcal{C}^1$ pour une intégration par parties.

La fonction $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont également continues sur $[a; b]$ donc admettent des primitives d'après le **théorème (6)** fondamental.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \int_a^b (uv)'(t) dt &= \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt \\ \left[u(t)v(t) \right]_a^b &= \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple.

Il faut bien comprendre que lors d'une intégration par parties, souvent abrégée en « IPP », l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée.

On essaiera donc de prendre pour v des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $v(t) = t$, ou $v(t) = \ln(t)$), et pour u' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $u'(t) = e^t$).

Retenez que l'intégration par parties sera particulièrement utile pour :

- intégrer des fonctions dont la primitive n'est pas triviale.
- obtenir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier naturel.

Exercice 8 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(x)$.
2. $x \mapsto \arctan(x)$.
3. $x \mapsto \arcsin(x)$.

Correction :

1. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une « IPP ».

Ce n'est en fait pas un problème, on pose simplement $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = 1$, ce qui donne $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = t$ soit $u(t)v'(t) = \frac{t}{t} = 1$, pas trop difficile à intégrer.

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégration par parties s'écrit :

$$\int^x \ln(t) dt = x \ln(x) - \int^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - \int^x 1 dt = x \ln(x) - x.$$

2. Pour $x \mapsto \arctan(x)$, le raisonnement est analogue en posant $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \arctan(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int^x \arctan(t) dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int^x \frac{2t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln \underbrace{(1+x^2)}_{>0}.$$

3. Sur $] -1; 1[$, les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \arcsin(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et une IPP s'écrit :

$$\int^x \arcsin(t) dt = x \arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

On aura pris garde à $1-t^2 > 0$, $\forall t \in] -1; 1[$ avant d'intégrer.

ATTENTION

Bien vérifier que tous les facteurs du produit sont bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Une rédaction correcte commencera toujours en le précisant même rapidement :

« Les fonction $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, on effectue une IPP et on a... »

La seule difficulté avec les IPP est de choisir qui sera u et qui sera v' !

En effet, pour pouvoir dériver u , il faudra savoir intégrer v' , c'est le prix à payer et espérer tomber sur une intégrale familière.

Là, il n'y a pas de règle, seuls l'habitude, l'entraînement et le talent vous permettront de savoir quoi choisir.

Il existe cependant une méthode qui permet majoritairement, d'aboutir au résultat voulu. La solution n'est pas garantie, mais marche à, disons, 90% :

Méthode 3 (Méthode ALPES) :

La méthode « A.L.P.E.S » donc consiste à toujours dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier avec :

A - pour arctan, arcsin, arccos, ...

L - pour Logarithmes

P - pour fonctions Polynomiales

E - pour Exponentielles

S - pour sin, cos, tan, sh, ch, ...

Exemples 13 : Si on veut intégrer $x \sin(x)$, on va dériver la fonction polynomiale et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille **P** des fonctions polynomiales vient avant la famille **S** des fonctions trigonométriques :

$$\int^x t \sin(t) dt = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t)) dt = -x \cos(x) + \sin(x).$$

De même, pour intégrer $2x \arctan(x)$, on va commencer par dériver l'**A**rctan et intégrer la fonction polynomiale **P** :

$$\int^x 2t \arctan(t) dt = (1 + x^2) \arctan(x) - \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = (1 + x^2) \arctan(x) - x.$$

III.2 Changement de variables

Parfois les primitives usuelles et l'intégration par parties ne suffisent pas à calculer l'intégrale.

On va réécrire l'intégrale différemment en « changeant la variable » de manière à faire apparaître, si possible, une fonction plus facile à primitiver.

Proposition 8 (Changement de variables) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et $\varphi : [a; b] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ à valeurs dans I . Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Preuve : Continue sur I , f possède une primitive F d'après le théorème fondamental et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \left[F(x) \right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Par composition, la fonction $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ et y est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$. On a aussi :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \left[F \circ \varphi(t) \right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Par transitivité, on obtient bien :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt.$$

Méthode 4 (Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables) :

En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

1. On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
2. On dérive les deux membres de l'expression : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $dx = \varphi'(t) dt$.
3. On multiplie les deux membres par $f(x)$ écrit pour obtenir $f(x) dx = f(\varphi(t)) dt$ que l'on remplace dans l'intégrale.
4. On remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

ATTENTION

Lors d'un changement de variables réalisé sur une copie, on ne garde qu'une variable dans chaque intégrale écrite : pour chaque symbole $\int$ écrit, une seule variable doit apparaître, et non un mélange entre l'ancienne et la nouvelle : ~~$\int_a^b f(\varphi(t)) dx$~~ si on a posé $x = \varphi(t)$.

Exemple 14 : Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

1. On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.

$$2. dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt.$$

$$3. \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \frac{x^2}{x+1} \frac{dx}{x} = \frac{x}{x+1} dx.$$

4. Lorsque t parcourt $[0; 1]$, x parcourt $[1; e]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \int_1^e \frac{x}{x+1} dx = \int_1^e 1 - \frac{1}{x+1} dx = \left[x - \ln|x+1| \right]_1^e = e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2.$$

Exemple 15 : Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

1. On pose $x = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$2. dx = \cos(u) du.$$

$$3. \sqrt{1-x^2} dx = \cos^2(u) du.$$

4. Lorsque x parcourt $[0; 1]$, $u = \arcsin(x)$ parcourt $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 5 (Calculer une primitive à l'aide d'un changement de variables) :

Pour déterminer une primitive $x \mapsto \int_x^x f(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable :

1. On réalise un changement de variable dans la primitive de f de la forme

$$t = \varphi(u).$$

Le changement de variable pour les primitives s'écrit avec la notation intégrale sans borne inférieure $\int^x f(t) dt = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$.

2. On trouve une primitive F de $f(\varphi(u)) \varphi'(u)$:

$$\int^x f(t) dt = [F(u)]^{\varphi^{-1}(x)} = F(\varphi^{-1}(x)).$$

Remarque : On n'oubliera pas de revenir à la variable initiale.

Exemple 16 : Déterminons la primitive de $\int^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Posons $u = t + \sqrt{t^2 + 1}$.

Comme $1 + t^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$du = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\right) dt = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \frac{u}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

D'où, $\int^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt$

2. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}} dt$

3. $\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}} dt$

Correction :

1. $\int^x \frac{1}{3 + e^{-x}} dx$: Soit le changement de variables (croissant) $u = e^t$.

Alors $u \in [1; 2]$ lorsque t décrit $[0; \ln(2)]$ et $du = e^t dt$ ce qui s'écrit aussi $dt = \frac{du}{u}$.

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt = \int_1^2 \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{1}{3u + 1} du = \left[\frac{1}{3} \ln |3u + 1| \right]_1^2 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{7}{4} \right).$$

Remarque : Le changement de variables n'est pas du tout justifié ici.

En effet, $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{3e^t + 1} dt = \left[\frac{1}{3} \ln |3e^t + 1| \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{7}{4} \right).$

2. Considérons $\int^x \frac{1}{\sqrt{6-t^2}} dt$: Le changement de variables a pour but de se ramener à quelque chose de connu.

Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine une fonction polynomiale de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(u),$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin$, c'est $\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}} dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2}} \frac{dt}{\sqrt{6}}.$$

Il est alors légitime de penser à poser $u = \frac{t}{\sqrt{6}}$ i.e. $du = \frac{dt}{\sqrt{6}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}} dt &\stackrel{t \in [\sqrt{3}; \sqrt{6}]}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &\stackrel{u \in [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]}{=} \left[\arcsin(u) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. $\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}} dt$: La méthode est identique avec la même idée.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $9t - t^2$ sous la forme $1 - u^2$:

$$6t - t^2 = 9 - (t-3)^2 = 9 \left(1 - \left(\frac{t-3}{3} \right)^2 \right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variables $u = \frac{t-3}{3}$ pour lequel $6t - t^2 = 9(1 - u^2)$ et $dt = 3 du$.

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(1-u^2)}} 3 du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\arcsin(u) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : Comme $t \in [3; 6]$, alors $\frac{t-3}{3} \in [0; 1]$, il est donc tout aussi naturel de poser $\sin(v) = \frac{t-3}{3} \Leftrightarrow \cos(v) dv = \frac{1}{3} dt \Leftrightarrow dt = 3 \cos(v) dv$.

On a alors :

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}} dt = \frac{1}{3} \int_3^6 \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t-3}{3}\right)^2}} \stackrel{t \in [3; 6]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(v) dv}{\sqrt{1 - \sin^2(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos(v)} dv}{\cancel{\cos(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 9 (Changement de variables affine) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in I$ pour tout $t \in [a; b]$, alors $\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$.

Preuve : La fonction $\varphi : t \mapsto \alpha t + \beta$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier sur $[a; b]$, à valeurs dans I par hypothèse.

On peut donc effectuer le changement de variables $x = \alpha t + \beta$ et on a $dx = \alpha dt$ puis, d'après la proposition (8),

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\alpha t + \beta) \alpha dt \Leftrightarrow \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) dt.$$

Voici quelques applications importantes :

Corollaire 9.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soit $a > 0$.

1. Si $f : [-a ; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Si $f : [-a ; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, continue et T -périodique ($T > 0$) alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Preuve :

1. D'après la relation de Chasles, on a : $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$.

Posons $u = -t$ dans la première intégrale, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a ; a]$ à valeurs dans lui-même. Rapidement, on a $du = -dt$, $f(t) = f(-u) = f(u)$ par parité de f .

$$\text{D'où, } \int_{-a}^a f(t) dt = \int_a^0 f(u)(-du) + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

2. Le même raisonnement avec f impaire, conduit à :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_a^0 -f(u)(-du) + \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(t) dt = 0.$$

3. La fonction f étant périodique, son domaine de définition est donc invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.

On commence par utiliser la relation de Chasles pour se ramener à l'intégrale que l'on veut puis un changement de variables affine :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(u+T) du \\ &= \cancel{\int_a^0 f(t) dt} + \int_0^T f(t) dt + \cancel{\int_0^a f(u) du} \\ &= \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

T -périodicité

Exemples 17 :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, $\int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx$ et $\int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0$.
- $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) dt = 0$.

Exercice 10 : Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C})$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t) dt.$$

Exemples 18 : Primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1. On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $dx = b dt$ et on a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{b} \arctan(t) = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

2. On effectue le changement de variables $x = bt$, d'où $dx = b dt$ et on a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right).$$

Exercice 11 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$

2. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}.$

3. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$

Correction :

1. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \arcsin(x-1) \text{ sur } [0; 2].$

2. On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1+u}}{x^6} x^5 dx = \frac{1}{6} \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{v}{v^2-1} 2v dv = \frac{1}{3} \int \frac{v^2}{v^2-1} dv = \frac{1}{3} \left(v + \int \frac{1}{v^2-1} dv \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(v + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1} \right| \right) \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}} dt &= \int^x \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{(1+t) - (1-t)} dt = \frac{1}{2} \left(\int^x \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt - \int^x \frac{\sqrt{1-t}}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u du + \int \frac{v}{1-v^2} 2v dv \right) \\ &\text{(en posant } u = \sqrt{1+t} \text{ et } v = \sqrt{1-t}) \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du + \int (-1) + \frac{1}{1-v^2} dv \\ &= u - v + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right| \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} \right| + \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right| \right) \cdot \text{Lycée Jules Garnier}$$

À retenir 1 (En pratique) :

Pour calculer une intégrale sur un segment I, il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \mapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \mapsto f(u(x))$.

Par intégration par parties : On remplace le calcul d'une primitive par le calcul d'une autre plus simple après avoir bien vérifié et stipulé que les intégrandes concernées étaient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Par changement de variables : φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on pose $t = \varphi(u)$, et donc $dt = \varphi'(u) du$, et on a :

$$\int^x \varphi'(u)f(\varphi(u)) du = \int^{\varphi(x)} f(t) dt \text{ avec } t = \varphi(u).$$

IV/ Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

$$\bullet \frac{1}{x-a}, \quad \bullet \frac{1}{(x-a)^k}, \quad k > 1.$$

On parlera d'*éléments simples de première espèce*. Et de termes de la forme :

$$\bullet \frac{1}{ax^2+bx+c}, \quad \bullet \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c}, \quad \bullet \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}, \quad \bullet \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^k},$$

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

On parlera d'*éléments simples de deuxième espèce*.

En substance,

À retenir 2 :

— Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \mathbb{R}$, il existe $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma} + \dots$$

— Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)^n(x-\beta)(x-\gamma)\dots} = \frac{a_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{a}{(x-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma} + \dots$$

— Soient $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 - 4v < 0$, il existe $a, b, \dots \in \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(x^2+ux+v)(x-\alpha)(x-\beta)\dots} = \frac{\lambda x + \mu}{x^2+ux+v} + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \dots$$

Seule, la première décomposition est à connaître en PTSI. Vous pourrez rencontrer les suivantes et quelques autres non présentées ici mais, dans ce cas, l'énoncé ou l'examineur vous aideront toujours.

IV.1 Généralités sur la décomposition en éléments simples

En PTSI, la théorie de la décomposition en éléments simples n'est pas à connaître dans sa généralité. Vous ne rencontrerez essentiellement que des fonctions à pôles réels simples. Dans les autres cas, la décomposition sera indiquée ou simple.

Il est cependant utile de connaître quelques petites techniques, qui évitent de recourir au calcul brutal consistant à mettre au même dénominateur tous les termes pour identifier.

- Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$.

Exemple 19 (Pôles simples réels de première espèce) :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-2}$.

- On commence par factoriser le dénominateur afin d'identifier les pôles et leur multiplicité :

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}.$$

- La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}. \quad (\text{IX.4})$$

- Pour $x \neq -1$, on multiplie l'égalité (IX.4) par $x+1$, ce qui donne : $\frac{2x+3}{x-2} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$. Expression qui peut alors être évaluée en $x = -1$, le pôle ayant disparu.

On trouve alors $-\frac{1}{3} = a$.

- On itère le raisonnement précédent à tous les pôles simples. Ici, en multipliant par $x-2$ et en évaluant en $x = 2$.

On trouve $b = \frac{7}{3}$.

- **Conclusion :** $f(x) = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$ et toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ est de la forme :

$$x \mapsto -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{7}{3} \ln|x-2| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x-2)^7}{x+1} \right|.$$

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x-a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 (Pôles simples et multiples réels de première espèce) :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$.

— Celle-ci s'écrit :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

— En multipliant par $x+2$, on obtient :

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \left(\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} \right) (x+2) + c.$$

En évaluant en $x = -2$, on obtient $c = -\frac{1}{9}$.

— En multipliant par $(x-1)^2$, on obtient :

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b(x-1) + \frac{c(x-1)^2}{x-2}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient $a = \frac{2}{3}$ facilement mais on perd l'occasion de déterminer b à cause de la présence du facteur $x-1$.

— En attendant de disposer de moyens plus efficaces, deux méthodes s'offrent à nous :

1. On pourra toujours évaluer la fonction en $x = 0$ par exemple et identifier. Le coefficient b est alors solution de l'équation

$$\frac{1}{2(-1)^2} = a - b + \frac{c}{2} \iff \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - b - \frac{1}{18} \iff b = \frac{1}{9}.$$

2. On utilise habilement les limites des fractions rationnelles en $\pm\infty$ après avoir multiplié par x les numérateurs :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{(x-1)^2(x+2)} = 0 \text{ d'une part.}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} \right) = b + c \text{ d'autre part.}$$

$$(c) \text{ En identifiant, } b \text{ est solution de l'équation } 0 = b - \frac{1}{9}.$$

$$\text{On retrouve } b = \frac{1}{9}.$$

— **Conclusion :** $f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)}.$

- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable.
- On peut également obtenir une équation en regardant la limite quand x tend vers $\pm\infty$, en multipliant au besoin par x ou x^2 pour faire apparaître des limites non nulles.

Exemple 21 (Pôles simples de première et deuxième espèce) :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

— On commence par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut aller plus loin.

— La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}. \quad (\text{IX.5})$$

— En multipliant par $x+1$, on trouve rapidement $a = \frac{1}{3}$.

— Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = \frac{1}{3} + c \iff c = \frac{2}{3}$.

Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3(x+1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 + \frac{2}{3}x}{x^2-x+1} \\ 0 &= \frac{1}{3} + b \\ b &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

— **Conclusion :** $f(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$.

Remarque : Rien empêche de faire un petit tour dans $\mathbb{C}$ et de poser α et $\bar{\alpha}$ les racines complexes $x^2 - x + 1 = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$.

L'égalité (IX.5) s'écrit alors :

$$\frac{1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx+c}{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}. \quad (\text{IX.6})$$

On multiplie alors les deux membres de (IX.6) par $x - \alpha$ avant d'évaluer en $x = \alpha$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-\bar{\alpha})} &= \frac{b\alpha+c}{(\alpha-\bar{\alpha})} \iff \frac{1}{\alpha+1} = b\alpha+c \\ &\iff 1 = (b\alpha+c)(\alpha+1) \iff 1 = b\alpha^2 + (b+c)\alpha + c \end{aligned}$$

Or, $\alpha^2 = \alpha - 1$,

$$\iff 1 = b(\alpha - 1) + (b+c)\alpha + c \iff 1 = -b + c + (2b+c)\alpha$$

En identifiant « partie réelle » et « imaginaire » en α :

$$\iff \begin{cases} 1 &= -b + c \\ 0 &= 2b + c \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -\frac{1}{3} \\ c &= \frac{2}{3}. \end{cases}$$

IV.2 Intégration des éléments simples

D'après la remarque liminaire du paragraphe (IV), trouver une primitive d'une fonction rationnelle revient donc à trouver une primitive des termes constituant sa décomposition en éléments simples :

Primitive de $\frac{1}{x-\alpha}$ **et** $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k > 1$: cf. l'exemple (19).

Toutes les fonctions du type $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ ou $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ se ramènent à ce cas là.

Méthode 6 (Primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples réels) :

Soient $r_1, \dots, r_n$ des réels deux à deux distincts et un intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$.

Alors, toute primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(x-r_1) \dots (x-r_n)}$ sur I est de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^n A_k \ln |x - r_k| + \text{Cte}$ où $A_1, \dots, A_n$ sont les coefficients de la décomposition en éléments simples de f .

Exercice 12 : Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur des intervalles appropriés.

Correction : Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$, on a :

$$\int^x \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \int^x \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \ln \left| \frac{(x-1)^2(x-3)^2}{x-2} \right|.$$

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (avec $a \neq 0$) : On utilise la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Selon le signe de Δ , trois cas se présentent :

Exemple 22 (Cas où $\Delta < 0$) :

$$\int^x \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

On pose $\xi = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ i.e. $d\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$:

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} \int^\xi \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int^\xi \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\xi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Exemple 23 (Cas où $\Delta = 0$) :

$$\int^x \frac{dt}{4t^2 + 4t + 1} = \int^x \frac{dt}{(2t + 1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x + 1}$$

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) : Calculons $\int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1}$.

1. Factoriser le dénominateur : $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$.
2. Déterminer la *décomposition en éléments simples* :

$$\frac{1}{(x - 1)(2x + 1)} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{2x + 1}. \quad (\text{IX.7})$$

- (a) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(x - 1)$ puis en remplaçant x par 1, on obtient : $\alpha = \frac{1}{3}$.
- (b) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(2x + 1)$ puis en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\text{D'où, } \frac{1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} - \frac{\frac{2}{3}}{2x + 1}.$$

3. Utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1} &= \int^x \left(\frac{\frac{1}{3}}{t - 1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |2x + 1| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 1}{2x + 1} \right|. \end{aligned}$$

Remarques : La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2 - x - 1}$ n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$ et en 1.On travaille donc sur un intervalle inclus strictement dans $] -\infty; -\frac{1}{2}[$, $]-\frac{1}{2}; 1[$, ou $]1; +\infty[$.

- Sur $] -\infty; -\frac{1}{2}[$ ou sur $]1; +\infty[$, on a $\int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x - 1}{2x + 1} \right)$.
- Sur $]-\frac{1}{2}; 1[$, on a $\int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1 - x}{2x + 1} \right)$.

Primitive de $\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$ avec $b^2 - 4c < 0$: Comme $x^2 + bx + c$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut envisager une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$. On commence par faire apparaître cette forme et on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + bt + c} dt &= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2t + \beta}{t^2 + bt + c} dt + \int \frac{\beta - \frac{\alpha\beta}{2}}{t^2 + bt + c} dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \ln |x^2 + bx + c| + \dots \arctan(\dots). \end{aligned}$$

Exercice 13 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \mapsto \frac{x^2}{x^3 + 1}.$

2. $x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}.$

Correction :

1. I est l'un des deux intervalles $] -\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[.$

Sur I, $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1).$

2. I est l'un des deux intervalles $] -\infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[.$ f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3 - 1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{X + 2}{X^2 + X + 1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{1}{2} \frac{2X + 1}{X^2 + X + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{X^2 + X + 1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{1}{2} \frac{2X + 1}{X^2 + X + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(X + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right). \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - 1} dx &= \frac{1}{3} (\ln(|x - 1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)) \\ &= \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

V/ Techniques à connaître

Le programme de PTSI demande explicitement aux étudiants de savoir déterminer des primitives d'un certain type. C'est l'objet de cette partie.

V.1 Primitives de $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$

Proposition 10 :

Soient P une fonction polynomiale et α un nombre réel.

Alors $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$ admet une primitive de la forme $x \mapsto Q(x) e^{\alpha x}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P .

Méthode 7 (Primitive de $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$) :

Soit n le degré de P . Deux méthodes pour déterminer Q dans la proposition précédente :

1. Chercher Q sous la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^n b_k x^k$ avec les coefficients b_k à déterminer. On calcule la dérivée de $x \mapsto Q(x) e^{\alpha x}$, et on réinjecte dans l'équation de primitivation pour obtenir

$$Q' + \alpha Q = P.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients dans cette égalité polynomiale pour obtenir un système linéaire en $b_0, \dots, b_n$, que l'on résout. (On trouvera toujours une unique solution).

2. Si le degré de P n'est pas trop grand, on peut aussi effectuer des intégrations par parties successives en dérivant P , puis P' , etc, jusqu'à épuiser le degré de la fonction polynomiale à intégrer.

Exemple 25 : $\int_t^x t^2 e^{-t} dt = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x}.$

V.2 Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

On souhaite déterminer des primitives de fonctions du type $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ où $(\alpha; \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Sachant que l'on connaît la primitive $\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{ax}$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, la méthode générale va être de se ramener celle-ci à l'aide des formules d'Euler.

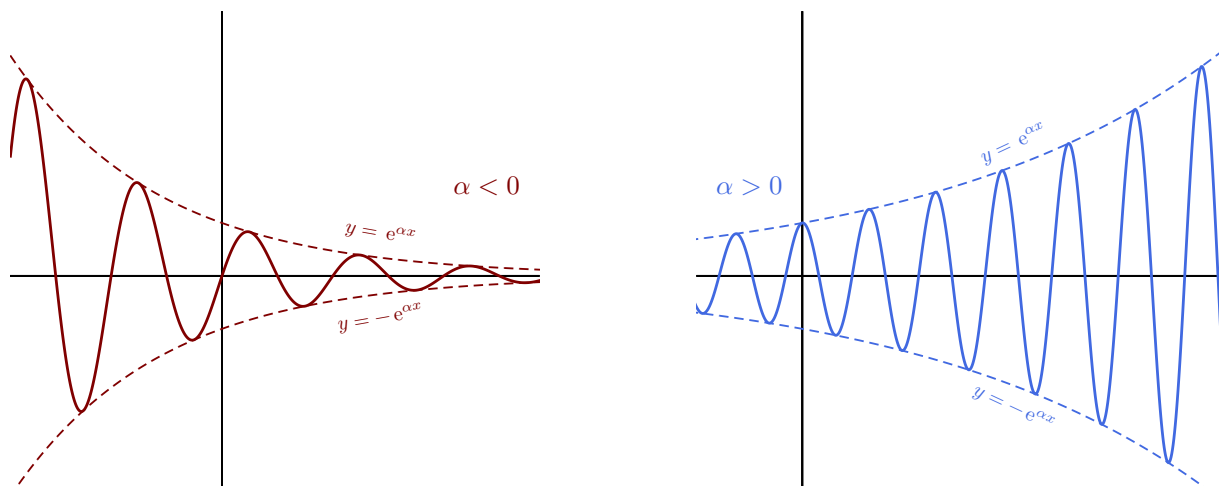


Figure IX.5 – Signaux pseudo-périodiques avec enveloppe exponentielle. La charge d'un condensateur dans un circuit RLC est de ce type.

Méthode 8 (Primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$) :

Pour déterminer une primitive faisant intervenir $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$, trois méthodes :

1. À l'aide des formules d'Euler, on se ramène à chercher une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ connue puis à en prendre la partie réelle ou imaginaire.
2. Une double intégration par parties doit vous ramener à une équation en la primitive cherchée.

3. On peut aussi postuler que la primitive sera de la forme $x \mapsto e^{ax}(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))$ et déterminer les constantes réelles λ et μ après dérivation et identification.

Exemple 26 (Primitive de $x \mapsto e^x \cos(x)$ par les formules d'Euler) :

$$\begin{aligned} \int^x e^t \cos(t) dt &= \int^x \operatorname{Re}(e^{(1+i)t}) dt = \operatorname{Re} \left(\int^x e^{(1+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1-i}{2} \right) (\cos(x) + i \sin(x)) \right) e^x \\ \text{Donc, } \int^x e^t \cos(t) dt &= (\cos(x) + \sin(x)) \frac{e^x}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 14 : Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int^x \cos(t) e^{2t} dt$

2. $\int^x \cos(2t) e^{-t} dt$

Correction :

$$\begin{aligned} 1. \int^x e^{2t} \cos(t) dt &= \operatorname{Re} \left(\int^x e^{(2+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{2-i}{5} e^{2x} (\cos(x) + i \sin(x)) \right) \\ &= \frac{2 \cos(x) + \sin(x)}{5} e^{2x}. \\ 2. \int^x \cos(2t) e^{-t} dt &= \frac{-\cos(2x) + 2 \sin(2x)}{5} e^{-x}. \end{aligned}$$

Exemple 27 (Primitive de $x \mapsto e^x \sin(2x)$ par IPP) :

Les fonctions $t \mapsto \sin(2t)$ et $t \mapsto e^t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, une intégration par parties s'écrit :

$$\int^x e^t \sin(2t) dt = [\sin(2t) e^t]^x - 2 \int^x \cos(2t) e^t dt$$

Les fonctions $t \mapsto \cos(2t)$ et $t \mapsto e^t$ sont également de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$,

$$\int^x e^t \sin(2t) dt = \sin(2x) e^x - 2 [\cos(2t) e^t]^x - 4 \int^x \sin(2t) e^t dt$$

$$5 \int^x e^t \sin(2t) dt = \sin(2x) e^x - 2 \cos(2x) e^x.$$

$$\text{Donc, } \int^x e^t \sin(2t)(t) dt = (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) \frac{e^x}{5}.$$

Exemple 28 (Primitive de $x \mapsto e^{-x} \sin(2x)$ par « dérivation ») :

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi : x \mapsto (\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)) e^{-x}$ soit une primitive de $x \mapsto e^{-x} \sin(2x)$.

φ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \left((2\mu - \lambda) \cos(2x) - (2\lambda + \mu) \sin(2x) \right) e^{-x}.$$

Le couple $(\lambda; \mu)$ est alors solution du système :

$$\begin{cases} 2\mu - \lambda = 0 \\ \mu + 2\lambda = 1 \end{cases} \iff \lambda = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{5}.$$

Donc,
$$\int^x e^{-t} \sin(2t) dt = \left(2 \cos(2x) + \sin(2x) \right) \frac{e^{-x}}{5}.$$

V.3 Primitives de polynômes trigonométriques $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Pour les primitives du type $\int^x \cos^m(t) \sin^n(t) dt$, $(m; n) \in \mathbb{N}^2$, sauf primitivation directe « à l'œil », on utilise les formules d'Euler et De Moivre pour linéariser puis les primitives de $t \mapsto \cos(at + b)$ et $t \mapsto \sin(at + b)$.

Exemples 29 :

1. $\int^x \cos(t) \sin^3(t) dt = \frac{1}{4} \sin^4(x).$ p et q impairs.

2. $\int^x \cos^3(t) \sin^3(t) dt = \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8} dt \stackrel{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8} \int^{\cos(2x)} \frac{u^2 - 1}{2} du$ p et q impairs.

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} \cos^3(2x) - \cos(2x) \right).$$

3. $\int^x \cos^2(t) \sin^3(t) dt \stackrel{u=\cos(t)}{=} - \int^{\cos(x)} (u^2 - u^4) du = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x).$ p pair et q impair.

4. $\int^x \cos^3(t) dt \stackrel{u=\sin(t)}{=} \int^{\sin(x)} (1 - u^2) du = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x).$ p impair et q pair.

5. $\cos^2(t) \sin^4(t) = \frac{1}{4} \sin^2(2t) \sin^2(t) = \frac{1}{16} (1 - \cos(4t)) (1 - \cos(2t))$ p et q pairs

$$= \frac{1}{16} (1 - \cos(2t) - \cos(4t) + \cos(4t) \cos(2t))$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos(2t) - \frac{1}{16} \cos(4t) + \frac{1}{32} \cos(6t) + \frac{1}{32} \cos(2t)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos(2t) - \frac{1}{16} \cos(4t) + \frac{1}{32} \cos(6t).$$

D'où,
$$\int^x \cos^2(t) \sin^4(t) dt = \frac{1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{1}{16} x.$$

Exercice 15 : Déterminer $\int^x \cos^5(t) dt$.

Correction : Deux méthodes : changement de variables $u = \sin(t)$ ou linéarisation.

$$\int^x \cos^5(t) dt = \frac{1}{15}(15 \sin(t) - 10 \sin^3(t) + 3 \sin^5(t)) \text{ ou } \frac{1}{80} \sin(5t) + \frac{5}{48} \sin(3t) + \frac{5}{8} \sin(t).$$

V.4 Primitives de fonctions rationnelles trigonométriques $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Pour les primitives du type $\int^x \frac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))} dt$ où P, Q sont deux fonctions polynomiales à 2 variables, on peut toujours poser $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour se ramener à l'intégrale d'un quotient de fonctions polynomiales.

On a alors :

$$dt = \frac{2}{1+u^2} du, \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \text{ et } \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Cette méthode fonctionne toujours et ramène le problème à celui de l'intégration d'une fonction rationnelle. On peut cependant affiner un peu et user des règles, dites de Bioche^[7] :

Méthode 9 (Règles de Bioche) :

(Hors-Programme)

Dans la suite, f est une expression rationnelle en $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

Ainsi, pour calculer $\int^x f(t) dt$, on forme l'intégrande : $\omega(t) = f(t) dt$.

- si $\omega(-t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(t)$;
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \sin(t)$;
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \tan(t)$;
- si deux des trois relations précédentes sont vraies (dans ce cas les trois relations sont vraies), un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(2t)$;
- dans les autres cas, le changement de variables $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ s'avère souvent judicieux.

Exemple 30 : Avec le changement de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{1 - \sin(t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{1 - \frac{2u}{1+u^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2 du}{(1-u)^2} = \left[\frac{2}{1-u} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 + \sqrt{3}.$$

Exercice 16 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

[7]. Ces règles ont été formulées par Charles Bioche lorsqu'il était professeur en mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

1. $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

2. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$

Correction :

1. On pose
- $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- et donc
- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
- .

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int 2 \frac{1}{1-t^2} dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right|$$

$$= \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|,$$

sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ ou bien

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x) + 1}{\sin(x) - 1} \right|,$$

ou bien, en posant $u = x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(u - \frac{\pi}{2})} du = \int \frac{1}{\sin(u)} du = \ln \left| \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right| = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

2. La fonction
- $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$
- est continue sur
- $\mathbb{R}^*$
- . On considèrera donc
- $x \in I$
- où
- I
- est un intervalle ne contenant pas 0.

En posant $t = e^x$ et donc $dx = \frac{dt}{t}$ ($t \neq 0$),

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} dx = \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan(e^x),$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} dx = \int \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x) - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1} \right|,$$

sur les mêmes intervalles ne contenant pas 0 ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \ln \left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \right),$$

sur les mêmes intervalles ne contenant pas 0.

Primitives et calculs d'intégrales

I/ Théorème fondamental de l'analyse _____

Exercice 1 (Simplissimes) : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes. On précisera les intervalles de primitivation.

1. $\int^x \frac{1}{1-5t} dt$

2. $\int^x \frac{t}{t^2-1} dt$

3. $\int^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$

4. $\int^x \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt$

5. $\int^x \sqrt[5]{t} dt$

6. $\int^x \tan^2(t) dt$

7. $\int^x \tan(t) dt$

8. $\int^x t(2t^2+1)^4 dt$

9. $\int^x \frac{\ln(t)}{t} dt$

10. $\int^x \frac{\ln^\alpha(t)}{t} dt$

11. $\int^x \frac{1}{t \ln^\alpha(t)} dt$

12. $\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

13. $\int^x \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} dt$

14. $\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$

15. $\int^x \frac{1}{t^2+t+1} dt$

16. $\int^x \frac{1}{(1+t)^2} dt$

17. $\int^x \frac{t}{(1+t)^2} dt$

18. $\int^x \frac{1}{1+t^2} dt$

19. $\int^x \sin(t) \cos(t) dt$

20. $\int^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)+2}} dt$

21. $\int^x \frac{(1+\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}} dt$

22. $\int^x \frac{1}{t} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^4 dt$

23. $\int^x \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$

24. $\int^x e^{\sin^2(t)} \sin(2t) dt$

25. $\int^x \frac{1}{(1+i+t)^2} dt$

26. $\int^x \frac{1}{1+i+t} dt$

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques) : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $\int^x \cos^3(x) dx$

3. $\int^x \sin^5(x) dx$

5. $\int^x \cos^4(x) \sin^2(x) dx$

2. $\int^x \sin^4(x) dx$

4. $\int^x \cos^4(x) \sin^3(x) dx$

6. $\int^x \operatorname{ch}^3(x) dx$

Exercice 3 : Montrer que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 4 : Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f : x \mapsto \int_0^x t^2 dt$ avec $I = [0; +\infty[$.

2. $f : x \mapsto \int_{-3}^x e^{2t+4} dt$ avec $I = [-3; +\infty[$.

3. $f : x \mapsto \int_0^{x^2} e^t dt$ avec $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \int_x^{2x} \ln(t) dt$ avec $I =]0; +\infty[$.

Correction : D'après le théorème fondamental de l'analyse, la seule justification à donner est la continuité de l'intégrande sur l'intervalle considéré. Une fois cela réalisé, le théorème affirme que la primitive est de classe $\mathcal{C}^1$ sur celui-ci.

C'est le cas des quatre fonctions considérées. On ne le redira pas.

Pour tout x de I on a donc :

1. $\left(\int_0^x t^2 dt\right)' = x^2.$	3. $\left(\int_0^{x^2} e^t dt\right)' = 2x e^{x^2}.$
2. $\left(\int_{-3}^x e^{2t+4} dt\right)' = e^{2x+4}.$	4. $\left(\int_x^{2x} \ln(t) dt\right)' = 2\ln(2x) - \ln(x) = 2\ln(2) + \ln(x).$

Exercice 5 :

1. Étudier les variations de la fonction F définie par $F(x) = \int_{-5}^x (t^2 + 3t - 4) dt$.
2. Étudier la fonction F définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt$.

Correction :

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{\text{sh}(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc F sera définie si, et seulement si $\forall t \in [x; 2x]$, $t \neq 0$ i.e. si, et seulement si $x \neq 0$.

Donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$.

Étudions les variations de F :

En notant φ une primitive de f sur l'un des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on peut écrire $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$, somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2\text{sh}(2x)}{2x} - \frac{\text{sh}(x)}{x} \\ &= \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x}. \end{aligned}$$

La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)$ est du signe de x i.e. $\forall x \in \mathcal{D}_F$, $F'(x) > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	+		+
F	$-\infty$	0	$+\infty$

On peut compléter l'étude par des calculs de limites aux bornes du domaine de définition, que nous ne détaillerons pas ici car ils utilisent des techniques sur les intégrales dont nous parlerons dans un futur chapitre, mais qui apparaissent dans le tableau de variations ci-dessus.

On peut même prolonger F par continuité en posant $F(0) = 0$ pour en faire une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	+		
F	$-\infty$	0	$+\infty$

Exercice 6 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx$

6. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$

2. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$

7. $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$

12. $\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx$

3. $\int_0^{\pi} e^{\cos(t)} \sin(t) dt$

8. $\int_1^2 \ln(x) dx$

13. $\int_{-2}^1 u(u^2-1)^2 du$

4. $\int_{-1}^4 (x-1)^2 dx$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

14. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

5. $\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\int_{-1}^1 e^{t+e^t} dt$

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes (p et q entiers naturels donnés)

1. $\int_0^{\pi} 2 \cos(px) \cos(qx) dx.$

2. $\int_0^{\pi} 2 \cos(px) \sin(qx) dx.$

3. $\int_0^{\pi} 2 \sin(px) \sin(qx) dx.$

Correction :

1. On sait que $\cos(px) \cos(qx) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$:

Si $p \neq q$, $\int_0^{\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q} \right]_0^{\pi} = 0.$

Si $p = q \neq 0$, $\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2px)) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$

Si $p = q = 0$, $\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx = \int_0^\pi dx = \pi.$

La démarche est identique pour les deux autres questions :

2. On trouve $\int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx = 0$ si $p \neq q$ et $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$

3. $\int_0^\pi \sin(px) \cos(qx) dx = 0$ pour tout choix de p et q .

Exercice 8 : Soit α un réel.

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer en fonction de ε et α l'intégrale $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 x^\alpha \ln(x) dx$

3. En déduire, suivant la valeur de α , l'existence et la valeur de la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon$.

II/ Intégration par parties

Exercice 9 : Déterminer les primitives ou les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties en précisant le ou les intervalles considérés le cas échéant :

1. $\int_1^x t \ln(t) dt$

6. $\int_0^x \cos(t) \exp(t) dt$

12. $\int_0^x t^n \ln(t) dt, (n \in \mathbb{N})$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt$

7. $\int_0^x \ln(1+t^2) dt$

13. $\int_0^x \sin(\ln(t)) dt$

3. $\int_0^1 t \sqrt{t+1} dt$

8. $\int_0^x e^{\arccos(t)} dt$

14. $\int_0^x \arccos(t) dt$

4. $\int_1^x t^2 \ln(t) dt$

9. $\int_0^x \cos(t) \ln(1+\cos(t)) dt$

15. $\int_0^1 \arctan(t) dt$

5. $\int_1^x \ln^2(t) dt$

10. $\int_0^x \frac{t e^t}{(t+1)^2} dt$

16. $\int_0^x t \arctan(t) dt$

11. $\int_0^x \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln(t) dt$

Correction : Après avoir vérifié que les fonctions u et v étaient bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à préciser, on utilise la formule

$$\int_a^x uv' = [uv]^x - \int_a^x u'v.$$

1. Pour tout $x \in I \subset \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Une IPP s'écrit :

$$\int_1^x t \ln(t) dt = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x t dt = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right).$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = 1$ (intégration par parties).

3. Considérons une intégration par parties avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1] \subset]-1; +\infty[$:

$$\int_0^1 t\sqrt{t+1} dt = \left[\frac{2}{3}t(t+1)\sqrt{t+1} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (t+1)^{\frac{3}{2}} dt = \left[\frac{2}{3}t(t+1)\sqrt{t+1} - \frac{4}{15}(t+1)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1).$$

4. Avec $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, une IPP s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) \times t^2 dt &= \left[\ln(t) \times \frac{t^3}{3} \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \frac{t^3}{3} dt \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int_1^x \frac{t^2}{3} dt = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \left[\frac{t^3}{9} \right]_1^x \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

5. On pose $u : x \mapsto (\ln(x))^2$ et $v : x \mapsto x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \int_1^x (\ln(t))^2 dt &= [t \ln^2(t)] - 2 \int_1^x \ln(t) dt \\ &= x \ln^2(x) - 2x \ln(x) - 2x. \end{aligned}$$

6. Notons $I = \int_1^x \cos(t) \exp(t) dt$.

Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp(x)$ et $v' = \cos(x)$.

Alors $u' = \exp(x)$ et $v = \sin(x)$.

Donc,

$$I = \int_1^x \cos(t) \exp(t) dt = [\sin(t) \exp(t)]^x - \int_1^x \sin(t) \exp(t) dt$$

Si l'on note $J = \int_1^x \sin(t) \exp(t) dt$, alors on a obtenu

$$I = [\sin(t) \exp(t)]^x - J \quad (\text{IX.1})$$

Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp(x)$ et $v' = \sin(x)$. Ce qui donne

$$J = \int_1^x \sin(t) \exp(t) dt = [-\cos(t) \exp(t)]^x - \int_1^x -\cos(t) \exp(t) dt = [-\cos(t) \exp(t)]^x + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = [-\cos(t) \exp(t)]^x + I \quad (\text{IX.2})$$

Repartons de l'équation (IX.1) dans laquelle on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (IX.2).

$$I = [\sin(t) \exp(t)]^x - J = [\sin(t) \exp(t)]^x - [-\cos(t) \exp(t)]^x - I$$

D'où

$$2I = [\sin(t) \exp(t)]^x + [\cos(t) \exp(t)]^x.$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) \exp(x).$$

Commentaires : Il existe plusieurs autres méthodes dont celle de passer par les complexes que nous reverrons ou celle de chercher une primitive sous la forme : $x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) \exp(x)$. En dérivant et identifiant, on trouvera $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

$$7. \int^x \ln(1+t^2) dt = x \ln(1+x^2) - 2 \int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan(x).$$

$$8. \int^x e^{\arccos(t)} dt = x e^{\arccos(x)} + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} dt \\ = x e^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos(x)} + \int^x \sqrt{1-t^2} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} dt$$

$$\text{Donc, } \int^x e^{\arccos(t)} dt = \frac{1}{2} (x e^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos(x)}).$$

$$9. \int^x \cos(t) \ln(1+\cos(t)) dt = \sin(x) \ln(1+\cos(x)) - \int^x \sin(t) \frac{-\sin(t)}{1+\cos(t)} dt \\ = \sin(x) \ln(1+\cos(x)) - \int^x \frac{\cos^2(t)-1}{\cos(t)+1} dt \\ = \sin(x) \ln(1+\cos(x)) - \int^x (\cos(x)-1) dx \\ = \sin(x) \ln(1+\cos(x)) - \sin(x) + x.$$

$$10. \frac{x}{(x+1)^2} e^x = \frac{1}{x+1} e^x - \frac{1}{(x+1)^2} e^x = \left(\frac{1}{x+1} e^x \right)' \text{ et donc } \int^x \frac{t e^t}{(t+1)^2} dt = \frac{e^x}{x+1}.$$

$$11. \int^x \left(\frac{t}{e} \right)^t \ln(t) dt = \int^x e^{t \ln(t)-t} d(t \ln(t) - t) = e^{x \ln(x)-x} = \left(\frac{x}{e} \right)^x dt.$$

$$12. \int^x t^n \ln(t) dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$13. \int^x \sin(\ln(t)) dt = x \sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t)) dt = x \sin(\ln(x)) - x \cos(\ln(x)) - \int^x \sin(\ln(t)) dt$$

$$\text{Donc, } \int^x \sin(\ln(t)) dt = \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))).$$

$$\text{De même, } \int^x \cos(\ln(t)) dt = x \cos(\ln(x)) + \int^x \sin(\ln(t)) dt = x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t)) dt.$$

$$\text{Donc, } \int^x \cos(\ln(t)) dt = \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))).$$

$$14. \int^x \arccos(t) dt = x \arccos(x) + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}.$$

$$15. \int_0^1 \arctan(t) dt = \left[t \arctan(t) \right]_0^1 - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt = \left[t \arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$16. \text{ On considère intelligemment, } u : x \mapsto \frac{1}{2}(1+x^2) \text{ et } v : x \mapsto \arctan(x) \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} :$$

$$\int^x t \arctan(t) dt = \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan(x) - \frac{1}{2} \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan(x) - \frac{1}{2}x.$$

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_1^e t \ln^n(t) dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_3 .

Correction :

$$1. I_0 = \int_1^e t \, dt = \frac{1}{2} (e^2 - 1).$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$, on peut utiliser une IPP pour I_1 :

$$I_1 = \int_1^e t \ln(t) \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln(t) \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e t \, dt = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

2. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ et $t \mapsto \ln^{n+1}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$, on peut utiliser une IPP pour I_{n+1} :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} &= \int_1^e t \ln^{n+1}(t) \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln^{n+1}(t) \right]_1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e t \ln^n(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{n+1}{2} I_n. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, $I_2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{2}{2} I_1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 + 1) = \frac{1}{4} (e^2 - 1)$.

$$\text{Et, } I_3 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2} I_2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{8} (e^2 - 1) = \frac{1}{8} (e^2 + 3).$$

Commentaires : La relation de récurrence trouvée à la question (2) permet de trouver une forme explicite de I_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{e^2}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{2^k (n-k)!} - (-1)^n \frac{n!}{2^n} I_0.$$

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^x (\ln(t))^n \, dt$.

- À l'aide d'une intégration par parties, simplifier $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Pour $n \geq 2$, exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} \right)$ en fonction de I_n .
- En déduire une expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $x \mapsto t$ et $x \mapsto \ln^{n+1}(t)t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Une IPP s'écrit alors :

$$I_{n+1} = \int_1^x \ln^{n+1}(t) \, dt = \left[t \ln^{n+1}(t) \right]_1^x - (n+1) \int_1^x t \times \frac{1}{t} \ln^n(t) \, dt = x \ln^{n+1}(x) - (n+1) I_n.$$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!} = \frac{x \ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

2. Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{I_k}{k!} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{I_k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{I_k}{k!} - \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{I_k}{k!} \\ &= (-1)^1 \frac{I_1}{1!} + (-1)^{n-1} \frac{I_n}{n!} = -I_1 - (-1)^n \frac{I_n}{n!} \end{aligned}$$

Avec $I_1 = x \ln(x) - x + 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} \right) = -x \ln(x) + x - 1 - (-1)^n \frac{I_n}{n!}.$$

3. D'après la question précédente, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^n n! \left(-x \ln(x) + x - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x \ln^{k+1}(x)}{(k+1)!} \right) \\ &= (-1)^n n! \left((-1)^1 \frac{x \ln^1(x)}{1!} + (-1)^0 \frac{x \ln^0(x)}{0!} - 1 + \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{x \ln^k(x)}{k!} \right) \\ &= (-1)^n n! \left(-1 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x \ln^k(x)}{k!} \right). \end{aligned}$$

Formule encore valide pour $n = 1$.

Exercice 12 (Intégrales de Wallis) : On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Pour $n \geq 2$, donner une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .
3. En déduire que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Correction :

1. Rapidement, on a :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2. Soit $n \geq 2$.

Les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos^{n+1}(t) dt = \underbrace{\left[\sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt \quad (\text{par linéarité}) \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \iff (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. Pour $n \geq 1$, notons $u_n = nW_n W_{n-1}$.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)W_{n+1}W_n - nW_nW_{n-1} = W_n \left((n+1)W_{n+1} - nW_{n-1} \right) = 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante dès $n = 1$, de valeur $u_1 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$.

Un peu d'histoire : John Wallis, né le 23 novembre **1616** à Ashford, et mort le 28 octobre **1703** à Oxford, est un mathématicien anglais.

Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

Wallis a fait ses études à Cambridge, à l'Emmanuel College d'abord, puis au Queens' College. Étudiant d'abord la théologie, il est ordonné en 1640. Il se réoriente ensuite vers les mathématiques et montre un grand talent pour la cryptographie durant la guerre civile, en décryptant les messages des royalistes. Il occupe ensuite la chaire savillienne de géométrie à l'université d'Oxford, succédant à Peter Turner, renvoyé car royaliste. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society.

- Ses travaux en mathématiques concernent principalement le calcul différentiel et intégral où il introduit les intégrales de Wallis d'allure générale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.
- On lui doit également le symbole de l'infini, ∞ , que l'on utilise de nos jours, ainsi que l'infinitésimal $\frac{1}{\infty}$ dont il s'est servi dans des calculs d'aire.
- Il assista l'astronome Jeremiah Horrocks pour ses calculs d'éphémérides, notamment lors du transit de Vénus de 1639.
- Il résolut le problème de la voûte quarrable (1692), posé par Vincenzo Viviani : trouver une fenêtre dans une voûte hémisphérique de sorte que le reste de la voûte soit quarrable, c'est-à-dire dont l'aire puisse s'écrire c^2 , où c est un nombre constructible à la règle et au compas.
- La formule du produit de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

est équivalente au développement en fraction continue généralisée de $\frac{4}{\pi}$ trouvé par William Brouncker et semble avoir été inspirée par celui-ci.

III/ Changement de variables _____

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et 1-périodique et F une primitive de f .

À quelle condition F est-elle également 1-périodique ? Généraliser le résultat pour f qui est T -périodique.

Exercice 14 : Soit $f : [-1; 1] \mapsto \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(t)) dt$.

Correction : Comme $t \mapsto \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$, la fonction $t \mapsto f(\cos(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale est définie.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. On pose donc $u = \frac{\pi}{2} - t$, changement de variables strictement décroissant de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et lui-même.

D'où,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t)) dt \stackrel{dt=-du}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(u)) du.$$

Exercice 15 : Calculer les intégrales suivantes (a réel donné)

1. $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx \quad (0 < a).$

3. $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + |x(1-x)|} dx.$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x) dx.$

4. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x}.$

Correction :

1. On pose $t = \frac{1}{x}$ et donc $x = \frac{1}{t}$ et $dx = -\frac{1}{t^2} dt$.

On obtient :

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx = - \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} + 1} \frac{1}{t^2} dt = - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt = -I.$$

Donc, $I = 0$.

2. On pose $u = \frac{1}{x}$ i.e. $du = -\frac{dx}{x^2} = u^2 dx$ et on obtient :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x) dx = \int_2^{\frac{1}{2}} (1 + u^2) \arctan\left(\frac{1}{u}\right) \left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

Sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, $\arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$:

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 1 + \frac{1}{u^2} du - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \arctan(u) du \\ &= \frac{\pi}{2} \left[u - \frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^2 - I = \frac{3\pi}{2} - I. \end{aligned}$$

Donc, $I = \frac{3\pi}{4}$.

3. $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + |x(1-x)|} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 + x(x-1)} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + x(1-x)} dx = I_1 + I_2.$

Pour I_1 , $1 + x(x-1) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh}(t)$ et donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch}(t) dt$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2(t) + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch}(t) dt = \frac{3}{4} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} \operatorname{ch}^2(t) dt = \frac{3}{16} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{2} (e^{-2\ln(\sqrt{3})} - e^{2\ln(2-\sqrt{3})}) - \frac{1}{2} (e^{2\ln(\sqrt{3})} - e^{-2\ln(2-\sqrt{3})}) + 2(-\ln(\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3})) \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - (2-\sqrt{3})^2 \right) - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} \right) - 2\ln(2\sqrt{3}-3) \right) \\ &= \frac{3}{16} \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{2} (-(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2) - 2\ln(2\sqrt{3}-3) \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{8} \ln(2\sqrt{3}-3). \end{aligned}$$

Pour I_2 , $1 + x(1-x) = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(t)$ et donc $dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(t) dt$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(t) dt = \frac{5}{4} \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{5}{8} \int_{-\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{5}{4} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{5}{8} \left(2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2 \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}} \right) \quad \text{avec } \frac{1}{2} \sin(2t) = \sin(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)}, \\ &= \frac{5}{4} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{5}{4} \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{5}{4} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + |x(1-x)|} dx = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{8} \ln(2\sqrt{3}-3) + \frac{5}{4} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} 4. \quad I &= \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x} dx = \int_\pi^0 \frac{(\pi - u) \sin(\pi - u)}{1 + \cos^2(\pi - u)} (-du) \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u} du - \int_0^\pi \frac{u \sin u}{1 + \cos^2 u} du \\ &= -\pi \left[\arctan(\cos u) \right]_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I. \end{aligned}$$

Donc, $I = \frac{\pi^2}{4}.$

Exercice 16 : Déterminer les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\int^x x^2 \ln |x| dx$

2. $\int^x x \ln^2 x dx$

3. $\int^x x^2 \arctan(x) dx$

4. $\int^x \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx$

5. $\int^x \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

6. $\int^x \frac{1}{x(x^5-1)} dx \quad (u = x^5)$

7. $\int^x \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx \quad (x = \tan(t))$

8. $\int^x \frac{1}{x\sqrt{x(x-1)}} dx \quad \left(x = \frac{1}{t}\right)$

Correction :

5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ n'est continue que $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. On considère donc $x \in I$ où I est un segment d'intersection vide avec $[-1; 1]$.

Sur cet intervalle, on pose alors $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ qui est bien strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ (en x) sur I .

On remplace dans l'intégrande avec $dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2} du$:

$$\int^x \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int^u \frac{1-u^2}{1+u^2} \times u \times \frac{4u}{(1-u^2)^2} du = \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du.$$

On est ramené à la primitivation d'une fraction rationnelle, ce qui passe par une décomposition en éléments simples.

On trouve :

$$\frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} = \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u)(1+u)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{c}{1-u} + \frac{d}{1+u}.$$

Pour les pôles 1 et -1 , on trouve rapidement $c = 1$ et $d = 1$.

En multipliant les deux membres par $1+u^2$, évaluant en $u = i$ puis identifiant parties réelle et imaginaire, on trouve aussi $a = 0$ et $b = -2$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \int^x \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du \\ &= \int^u -\frac{2}{1+u^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} du \\ &= \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 2 \arctan(u) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right). \end{aligned}$$

On vérifiera que chaque terme est correctement défini sur I .

Commentaires : Si jamais la fonction argth avait été au programme, le résultat, plus symétrique, aurait été plus joli puisqu'on aurait trouvé :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du = \int^u -\frac{2}{1+u^2} + \frac{2}{1-u^2} du \\ &= 2(\operatorname{argth}(u) - \arctan(u)) \\ &= 2\left(\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right). \end{aligned}$$

IV/ Fonctions rationnelles

Exercice 17 : Calculer les primitives suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\int \frac{x^5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

8. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

15. $\int \frac{dx}{3x^2 + x + 1}$

2. $\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx$

9. $\int \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}} dx$

16. $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}$

3. $\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^n + 1}}{x} dx$

17. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$

4. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

11. $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx$

18. $\int \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} dx$

5. $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2} dx$

12. $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

19. $\int \frac{x^3}{(x^2 + x + 1)^2} dx$

6. $\int \frac{2x+1}{x^3 - 1} dx$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

7. $\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} dx$

14. $\int \frac{dx}{3x^2 - 5x - 2}$

Correction :

1. $X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1).$

Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \frac{X^5}{X^3 - X^2 - X + 1}$ est de la forme $aX^2 + bX + \frac{d_1}{X-1} + \frac{d_2}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+1}.$

Détermination de a , b et c :

La division euclidienne de X^5 par $X^3 - X^2 - X + 1$ s'écrit $X^5 = (X^2 + X + 2)(X^3 - X^2 - X + 1) + 2X^2 + X - 2.$ On a donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = 2.$

$$e = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}. \text{ Puis, } d_2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}. \text{ Enfin, } x=0 \text{ fournit}$$

$$0 = c - d_1 + d_2 + e \text{ et donc, } d_1 = -2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}. \text{ Finalement,}$$

$$\frac{X^5}{X^3 - X^2 - X + 1} = X^2 + X + 2 - \frac{9}{4} \frac{1}{X-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ ou $] 1, +\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4} \ln|x+1|.$$

2. On pose $u = x^2$ et donc $du = 2x dx$

- $$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{2} (\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1}) \\ &= \frac{1}{2} (\ln \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}). \end{aligned}$$
3. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{2x} - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{dx}{2(x+2)}$
 $= \frac{1}{2} (\ln|x| + \ln|x+2|) - \ln|x+1| + C.$
4. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1|.$
5. $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2} dx = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x}.$
 $= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \ln|x|.$
6. $\int \frac{2x+1}{x^3-1} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x}{x^2+x+1} dx$
 $= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$
 $= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$
 $= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$
7. $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = -3 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x-3}$
 $= -3 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| + C.$
8. $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} dx = \int dx - 2 \int \frac{x}{x^2+x+1} dx$
 $= x - \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$
9. $\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \arctan(x) - 2 \int^x \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx.$

Dans la dernière intégrale, on pose $u = \sqrt{x}$ et donc $x = u^2$ puis, $dx = 2u du$.

On obtient $\int^x \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \int^x \frac{2u^2}{u^4+1} du.$

Mais,

$$\begin{aligned} \frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int^x \frac{2u^2}{u^4+1} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\arctan(\sqrt{2}u-1) + \arctan(\sqrt{2}u+1)),$$

et donc,

$$\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \arctan(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1} \right) - \sqrt{2} (\arctan(\sqrt{2x}-1) + \arctan(\sqrt{2x}+1)).$$

10. En posant $u = x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x} dx = \int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int^x \frac{\sqrt{u+1}}{u} du,$$

puis en posant $v = \sqrt{u+1}$ et donc $u = v^2 - 1$ et $du = 2v dv$, on obtient

$$\int^x \frac{\sqrt{u+1}}{u} du = \int^x \frac{v}{v^2-1} 2v dv = 2 \int^x \frac{v^2-1+1}{v^2-1} dv = 2v + \ln \left| \frac{1-v}{1+v} \right|.$$

Finalement,

$$\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x} dx = \frac{1}{n} (2\sqrt{x^n+1} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}} \right|).$$

19. La fonction rationnelle $\varphi : x \mapsto \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}$ admet une décomposition en éléments simples (qui n'est pas au programme) de deuxième espèce de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les coefficients :

- $(x^2+x+1)^2 \varphi(x) \Big|_{x=j} = j^3 = aj+b \iff 1 = aj+b \implies a=0 \text{ et } b=1.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\varphi(x) = 1 \implies 1=c.$
- $\varphi(x) \Big|_{x=0} = 0 \implies 0=b+d \implies d=-1.$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1}.$

Primitivons chaque terme séparément :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t-1}{t^2+t+1} dt &= \frac{1}{2} \int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - \frac{3}{2} \int^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Et,

$$\int^x \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \int^x \frac{dt}{\left((t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right)^2} = \frac{16}{9} \int^x \frac{dt}{\left(1 + \frac{1}{3} (2t+1)^2 \right)^2}$$

En posant $\tan(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)$ i.e. $(1+\tan^2(u)) du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt,$

$$\begin{aligned} &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int^u \frac{du}{1+\tan^2(u)} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int^u \cos^2(u) du \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \int^u 1 + \cos(2u) du = \frac{4\sqrt{3}}{9} u + \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin(2u) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sin(2 \arctan(v)) = 2 \sin(\arctan(v)) \cos(\arctan(v)) = 2 \tan(\arctan(v)) \cos^2(\arctan(v)) = \frac{2v}{1+v^2},$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(2t+1)}{1 + \frac{(2t+1)^2}{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int^x \frac{t^3}{(t^2+t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

V/ Fonctions trigonométriques _____

Exercice 18 : Déterminer les primitives suivantes, en précisant, si nécessaire, les intervalles de validité des calculs :

1. $\int^x \cos(2t) e^{-t} dt.$
2. $\int^x \sin^2(t) e^t dt.$
3. $\int^x x^2 e^t \sin(t) dt.$
4. $\int^x \sin^8(t) \cos^3(t) dt$
5. $\int^x \cos^4(t) dt$
6. $\int^x \cos^{2003}(t) \sin(t) dt$
7. $\int^x \cos(t) \sin(t) \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) dt.$
8. $\int^x \operatorname{ch}^3(t) dt$
9. $\int^x \cos^4(t) dt$
10. $\int^x \operatorname{sh}^4(t) dt.$
11. $\int^x \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad \int^x \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}.$
12. $\int^x \frac{1}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad \int^x \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$
13. $\int^x \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \sin(x)}.$
14. $\int^x \frac{1}{2 + \sin^2(x)}.$
15. $\int^x \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}.$
16. $\int^x \frac{\cos(3x)}{\sin(x) + \sin(3x)}.$
17. $\int^x \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$
18. $\int^x \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)} dx.$
19. $\int^x \frac{3 - \sin(x)}{2 \cos(x) + 3 \tan(x)} dx$
20. $\int^x \frac{1}{7 + \tan(x)} dx$
21. $\int^x \frac{1}{2 + \sin(x) + \cos(x)} dx$

Correction :

1. $\int^x \cos(2t) e^{-t} dt = -\frac{\sin(2x) + 2 \cos(2x)}{5} e^{-x}.$
2. $\int^x e^t \sin^2(t) dt = -\frac{2 \sin(2x) + \cos(2x) - 5}{10} e^x.$
3. $\int^x x^2 e^x \sin x dx = \operatorname{Im} \left(\int^x x^2 e^{(1+i)x} dx \right).$

Or,

$$\begin{aligned}\int^x x^2 e^{(1+i)x} dx &= x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int^x x e^{(1+i)x} dx = x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i} \left(x \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int^x e^{(1+i)x} dx \right) \\ &= x^2 \frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + ixe^{(1+i)x} - i \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \\ &= e^x \left(\frac{1}{2} x^2 (1-i)(\cos x + i \sin x) + ix(\cos x + i \sin x) - \frac{1}{2}(1+i)(\cos x + i \sin x) \right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int^x x^2 e^x \sin x dx = e^x \left(\frac{x^2}{2} (\cos x + \sin x) - x \sin x - \frac{1}{2} (\cos x - \sin x) \right).$$

4. $\int^x \sin^8(t) \cos^3(t) dt = \frac{1}{9} \sin^9(x) - \frac{1}{11} \sin^{11}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\int^x \cos^4(t) dt = \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\int^x \cos^{2003}(t) \sin(t) dt = -\frac{1}{2004} \cos^{2004}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\int^x \cos(t) \sin(t) \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) dt = \frac{1}{16} (\sin(2x) \operatorname{ch}(2x) - \cos(2x) \operatorname{sh}(2x))$.
8. $\int^x \operatorname{ch}^3(t) dt = \operatorname{sh}(t) + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3(t)$ ou $\frac{1}{12} \operatorname{sh}(3t) + \frac{3}{4} \operatorname{sh}(t)$.
9. $\int^x \cos^4(t) dt = \frac{1}{32} (\sin(4t) + 8 \sin(2t) + 12t)$.
10. $\int^x \operatorname{sh}^4(t) dt = \frac{1}{32} (\operatorname{sh}(4t) - 8 \operatorname{sh}(2t) + 12t)$.
11. $\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right|$, sur $]k\pi; (k+1)\pi[$ avec un changement de variable $u = \cos(x)$ ou $u = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$.
12. $\int \frac{dx}{\tan(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln |\sin(x)|$ et $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln |\operatorname{sh}(x)|$.
13. $\int \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x - \sin(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos(x)}{x - \sin(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |x - \sin(x)|$.
14. $\frac{1}{2 + \sin^2(x)} dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2(x)} + \tan^2(x)} \frac{dx}{\cos^2(x)} = \frac{1}{2 + 3 \tan^2(x)} d(\tan(x))$, et en posant $u = \tan(x)$,

$$\int \frac{1}{2 + \sin^2(x)} dx = \int \frac{1}{2 + 3u^2} du = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} u \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan(x) \right).$$

$$15. \text{ Posons } I = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \text{ et } J = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx.$$

$$\text{Alors, } I + J = \int dx = x \text{ et } I - J = \int \frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \ln |\cos(x) + \sin(x)|.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \frac{1}{2} (x + \ln |\cos(x) + \sin(x)|).$$

ou bien, en posant $u = x - \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})} dx = \int \frac{\cos(u + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos u} du = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} (u + \ln |\cos u|) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} + \ln \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x) + \sin(x))\right|\right) \\ &= \frac{1}{2} (x + \ln |\cos(x) + \sin(x)|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \frac{\cos(3x)}{\sin(x) + \sin(3x)} &= \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos(x)}{4 \sin(x) - 4 \sin^3 x} = \frac{1}{4} \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos(x)}{\sin(x)(1 - \sin^2(x))} = \frac{1}{4} \left(\frac{4 \cos(x)}{\sin(x)} - \frac{3}{\sin(x) \cos(x)} \right) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{3}{2 \sin(2x)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin(x) + \sin(3x)} dx = \ln |\sin(x)| - \frac{3}{4} \ln |\tan(x)|.$$

$$17. \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2 \sin^2(x) \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x), \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx &= \int \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)} dx = \int \frac{1}{2 - \sin^2 u} du \text{ (en posant } u = 2x) \\ &= \int \frac{1}{1 + \cos^2 u} du = \int \frac{1}{1 + \frac{1}{1+v^2}} \frac{dv}{1+v^2} \text{ (en posant } v = \tan u) \\ &= \int \frac{dv}{v^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$$18. \text{ Multiplier et diviser par } \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x), \text{ ou passer en } e^x : \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2x)}{4} - \frac{\operatorname{ch}(2x)}{4} \text{ ou } \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}.$$

$$19. \int \frac{3 - \sin(x)}{2 \cos(x) + 3 \tan(x)} dx = -\frac{1}{5} \ln(2 - \sin(x)) + \frac{7}{10} \ln |1 + 2 \sin(x)| + c \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} [2\pi], -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\} \text{ avec un changement de variable } u = \sin(x).$$

$$20. \int \frac{1}{7 + \tan(x)} dx = \frac{7}{50} x + \frac{1}{50} \ln |\tan(x) + 7| + \frac{1}{50} \ln |\cos(x)| \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \arctan(-7) + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ avec un changement de variable } u = \tan(x).$$

$$21. \int \frac{1}{2 + \sin(x) + \cos(x)} dx = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1 + \tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}}\right) \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ avec un changement de variable } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 19 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} dx.$$

Correction :

$$1. \text{ Notons } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(x)} dx.$$

Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait intégrer!).

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$ on a $x = \arctan \frac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin(x)$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ alors $t = \tan \frac{x}{2}$ varie de $t = 0$ à $t = 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\ &= \left[\frac{-2}{1+t} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

2. Notons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} dx$.

Alors,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 20 (Diverses) : Calculer les primitives ou intégrales suivantes.

1. $\int^x \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} dx$.

6. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.

11. $\int_0^x \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ avec $0 < x < a$.

2. $\int^x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$.

7. $\int^x \sqrt{a^2-x^2} dx$.

12. $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$.

3. $\int^x x^3 e^x dx$.

8. $\int^x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

13. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

4. $\int \operatorname{ch}(t) \sin(t) dt$.

9. $\int_0^x \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}} dx$ pour $0 < x < 1$.

14. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

5. $\int_{-1}^1 (\arccos(x))^2 dx$.

10. $\int^x \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

15. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7} dx$.

Correction :

2. On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx = \frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2} du$.

Sur $]1, +\infty[$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= -2 \int u \frac{2u}{(u^2-1)^2} du \\ &= 2 \frac{u}{u^2-1} - 2 \int \frac{1}{u^2-1} du \\ &= \frac{2u}{u^2-1} + 2 \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \\ &= 2\sqrt{x^2-1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right|\end{aligned}$$

3. Intégrations par parties : $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$.
4. Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}(t) \sin(t) - \operatorname{ch}(t) \cos(t))$.
5. Intégrations par parties (2) : $\int_{-1}^1 (\arccos(x))^2 dx = \pi^2 + 4$.
6. Intégrations par parties : $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$.
7. Changement de variable $x = a \sin u$: $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$.
8. Changement de variable $u = e^x$: $\frac{2}{3} \sqrt{e^x + 1} (e^x - 2)$.
9. Changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$: $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.
10. Changement de variable $t = \arcsin(x)$: $\frac{1}{2}(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}) + C$.
11. Changement de variable $x^3 = u^2$: $\frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\frac{x^3}{a^3}}$.
12. Primitives : $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan^2(t) \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$.
13. Changement de variable ou intégration par parties : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.
14. Changement de variable $u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
15. Changement de variable $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7} dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Techniques d'intégration

1. Calculer $\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{dt}{\pi - t}$.

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{dt}{\pi - t} = \left[-\ln(|\pi - t|) \right]_{2\pi}^{3\pi} = \left[-\ln(t - \pi) \right]_{2\pi}^{3\pi} = -\ln(2).$$

2. On considère $f : x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x+3)}$

(a) Sur quel intervalle I , la fonction f admet-elle une primitive ?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; +\infty[$.

(b) Donner la décomposition en éléments simples de f sur I .

La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

— Pour $x = 0$, $0 = -a + \frac{b}{3}$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} \right) = a + b$.

— a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} -3a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

On trouve $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$.

La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+3} \right).$$

(c) En déduire une primitive de f sur I .

D'après les questions précédentes,

$$\forall x \in I, \int^x f(t) dt = \frac{1}{4} \int^x \left(\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+3} \right) dt = \frac{1}{4} \ln(|(x-1)(x+3)|(x+3)^2).$$

(d) Calculer $\int_{-2}^0 f(t) dt$.

Sur $[-2; 0]$, $(x-1)(x+3) < 0$ donc,

$$\int_{-2}^0 f(t) dt = \frac{1}{4} \left[\ln((1-x)(x+3)^3) \right]_{-2}^0 = \frac{1}{4} (\ln(27) - \ln(3)) = \frac{1}{2} \ln(3).$$

3. On considère $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)(x - 2)}$.

(a) Sur quel intervalle I , la fonction f admet-elle une primitive ?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

(b) Donner la décomposition en éléments simples de f sur I .

La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{a}{x - 2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

$$- a = (x - 2)f(x) \Big|_{x=2} = \frac{1}{5}.$$

$$- a + b = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \implies b = -\frac{1}{5}.$$

$$- \frac{1}{2} = f(0) = -\frac{a}{2} + c \implies c = -\frac{2}{5} \text{ ou } bi + c = (x^2 + 1)f(x) \Big|_{x=i} = \frac{1}{i - 2} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \implies c = -\frac{2}{5}.$$

La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{x + 2}{x^2 + 1} \right).$$

(c) En déduire une primitive de f sur I .

D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \int^x f(t) dt &= \frac{1}{5} \int^x \left(\frac{dt}{t - 2} - \frac{t + 2}{t^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \ln(|x - 2|) - \frac{1}{10} \int^x \frac{2t}{t^2 + 1} dt - \frac{1}{5} \int^x \frac{2}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{5} \ln(|x - 2|) - \frac{1}{10} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{5} \arctan(x). \end{aligned}$$

Techniques d'intégration

1. Calculer $\int_{2e}^{3e} \frac{dt}{e-t}$.

$$\int_{2e}^{3e} \frac{dt}{e-t} = \left[-\ln(|e-t|) \right]_{2e}^{3e} = \left[-\ln(t-e) \right]_{2e}^{3e} = -\ln(2).$$

2. On considère $f : x \mapsto \frac{x}{(x+1)(x-2)}$

(a) Sur quel intervalle I , la fonction f admet-elle une primitive ?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$.

(b) Donner la décomposition en éléments simple de f sur I .

La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

— Pour $x = 0$, $0 = a - \frac{b}{2}$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \right) = a + b$.

— a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

On trouve $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right).$$

(c) En déduire une primitive de f sur I .

D'après les questions précédentes,

$$\forall x \in I, \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t-2} \right) dt = \frac{1}{3} \ln(|x+1|(x-2)^2).$$

(d) Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.

Sur $[0; 1]$, $x+1 \geq 0$ donc,

$$\int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{1}{3} \ln((x+1)(x-2)^2) \right]_0^1 = \frac{1}{3} (\ln(2) - \ln(4)) = -\frac{1}{3} \ln(2).$$

3. On considère $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$.

(a) Sur quel intervalle I , la fonction f admet-elle une primitive ?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $] -\infty ; 1[\cup] 1 ; 2[\cup] 2 ; +\infty [$.

(b) Donner la décomposition en éléments simple de f sur I .

La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

$$- a = (x-1)^2 f(x) \Big|_{x=1} = -1.$$

$$- c = (x-2) f(x) \Big|_{x=2} = 1.$$

$$- b + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 \implies b = -1 \text{ ou } -\frac{1}{2} = f(0) = a - b - \frac{c}{2} \implies b = -1.$$

La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall x \in I, f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

(c) En déduire une primitive de f sur I .

D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \int^x f(t) dt &= - \int^x \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} \right) dt. \\ &= \frac{1}{x-1} - \ln(|x-1|) + \ln(|x-2|) \\ &= \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right). \end{aligned}$$

Une fonction définie par une intégrale

Lorsque cela a un sens, on pose $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

1. *Question liminaire* : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}$.
2. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En justifiant soigneusement le raisonnement, établir que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{(3x + 4\sqrt{x} - 1) \ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x} + x)}.$$

4. (a) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, factoriser $3x + 4\sqrt{x} - 1$.
(b) En déduire le signe de F' sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de F .

Par commodité d'écriture, on pourra poser $\alpha = \left(\frac{\sqrt{7} - 2}{3} \right)^2$.

5. *Limite en $+\infty$ et nature de la branche infinie.*

- (a) Après avoir encadré $\ln(t)$ et $\frac{1}{1+t}$ sur $[\sqrt{x}; x]$ pour $x \geq 1$, démontrer que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1 + \sqrt{x}}.$$

- (b) Conclure sur la limite de F en $+\infty$.

- (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. Quelle interprétation graphique donnez vous de ce résultat ?

6. *Prolongement et dérivabilité de F en 0.*

- (a) Pour tout $x \in]0; 1[$, montrer que :

$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}.$$

- (b) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$.

La fonction $\tilde{F} : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est alors continue sur $[0; +\infty[$.

$$x \mapsto \begin{cases} F(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que $\tilde{F}$ est un prolongement par continuité de F en 0.

Dans toute la suite du devoir, on confondra dorénavant $\tilde{F}$ et F .

- (c) En étudiant la limite de son taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de F en 0 et donner une interprétation graphique.

7. Avec tous les éléments étudiés, tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

On prendra 10 cm pour 1 unité et on se restreindra à l'intervalle $[0; 2]$ (donc ne pas tracer la branche infinie).
On prendra, de plus, comme approximation $\alpha \simeq 0,05$ et $F(\alpha) \simeq 0,32$.

Une fonction définie par une intégrale

Commentaires :

« *théorème fondamental* » ne prend pas de « *e* » à la fin.

Lorsque cela a un sens, on pose $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

1. *Question liminaire* : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)}$.

Correction : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on factorise par les termes prépondérants en $+\infty$:

$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{2}}_{\substack{\rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ x \rightarrow +\infty}}.$$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on obtient aisément

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} = +\infty.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on factorise, cette fois, par les termes prépondérants en 0 :

$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x} = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \underbrace{(\sqrt{x} - 1)}_{\substack{\rightarrow -1 \\ x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln(x).$$

D'après les théorèmes sur les croissances comparées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln(x) = 0$, donc, avec les théorèmes sur limites de produits, on obtient aisément

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x} = 0.$$

2. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Soit $f: t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t}$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de $\ln$ et du polynôme $t \mapsto 1+t$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).

En outre, $x \in \mathbb{R}_+^*$ entraîne que $[\sqrt{x}; x]$ ou $[x; \sqrt{x}]$ suivant que $x \leq 1$ ou $x \geq 1$ sont deux segments inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est bien continue sur ces deux segments donc $F(x)$ est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaires : Il est très important de ne pas oublier de mentionner que l'intervalle formé par les bornes $\sqrt{x}$ et x est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaires : *Comprenez bien ce que veut dire « définie » et faites la différence avec qui doit l'être et qui doit être continue ou non nul ou dans tel intervalle ou ... Encore une fois et malheureusement pas la dernière, « définie » veut dire que ça existe, qu'on peut le calculer, l'appréhender, que c'est uniquement déterminé et que l'on peut donc jouer avec. Ce n'est pas un mot vague et, d'une manière générale, on n'écrit pas un symbole comme $\int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$, on ne divise pas, on ne compose pas, ... sans se demander si les objets que l'on considère existe... en un mot sont **définis**.*

3. En justifiant soigneusement le raisonnement, établir que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{(3x + 4\sqrt{x} - 1) \ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x}+x)}.$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t)}{1+t} dt = G(x) - G(\sqrt{x}),$$

en posant $G: x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \int_1^x f(t) dt$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $G' = f$.

De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel G est $\mathcal{C}^1$, donc par composition $x \mapsto G(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par différence, F est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) &= G'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} G'(\sqrt{x}) \\ &= f(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \\ &= \frac{\ln(x)}{1+x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\ln \sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln(x)}{4} \left(\frac{4}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}+x} \right) \\ &= \frac{\ln(x)}{4} \frac{4(\sqrt{x}+x) - (1+x)}{(1+x)(\sqrt{x}+x)} \\ &= \frac{(3x + 4\sqrt{x} - 1) \ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x}+x)}. \end{aligned}$$

4. (a) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, factoriser $3x + 4\sqrt{x} - 1$.

Correction : On reconnaît un trinôme en $\sqrt{x}$. En posant $t = \sqrt{x}$, on a

$$3x + 4\sqrt{x} - 1 = 3t^2 + 4t - 1.$$

Après calcul du discriminant, les racines sont $\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$, d'où la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 3x + 4\sqrt{x} - 1 = 3 \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{7}+2}{3} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{7}-2}{3} \right).$$

(b) En déduire le signe de F' sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de F .

Par commodité d'écriture, on pourra poser $\alpha = \left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)^2$.

Correction : D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{3}{4} \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{7}+2}{3}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)}{(1+x)(\sqrt{x}+x)} \ln(x),$$

qui est donc du signe de $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right) \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction affine change de signe pour $x = \left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)^2 = \frac{11-4\sqrt{7}}{9} = 1 - \underbrace{\frac{2-4\sqrt{7}}{9}}_{<0} < 1$.

On en déduit le tableau de signe pour $F'(x)$ et donc les variations de F :

x	0	α	1	$+\infty$		
$F'(x)$		+	0	-	0	+
F			$F(\alpha)$			$+\infty$
	0				0	

Noter que $F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$.

Commentaires : Pas de valeurs approchées à ce stade et, d'une manière générale, jamais en mathématiques. Ces valeurs doivent à peine apparaître sur la courbe et nulle part ailleurs. N'allez pas gâcher la beauté des mathématiques par l'apport de choses imprécises, approchées, empiriques, physiques. :-)

5. Limite en $+\infty$ et nature de la branche infinie.

(a) Après avoir encadré $\ln(t)$ et $\frac{1}{1+t}$ sur $[\sqrt{x}; x]$ pour $x \geq 1$, démontrer que

$$\forall x \geq 1, \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1 + \sqrt{x}}.$$

Correction : Soit $x \in [1; +\infty[$. Alors, $\sqrt{x} \leq x$ et pour tout $t \in [\sqrt{x}; x]$, par croissance de $\ln$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \leq t \leq x & \quad (\text{croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}} & \quad (\text{décroissance de } t \mapsto \frac{1}{1+t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*). \end{aligned}$$

Par produit d'inégalités à termes **positifs**, on en déduit :

$$\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{1+x} \leq \frac{\ln(t)}{1+t} \leq \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}}.$$

Par croissance de l'intégrale (vu que $\sqrt{x} \leq x$) :

$$\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{1+x} \int_{\sqrt{x}}^x dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt \leq \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^x dt.$$

Donc, $\forall x \geq 1$,
$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1 + \sqrt{x}}.$$

(b) Conclure sur la limite de F en $+\infty$.

Correction : D'après la question (1), et le théorème de comparaison, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. Quelle interprétation graphique donnez vous de ce résultat ?

Correction : D'après l'encadrement établi en (5a), on obtient (après division par $x > 0$) :

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2x(1+x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{x(1 + \sqrt{x})}.$$

Déterminons les limites des minorant et majorant en factorisant par les termes prépondérants :

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2x(1+x)} = \frac{\ln(x)}{\underbrace{2x}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\underbrace{1 + \frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}},$$

Et,

$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{x(1 + \sqrt{x})} = \frac{\ln(x)}{x} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\ln(x)}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}}.$$

D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Le théorème de comparaison permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

On dit que la courbe de F présente une *branche parabolique dirigée selon* (Ox).

6. Prolongement et dérivabilité de F en 0.

(a) Pour tout $x \in]0; 1[$, montrer que :

$$\frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}.$$

Correction : $\forall x \in]0; 1[, x \leq \sqrt{x}$. On considère donc $t \in [x; \sqrt{x}]$ et, de même que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} x \leq t \leq \sqrt{x} &\implies \ln(x) \leq \ln(t) \leq \frac{1}{2} \ln(x) < 0 && \text{(croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ 0 < -\frac{1}{2} \ln(x) &\leq -\ln(t) \leq -\ln(x) && \text{(en multipliant par } -1) \\ \frac{1}{1+\sqrt{x}} &\leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x} && \left(\text{décroissance de } t \mapsto \frac{1}{1+t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \right) \end{aligned}$$

Par produit d'inégalités à termes **positifs**, on en déduit :

$$-\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}} \leq -\frac{\ln(t)}{1+t} \leq -\frac{\ln(x)}{1+x}.$$

Par croissance de l'intégrale (car $x \leq \sqrt{x}$), on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}} \int_x^{\sqrt{x}} dt &\leq -\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t)}{1+t} dt \leq -\frac{\ln(x)}{1+x} \int_x^{\sqrt{x}} dt \\ -\frac{1}{2} \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}} (\sqrt{x} - x) &\leq F(x) \leq -\frac{\ln(x)}{1+x} (\sqrt{x} - x) \quad \left(\text{car } -\int_x^{\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{x}}^x \right) \\ \text{Finalement, } \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} &\leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}. \end{aligned}$$

(b) En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$.

Correction : D'après la question (1) et le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0.$$

La fonction $\tilde{F} : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est alors continue sur $[0; +\infty[$.

$$x \mapsto \begin{cases} F(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que $\tilde{F}$ est un prolongement par continuité de F en 0.

Dans toute la suite du devoir, on confondra dorénavant $\tilde{F}$ et F .

(c) En étudiant la limite de son taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de F en 0 et donner une interprétation graphique.

Correction : Reprenons l'encadrement de la question (6a) :

$$\forall x \in]0; 1[, \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2(1+x)} \leq F(x) \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{1+x}.$$

D'où, x étant strictement positif et $F(0) = 0$, le taux de d'accroissement de F en 0 s'encadre par :

$$\forall x \in]0; 1[, \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2x(1+x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{x(1+x)}.$$

$$\text{Or, } \forall x \in]0; 1[, \frac{(x - \sqrt{x}) \ln(x)}{2x(1+x)} = \underbrace{\frac{1}{2(1+x)}}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0} \rightarrow \frac{1}{2}} \times \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0} \rightarrow -\infty} \underbrace{\ln(x)}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0} \rightarrow -\infty}.$$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = +\infty.$$

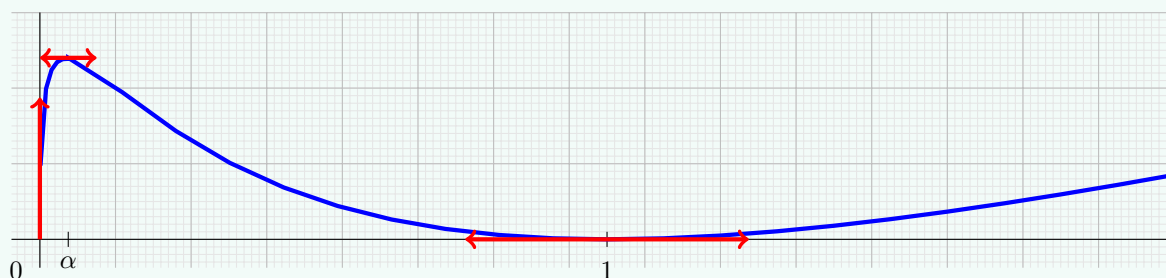
La fonction F n'est donc pas dérivable en 0 mais sa courbe y admet une (demi-)tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

7. Avec tous les éléments étudiés, tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

On prendra 10 cm pour 1 unité et on se restreindra à l'intervalle $[0; 2]$ (donc ne pas tracer la branche infinie).
On prendra, de plus, comme approximation $\alpha \simeq 0,05$ et $F(\alpha) \simeq 0,32$.

Correction : Reprenons, les éléments de l'étude :

- En 0, $F(0) = 0$ et la courbe y admet une tangente « verticale ».
- En α et 1, la courbe admet des extrema et une tangente « horizontale ».
- Au voisinage de l'infini, la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) .



Primitives

1. On note f et g les fonctions d'expression $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x-2}{x}\right)$.
 - (a) Donner les domaines de définition de f et g . On notera $\mathcal{D}$ le domaine de définition de g dans la suite de l'exercice.
 - (b) Donner la valeur de $f(2)$ et $g(2)$.
 - (c) Montrer que f et g sont à valeurs dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
 - (d) Donner une expression simple de $\sin^2(g(x))$ et $\sin^2(f(x))$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
En déduire que $f = g$.
 - (e) Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g' .
En déduire une autre façon de montrer que $f = g$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, l'intégrale $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt$ est correctement définie.
- (b) Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt = \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1.$$

3. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. À l'aide du changement de variable $u = f(t)$, exprimer $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt$ en fonction de $\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}$. *Indication : On pourra utiliser une intégration par parties pour conclure.*

4. Dédurre des questions précédentes une expression simple de $\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}$ pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Primitives

1. On note f et g les fonctions d'expression $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x-2}{x}\right)$.

(a) Donner les domaines de définition de f et g . On notera $\mathcal{D}$ le domaine de définition de g dans la suite de l'exercice.

Correction :

— La fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[-1; 1]$ si, et seulement si $-1 \leq \frac{x-2}{x} \leq 1$ i.e.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, -1 \leq \frac{x-2}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x-2}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2(x-1)}{x} \quad \text{et} \quad -\frac{2}{x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[\quad \text{et} \quad x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D} = [1; +\infty[. \end{aligned}$$

$x \geq 1$ donc $\mathcal{D}_f = [1; +\infty[$.

— La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $[-1; 1]$ si, et seulement si $-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ i.e.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, -1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \quad (\text{car } x \text{ positif}) \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Les fonctions f et g ont donc le même domaine de définition $\mathcal{D} = [1; +\infty[$.

(b) Donner la valeur de $f(2)$ et $g(2)$.

Correction : $f(2) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $g(2) = \frac{1}{2}\arccos(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

(c) Montrer que f et g sont à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction : $\forall x \in \mathcal{D}, \frac{1}{\sqrt{x}} \in [0; 1]$ donc $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

De même, $\forall x \in \mathcal{D}, \arccos\left(\frac{x-2}{x}\right) \in [0; \pi]$ donc $\forall x \in \mathcal{D}, g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Donner une expression simple de $\sin^2(g(x))$ et $\sin^2(f(x))$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

En déduire que $f = g$.

Correction : Pour tout $t \in [-1; 1]$, $\sin(\arcsin(t)) = t$.

$$\text{D'où, } \forall x \in \mathcal{D}, \sin^2(f(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

$$\text{De même, } \forall t \in \mathbb{R}, \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

$$\text{D'où, } \forall x \in \mathcal{D}, \sin^2(g(x)) = \frac{1 - \cos\left(\arccos\left(\frac{x-2}{x}\right)\right)}{2} = \frac{1 - \frac{x-2}{x}}{2} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{En conclusion, } \forall x \in \mathcal{D}, \sin^2(f(x)) = \sin^2(g(x)).$$

Or, d'après la question (1c), f et g sont à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\forall x \in \mathcal{D}, \sin(f(x)) \geq 0$ et $\sin(g(x)) \geq 0$.

Par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \sin(f(x)) = \sin(g(x)).$$

Enfin, par bijectivité, donc injectivité de $\sin$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = g(x).$$

Les fonctions f et g , définies sur le même intervalle et prenant les mêmes valeurs, sont donc égales : $f = g$.

(e) Donner le domaine de dérivabilité de g et calculer g' .

En déduire une autre façon de montrer que $f = g$.

Correction : En reprenant les inégalités de la question (1a), $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{x-2}{x}$ sont dérivables et à valeurs dans $] -1; 1[$ si, et seulement si $x \in]1; +\infty[$.

D'après les théorèmes sur la dérivabilité des fonctions composées, il en est de même pour les fonctions f et g sur $]1; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) &= \frac{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}} \\ g'(x) &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - (x-2)^2}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{4x-4}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout x de l'intervalle $\mathcal{D}$, $f'(x) = g'(x)$. Les fonctions f et g diffèrent donc d'une constante sur celui-ci :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) = g(x) + C.$$

Pour $x = 2 \in \mathcal{D}$, d'après la question (1b), $f(2) = g(2)$ donc $C = 0$ et les fonctions f et g coïncident sur $\mathcal{D}$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, l'intégrale $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt$ est correctement définie.

Correction : $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$, quotient de fonctions continues de dénominateur non nul, est continue et à valeurs dans $]1; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, l'intervalle $\left[2; \frac{1}{\sin^2(x)}\right]$ ou $\left[\frac{1}{\sin^2(x)}; 2\right]$ est strictement inclus dans $\mathcal{D} = [1; +\infty[$, intervalle sur lequel f est continue d'après la question (1a).

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt$ est donc correctement définie pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

- (b) Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt = \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1.$$

Correction : Par commodité d'écriture on notera $\left\{2; \frac{1}{\sin^2(x)}\right\}$, l'un des deux intervalles $\left[2; \frac{1}{\sin^2(x)}\right]$ ou $\left[\frac{1}{\sin^2(x)}; 2\right]$ suivant la position relative de 2 et $\frac{1}{\sin^2(x)}$.

La fonction $t \mapsto t$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

De plus, d'après la question (1e), la fonction g , donc f , est dérivable sur $]1; +\infty[$ et dont les valeurs de sa dérivée sont données par $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$, quotient et composée de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle strictement inclus dans $\mathcal{D}$. C'est le cas de $\left\{2; \frac{1}{\sin^2(x)}\right\}$ pour tout x de $]0; \frac{\pi}{2}[$. On peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt &= \left[tf(t)\right]_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} + \int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} f\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\right) - 2f(2) + \left[\sqrt{t-1}\right]_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \arcsin(\sin(x)) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2(x)} - 1} - \sqrt{1} \\ &= \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)}} - 1 \\ &= \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1 \quad \left(\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \tan(x) > 0\right). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. À l'aide du changement de variable $u = f(t)$, exprimer $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt$ en fonction de $\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}$. Indication : On pourra utiliser une intégration par parties pour conclure.

Correction : Pour tout $t \in \left\{2; \frac{1}{\sin^2(x)}\right\}$, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante à valeurs dans $\left\{x; \frac{\pi}{4}\right\}$.

Commentaires : *C'est donc un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.*

De plus, sur cet intervalle, $u = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sin^2(u)}$ entraîne

$$dt = -\frac{2 \sin(x) \cos(u)}{\sin^4(u)} du = -\frac{2 \cos(u)}{\sin^3(u)} du.$$

D'où,

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt = - \int_{\frac{\pi}{4}}^x u \frac{2 \cos(u)}{\sin^3(u)} du$$

Les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{\sin^2(u)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left\{x; \frac{\pi}{4}\right\} \subsetneq \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{u}{\sin^2(u)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^x - \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)} \\ \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \int_2^{\frac{1}{\sin^2(x)}} f(t) dt &= \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}. \end{aligned}$$

4. Dédurre des questions précédentes une expression simple de $\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)}$ pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Correction : D'après les questions (2b) et (3), on déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(x)} - 1 &= \frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)} \\ \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{dt}{\sin^2(t)} &= 1 - \frac{1}{\tan(x)}. \end{aligned}$$

Nombres Complexes I & Primitives

1. Nombres complexes

- Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
- Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
- Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs.
- Module d'un complexe, propriétés, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
- Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
- Définition de l'exponentielle complexe sur les imaginaires purs uniquement, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre, application à la factorisation par l'angle moitié.
- Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.
- Forme polaire de $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ en donnant l'écriture $A \cos(\theta - \varphi)$.
- Linéarisation et délinéarisation d'expressions trigonométriques à l'aide des formules de Moivre et d'Euler.
- Les formules de trigonométrie seront supposées connues.

2. Calculs de primitives et d'intégrales

- Définition d'une primitive. En cas d'existence, description de l'ensemble des primitives.
- Primitives usuelles.
- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Théorème fondamental de l'analyse. Existence d'une primitive F d'une fonction continue et unicité sous condition. Corollaire $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
- Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: croissance, positivité et séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive).
- Intégrations par parties de deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
- Formule de changement de variable.
- Intégration d'inverses de trinômes. Décomposition en éléments simples dans le cas de pôles simples.

Questions de cours possibles [8] :

1. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $e^z = \omega$.
3. Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \cos^3(x)$, $x \mapsto x \arctan(x)$, $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$.
4. Formule d'intégration par parties avec les hypothèses de régularité et la démonstration.
5. Intégrale de fonctions paires, impaires ou périodiques. Choix laissé à l'examineur.
6. (★) Inégalité triangulaire supérieure : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Pour les plus aguerris, cas d'égalité.
7. (★) Transformation de Fresnel : $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{(0; 0)\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\exists (A; \varphi) \in \mathbb{R}'_+ \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

8. (★) Dérivabilité de la fonction $x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$ où f, φ, ψ sont des fonctions vérifiant des propriétés à préciser.

[8]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Nombres Complexes II

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- ... ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- ...

1. Racines n -ièmes

- Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
- Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
- Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Notation $\mathbb{U}_n$.
- Représentation géométrique.

2. Interprétation géométrique des nombres complexes

- Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
- Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité.
- Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- Translations, homothéties, rotations. *L'étude générale des similitudes est hors programme.*
- Interprétation géométrique de la conjugaison.



Les Nombres complexes II

La résolution d'équations polynomiales par radicaux a motivé une part importante de la recherche mathématique, jusqu'à ce que Niels Abel ^[1] prouve l'impossibilité de résoudre l'équation général du 5-ième degré par radicaux.

Peu de temps après, Évariste Galois ^[2] élucide complètement le problème, dans un mémoire rédigé peu avant sa mort prématurée en 1832, et dans une lettre rédigée à la hâte à un ami, la veille du duel qui devait lui être fatal (il avait alors 20 ans). Dans ce mémoire, on y trouve en particulier les balbutiements de la théorie des groupes.

Carl Friedrich Gauss montre que les racines de $X^n - 1$ (donc les racines n -ièmes de l'unité), peuvent s'exprimer par radicaux si n est premier.

Il va plus loin, en montrant que si n est un entier premier de la forme $2^{2^k} + 1$, alors les solutions peuvent s'exprimer sous forme de radicaux carrés. Ce résultat amène la constructibilité à la règle et au compas du pentagone (déjà connu depuis bien longtemps), de l'eptadécagone, *i.e.* le polygone à 17 côtés (Gauss en donne une construction) puis des polygones à 257 et 65537 côtés. On ne connaît pas, à ce jour, d'autres nombres premiers de la forme $2^{2^k} + 1$ appelés nombres de Fermat. On ne sait pas s'il y en a d'autres.

Pierre-Laurent Wantzel montre la réciproque en 1837 : les seuls polygones constructibles sont les polygones dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, ou des nombres ayant comme uniques facteurs (qui doivent être simples) ces nombres premiers ou 2 (en multiplicité quelconque). Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel.

[1]. Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

[2]. Évariste Galois est un mathématicien français, né le 25 octobre 1811 à Bourg-Égalité (aujourd'hui Bourg-la-Reine) et mort le 31 mai 1832 à Paris. On a donné son nom à une branche des mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notion de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants. Sa « théorie de l'ambiguïté » est toujours féconde au XXI^{ème} siècle. Elle a ainsi permis, par exemple, à Félix Klein d'élaborer en 1877 la théorie des revêtements puis à Alexandre Grothendieck, en 1960, de fusionner théorie de Galois et théorie des revêtements.

CONTENU

I	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	580
I.1	Racines carrées d'un nombre complexe	580
I.2	Racines n -ièmes de l'unité	585
I.3	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	589
II	Ensembles de points	590
II.1	Affixe d'un vecteur	590
II.2	À partir du module	591
II.3	À partir de l'argument	593
II.4	Alignement, orthogonalité, angles	595
III	Transformations du plan	(Hors-Programme)
		601
III.1	Représentation complexe	601
III.2	Translation	602
III.3	Homothétie	603
III.4	Rotation	604
III.5	Symétrie axiale	605
IV	Résumé de géométrie complexe	609
	Feuille d'exercices n° 10 : Nombres complexes II - équations et Géométrie	610
	Test n° 14 : Nombres complexes II	636
	Devoir en temps libre n° 11 : Solutions d'équation et géométrie	640
	Correction	641
	Programme du chapitre XI	646

I/ Racines n -ièmes d'un nombre complexe _____

I.1 Racines carrées d'un nombre complexe _____

Définition 1 (Racine carrée) : On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il est strictement interdit d'écrire $\sqrt{a}$.

Par exemple, pour -1 , on aurait alors :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1 !!!$$

Exemples 1 :

- 0 admet 0 comme unique racine carrée complexe. C'est le seul complexe à n'en avoir qu'une.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$, racines de $X^2 - \alpha$.
- -1 admet deux racines carrées complexes : i et $-i$ qui sont les racines du polynôme $X^2 + 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ alors ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{-\alpha}$, racines de $X^2 + \beta$ où $\beta = -\alpha \geq 0$.

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Preuve : Soit z un nombre complexe non nul.

Sous forme exponentielle : Soient $z = r e^{i\theta}$ et $u = s e^{i\varphi}$ sous leur forme exponentielle. On cherche s et φ tels que $u^2 = z$.

$$\begin{aligned} u^2 = z &\Leftrightarrow s^2 e^{2i\varphi} = r e^{i\theta} \Leftrightarrow s^2 = r \text{ et } 2\varphi \equiv \theta [2\pi] \\ &\Leftrightarrow s = \sqrt{r} \text{ et } \varphi \equiv \frac{\theta}{2} [\pi] \quad (r \text{ et } s \text{ sont strictement positifs}) \\ &\Leftrightarrow u = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } u = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Sous forme algébrique : Dans la pratique, pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul, on ne procède pas comme dans la preuve précédente car il est souvent difficile de déterminer une valeur exacte de θ . On procèdera de la manière suivante :

On pose, cette fois $z = x + iy$ et on cherche u sous la forme $a + ib$:

$$z = u^2 \Leftrightarrow x + iy = a^2 - b^2 + 2iab \text{ et } |z| = |u|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2ab = y. \end{cases}$$

Par addition et soustraction des deux premières lignes, on obtient le système équivalent :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} + x) = \frac{1}{2} (|z| + \operatorname{Re}(z)) \\ b^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x) = \frac{1}{2} (|z| - \operatorname{Re}(z)) \\ 2ab = y = \operatorname{Im}(z). \end{cases}$$

Comme $|z| \geq \operatorname{Re}(z)$, a^2 et b^2 sont des réels positifs dans les deux cas et on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} \\ b = \pm \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}} \\ 2ab = \operatorname{Im}(z). \end{cases}$$

— Si $\operatorname{Im}(z) > 0$, la troisième équation impose que a et b soient de même signe. Les deux racines de z sont donc :

$$u = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}$$

et

$$u = -\sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} - i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}.$$

— Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, $z = \operatorname{Re}(z)$ est réel et on retrouve :

$$u = \sqrt{\operatorname{Re}(z)} \text{ et } u = -\sqrt{\operatorname{Re}(z)} \quad (\text{exclusif}) \text{ ou } u = i \sqrt{|\operatorname{Re}(z)|} \text{ et } u = -i \sqrt{|\operatorname{Re}(z)|},$$

suivant le signe de $\operatorname{Re}(z)$.

— Si $\operatorname{Im}(z) < 0$, la troisième équation impose que a et b soient de signe opposé. Les deux racines de z sont donc :

$$u = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} - i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}$$

et

$$u = -\sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}.$$

On obtient bien exactement deux racines OPPOSÉES dans tous les cas où $z \neq 0$.

Exemples 2 :

- Les racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- Les racines carrées de $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 1 - i\sqrt{3}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

1. On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. Les racines carrées sont alors évidentes à trouver :

$$u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad u_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

1. On pose $u = a + ib$.

$$2. z = u^2 \Leftrightarrow 1 - i\sqrt{3} = a^2 - b^2 + 2iab \quad \text{et} \quad 2 = |u|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ ab = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ ab < 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2} \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} \right).$$

Comme $y < 0$, a et b doivent être de signe contraire et on ne garde que celles-ci :

$$u_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \quad \text{et} \quad u = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right).$$

Exercice 1 : Déterminer les racines carrées de $-1 + i$ par deux méthodes.

Correction : Les racines carrées de $-1 + i$ sont

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

On a dorénavant les moyens de revenir sur les équations du second degré à coefficients complexes cette fois.

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr.}\mathbb{C})$$

On appelle encore *discriminant* de l'équation (Tr.ℂ), noté Δ , le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est **une** racine carrée de Δ .

- Si $\Delta = 0$, (Tr.ℂ) possède une unique solution, dite double : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, (Tr.ℂ) possède deux solutions : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$.

Exemple 4 : $(1 + i)z^2 + (3 + i)z + (-6 + 4i) = 0$.

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4(1 + i)(-6 + 4i) = 48 + 14i.$$

On cherche $\delta = a + ib$ tels que :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \\ 2ab = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 49 \\ b^2 = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -7 \\ b = -1 \end{cases} \text{ car } ab > 0$$

On prend $\delta = 7 + i$.

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$$z_1 = \frac{-(3 + i) - (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{-10 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{-5 - i}{1 + i} = \frac{-(5 + i)(1 - i)}{2} = -3 + 2i, \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-(3 + i) + (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{4}{2(1 + i)} = 1 - i.$$

ATTENTION | Les deux racines **ne** sont absolument **pas** conjuguées.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

2. $z^4 + 1 = 0$.

Correction :

1. $\Delta = -8i$ puis $\mathcal{S} = \{1; -1 + 2i\}$.

2. $z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i) = \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \overline{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}, \overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} \right\}$.

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines de (Tr.}\mathbb{C}\text{) si, et seulement si } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Remarque : On verra que les relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines se généralisent à tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et donneront lieu à une foule d'exercices fructueux.

Preuve : z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. $\mathbb{C}$) si, et seulement si

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(z - z_1)(z - z_2) \\ &= az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2. \end{aligned}$$

Par identification, z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. $\mathbb{C}$) si, et seulement si z_1 et z_2 vérifient le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 5 (Système non linéaire) :

Pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, on introduit donc l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ dont x et y sont les solutions.

Exercice 3 : Trouver deux nombres complexes de somme i et de produit 2 .

Correction : D'après la proposition (3), les deux nombres cherchés sont solutions de l'équation $z^2 - iz + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = -9 = (3i)^2$.

Les solutions de l'équation et les nombres cherchés sont donc $z_1 = 2i$ et $z_2 = -i$.

1.2 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 2 (Racines n -ièmes) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

— On appelle *racine n -ième* de z tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = z.$$

— On appelle *racine n -ième de l'unité* tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ leur ensemble.

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
- Nous verrons plus tard que cet ensemble $\mathbb{U}_n$ possède une structure de *groupe multiplicatif commutatif* très importante.
- Toute racine de l'unité est de module 1 *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Exemples 6 :

- Tout nombre complexe non nul est racine 0^{ème} de l'unité.
- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_0 &= \mathbb{C}^* \\ \mathbb{U}_1 &= \{1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_2 &= \{1, -1\} \\ \mathbb{U}_3 &= \{1, j, \bar{j}\}\end{aligned}$$

$$\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, \bar{i}\}$$

Théorème 4 (Caractérisation des racines de l'unité) :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ est constitué de n éléments deux à deux distincts.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Comme $\omega \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = e^{i\theta}$.

Alors, par la formule de Moivre, $\omega^n = e^{in\theta} = 1$.

Donc, $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Réciproquement tout complexe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)^n = 1$ donc appartient à $\mathbb{U}_n$.

On a donc montré que $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

L'œil attentif aura remarqué que ce n'est pas encore la conclusion de la proposition.

Il est déjà clair que $\left\{ \omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} \subseteq \left\{ \omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \left\{ \omega_k = e^{2i\pi \frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

En effectuant la division euclidienne de k par n , on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $k = qn + r \iff \frac{k}{n} = q + \frac{r}{n}$.

Donc, $\omega = e^{i(2q\pi + \frac{2r\pi}{n})} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$ où $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et donc $\omega \in \left\{ \omega_k = e^{2i\pi \frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.

En conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{2i\pi \frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \omega_k = e^{2i\pi \frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Interprétation géométrique : Pour $n \geq 3$, les points $M_k \left(e^{2i\pi \frac{k}{n}} \right)$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

En effet, comme $\left| e^{2i\pi \frac{k}{n}} \right| = 1$, il est déjà clair que tous les points d'affixe une racine n -ième de l'unité sont sur le cercle trigonométrique.

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, considérons $M_k(z_k)$ un point d'affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, une racine n -ième de l'unité. Alors :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) &= (\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}; \overrightarrow{OM_k}) \\ &= \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \arg\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) \\ &= \arg\left(e^{2i\pi \frac{(k+1)-k}{n}}\right) = e^{2i\pi \frac{1}{n}} \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]. \end{aligned}$$

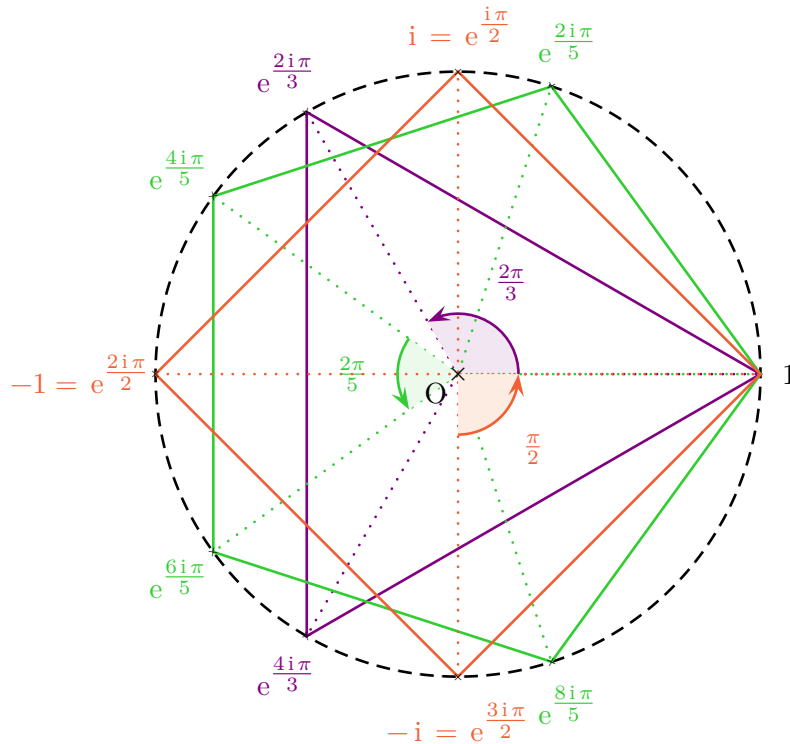


Figure X.1 – Polygones réguliers à 3, 4 et 5 sommets.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1. \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^4 = 1.$$

$$2. z^3 = -i.$$

Correction :

$$1. z^3 = -i \Leftrightarrow z^3 = i^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{i} \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{i} = 1 \text{ ou } \frac{z}{i} = j \text{ ou } \frac{z}{i} = j^2$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = ij \text{ ou } z = ij^2$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$2. \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{U}_4 \text{ et } z \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1} = 1 \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = i \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = -1 \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = -i \right) \text{ et } z \neq -1$$

$$\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = i.$$

Donc, $\mathcal{S} = \{0, i, -i\}$.

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geq 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.
2. $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
3. La somme des racines n -ièmes de l'unité est égale à 0 : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.

Preuve :

$$1. \mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

$$= \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}, \text{ en posant } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

2. Il suffit simplement de remarquer que $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}$ constitue la somme des termes d'une progression géométrique :

$$\forall \omega \neq 1, 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^n = 1.$$

3. Découle des deux assertions précédentes.

I.3 Racines n -ièmes d'un nombre complexe**Théorème 6 :**

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n -ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n -ième de Z alors les racines n -ièmes de Z sont les

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Pour trouver toutes les racines n -ièmes d'un nombre complexe Z , il suffit donc d'en exhiber une, dite primitive, notée z_0 , et de la multiplier par toutes les racines n -ièmes de l'unité.

Géométriquement, toutes les racines n -ièmes sont donc obtenues à partir du point d'affixe z_0 par $n-1$ rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Preuve : Soit $Z = r e^{i\theta}$ sous sa forme polaire. On cherche une racine n -ième ω de Z sous la forme $s e^{i\alpha}$.

$$\omega^n = Z \iff s^n e^{in\alpha} = r e^{i\theta} \iff \begin{cases} s^n = r \\ n\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases}$$

Posons $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$. C'est une racine n -ième de Z .

Toute autre racine n -ième z de Z vérifie alors la relation $z^n (= Z) = z_0^n$ i.e. $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ ou encore $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$.

D'après le **théorème (4)**, il existe donc $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $z = z_0 e^{2i\pi\frac{k}{n}}$.

Le nombre Z admet donc exactement n racines n -ièmes.

Exercice 5 :

1. Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction :

1. Comme $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, ses racines cubiques sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $j e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $j^2 e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.
2. D'après les formules d'Euler, $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et on sait que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} j e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i \frac{3\pi}{4}} &\Leftrightarrow e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i \frac{3\pi}{4}} e^{-i \frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

En égalisant parties réelles et parties imaginaires, on obtient finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

II/ Ensembles de points

Définition 3 (Ensemble de points) : Il s'agit de déterminer un ensemble ($\mathcal{E}$) de points M du plan complexe dont les affixes z vérifient une certaine propriété.

II.1 Affixe d'un vecteur

Un peu de géométrie :

Rappel 1 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \Leftrightarrow z = z'.$$

Proposition 7 (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + i b_1$ et $z_2 = a_2 + i b_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[M_1 M_2]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

En particulier, si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, on retrouve la relation familière :

$$\overrightarrow{AB}(z_{\overline{AB}}) = (z_B - z_A) = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

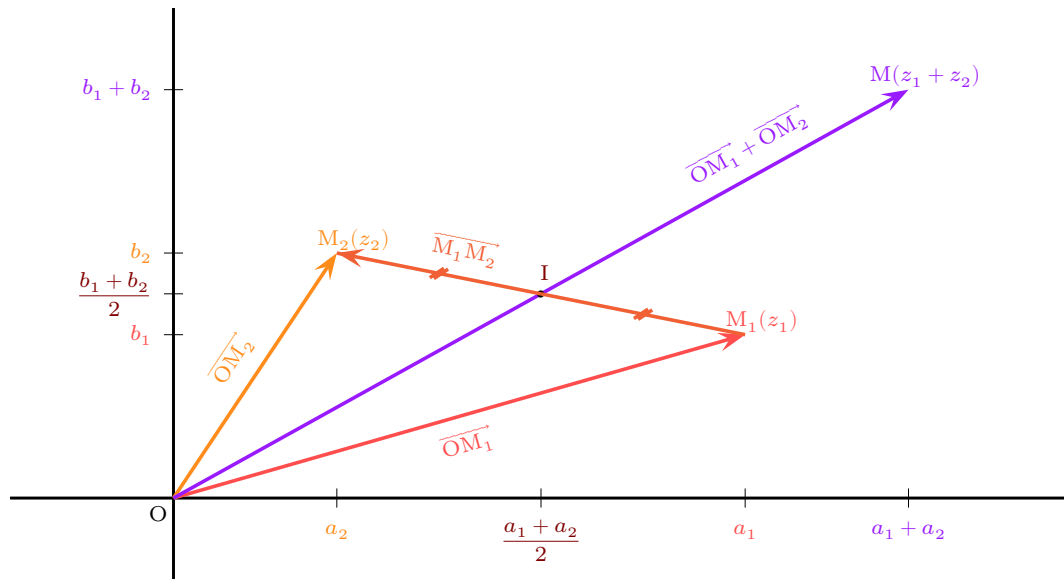


Figure X.2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

Preuve : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$.

Le reste en découle simplement...

Exercice 6 : Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\frac{3-2i}{2}$, $\frac{1}{3} - i$ et $-3 - i$.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

II.2 À partir du module

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B .

$$— \|\overrightarrow{OA}\| = |z_A|.$$

$$— \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|.$$

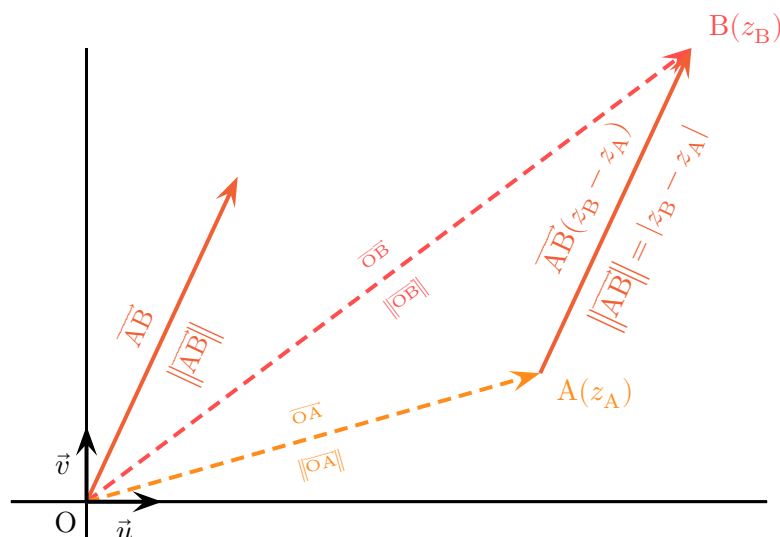
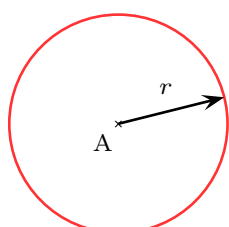


Figure X.3 – Inégalité triangulaire.

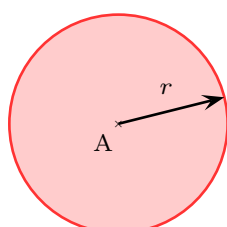
Corollaire 8.1 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

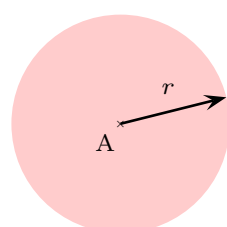
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| < r$ (resp. $|z - z_A| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



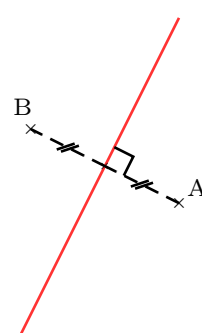
Cercle



Disque fermé



Disque ouvert



Médiatrice

Figure X.4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Remarque : « ouvert » signifiant ne contenant pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Exercice 7 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z - i| = 5$

2. $|z - 1 + i| = |z - i|$

3. $|z - i| < |z + 2|$

II.3 À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B .

$$— (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi].$$

$$— (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$— (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) [2\pi].$$

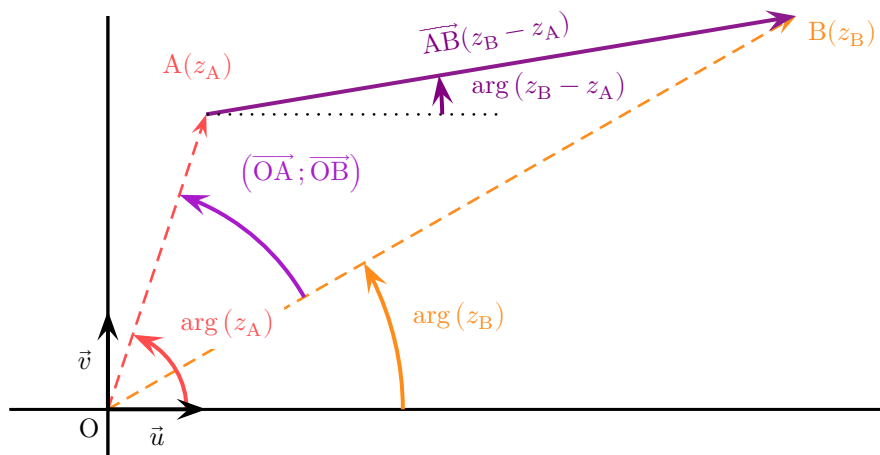


Figure X.5 – Angle de deux vecteurs

Preuve :

— La première assertion est la définition.

— Quant à la deuxième, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ i.e. $z_M = z_B - z_A$. On applique alors les résultats précédents :

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

— Enfin, $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{OA})$

$$\equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) [2\pi].$$

Exemple 7 : On donne $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la longueur AB et l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$?

$$— z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i. \quad \text{Donc } \overrightarrow{AB}(-3; -3).$$

$$— AB = |z_B - z_A| = |-3 - 3i| = 3\sqrt{2}.$$

— Soit θ un argument de $z_{\overrightarrow{AB}}$. On a :

$$\left. \begin{aligned} \cos(\theta) &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\text{Donc } (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Corollaire 9.1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A , z_B , z_C et z_D .

Alors :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$

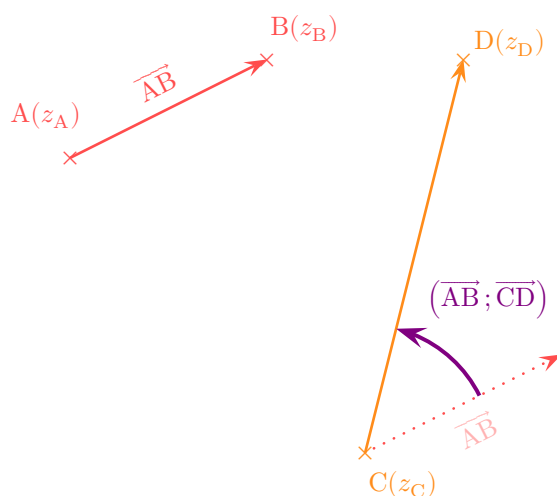


Figure X.6 – Angle formé par 4 points.

Preuve : La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &\equiv (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \\ &\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]. \end{aligned}$$

Exercice 8 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

1. $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

2. $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$

3. $\begin{cases} \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \\ |z| = 2. \end{cases}$

II.4 Alignement, orthogonalité, angles

À partir du **corollaire (9.1)**, on peut alors chercher des ensembles de points dont les relations sont basées sur l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ i.e. des problèmes de colinéarité, d'alignement ou d'orthogonalité.

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$\text{— } \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$\text{— } \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$

Preuve : Il suffit de calculer $z_v \overline{z_u} = (ac + bd) + i(ad - bc)$ pour reconnaître dans les parties réelles et imaginaires les produits scalaires et vectoriels des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques :

— Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnaît le *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$

— La deuxième expression s'appelle le *déterminant* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

De la même manière que le produit scalaire caractérise l'orthogonalité de deux vecteurs, leur déterminant caractérise, lui, leur colinéarité. Il est alors tout de même miraculeux de retrouver dans un petit produit les critères de colinéarité et de d'orthogonalité en une seule expression.

On en déduit aisément,

Théorème 10 (Colinéarité et orthogonalité de vecteurs) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = 0$.

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = 0$.

On en déduit une caractérisation plus commode :

Corollaire 10.1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{u} // \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul)

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve : En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v \overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff z_v \overline{z_u} \in i\mathbb{R} \iff \arg(z_v \overline{z_u}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) + \arg(\overline{z_u}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) - \arg(z_u) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'équivalence perdure si $\vec{v} = \vec{0}$, le vecteur nul étant orthogonal à tous vecteurs du plan et $0 \in i\mathbb{R}$.

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v \overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg(z_v \overline{z_u}) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) + \arg(\overline{z_u}) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) - \arg(z_u) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv 0 [\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, nous pouvons traduire le **théorème (10)** pour un ensemble de points du plan.

Corollaire 10.2 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'abscisse respective z_A, z_B, z_C et z_D .

A, B et C sont distincts et alignés	$\iff$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
$(AB) \parallel (CD)$	$\iff$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
$(AB) \perp (CD)$	$\iff$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$	$\iff$	$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$

Preuve : Il suffit de traduire le **théorème (10)** et le **corollaire (10.1)** attendant :

— Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, z_{AC} et z_{AB} sont non nuls.

$$\begin{aligned} \text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{AC}}{z_{AB}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

— Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, z_{AB} et z_{CD} sont non nuls.

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{CD}}{z_{AB}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

— Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overline{AB}}$ est non nul.

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_{\overline{CD}}}{z_{\overline{AB}}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque : En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si

$$\text{Im}((z_C - z_A)(\overline{z_B - z_A})) = 0 \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_C - z_A = k(z_B - z_A).$$

théorème (10) corollaire (10.2)

La première assertion signifie donc simplement que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si leur affixe $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$ sont proportionnelles dans $\mathbb{R}$.

On retrouve ainsi un résultat déjà vrai pour les coordonnées des vecteurs.

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz soient alignés.

Correction : Les points d'affixes i , z , iz sont alignés si, et seulement si $z = 0$ (deux points) ou exclusif $\frac{iz - i}{iz - z} = \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} \in \mathbb{R}$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} = \frac{1}{2}(1 + i)\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z}} \\ &\Leftrightarrow \frac{z - 1}{z} = i\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z}} \Leftrightarrow \overline{z}(z - 1) = iz(\overline{z} - 1) \\ &\Leftrightarrow (1 - i)z\overline{z} - \overline{z} + iz = 0 \end{aligned} \tag{X.1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z\overline{z} - \overline{z} + iz = 0 \tag{X.2}$$

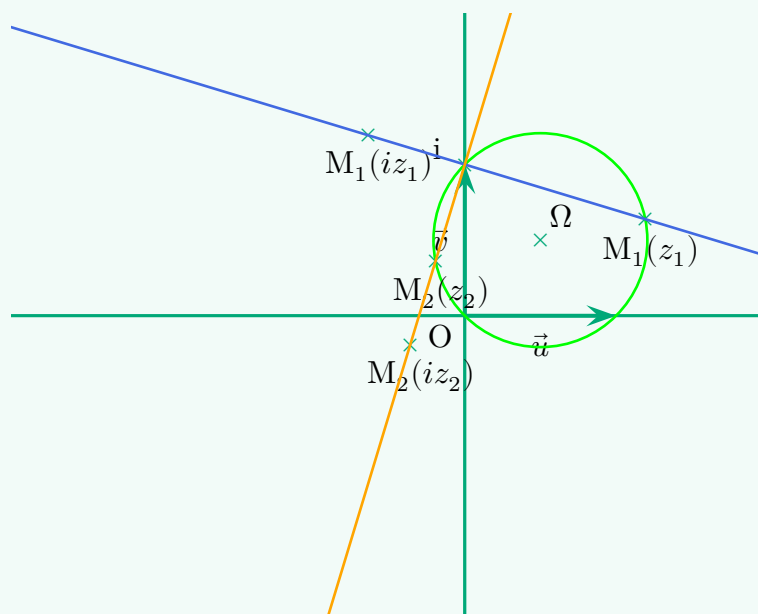
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi)}z = 0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z = 0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|z - \frac{1 + i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On vérifie que $\left|0 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1 + i}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + iy$ dès la ligne (X.1) et obtenir :

$$\begin{aligned}
 (1-i)z\bar{z} - \bar{z} + iz &= 0 \iff (1-i)(x^2 + y^2) - x + iy + ix - y = 0 \\
 &\iff (1-i)(x^2 + y^2) - (1-i)x - (1-i)y = 0 \\
 &\iff x^2 + y^2 - x - y = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

On retrouve le même cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Un exemple classique est un exercice où l'on vous demande la nature d'un certain triangle ABC.

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$ABC \text{ est isocèle en } A \iff AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$

$$\begin{aligned} ABC \text{ est équilatéral} &\iff AB = AC = BC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B| \\ &\iff AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]. \end{aligned}$$

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$$

$$ABC \text{ est rectangle isocèle en } A \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } AB = AC \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i.$$

Preuve : Le triangle étant non dégénéré, les sommets ne sont ni confondus, ni alignés *i.e.* leur affixe sont distinctes.

Seule la dernière assertion présenterait une difficulté.

On sait déjà que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ i.e. } \exists r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que :}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r e^{\pm i \frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Or, } |z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$

D'où,

$$r = \left| r e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1.$$

$$\text{Conclusion : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i.$$

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz forment un triangle équilatéral.

Correction : Le triangle formé par les points d'affixes i , z , iz est équilatéral si, et seulement si $|z - i| = |iz - z| = |iz - i|$.

Or,

$$\begin{aligned} |z - i| = |iz - z| = |iz - i| &\Leftrightarrow |z - i| = |i - 1||z| = |z - 1| \Leftrightarrow |z - i| = \sqrt{2}|z| = |z - 1| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ \sqrt{2}|z| = |z - 1| \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{X.3})$$

D'un point de vue géométrique, en posant $A(1)$ et $B(i)$, on a :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ 2z\bar{z} = (z - 1)(\bar{z} - 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ (z + 1)(\bar{z} + 1) - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ |z + 1| = \sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ M(z) \text{ appartient au cercle de centre } C(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{Les points } M(z) \text{ sont les deux points d'intersection de la médiatrice} \\ &\quad \text{de } [AB] \text{ et du cercle de centre } C(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \end{aligned}$$

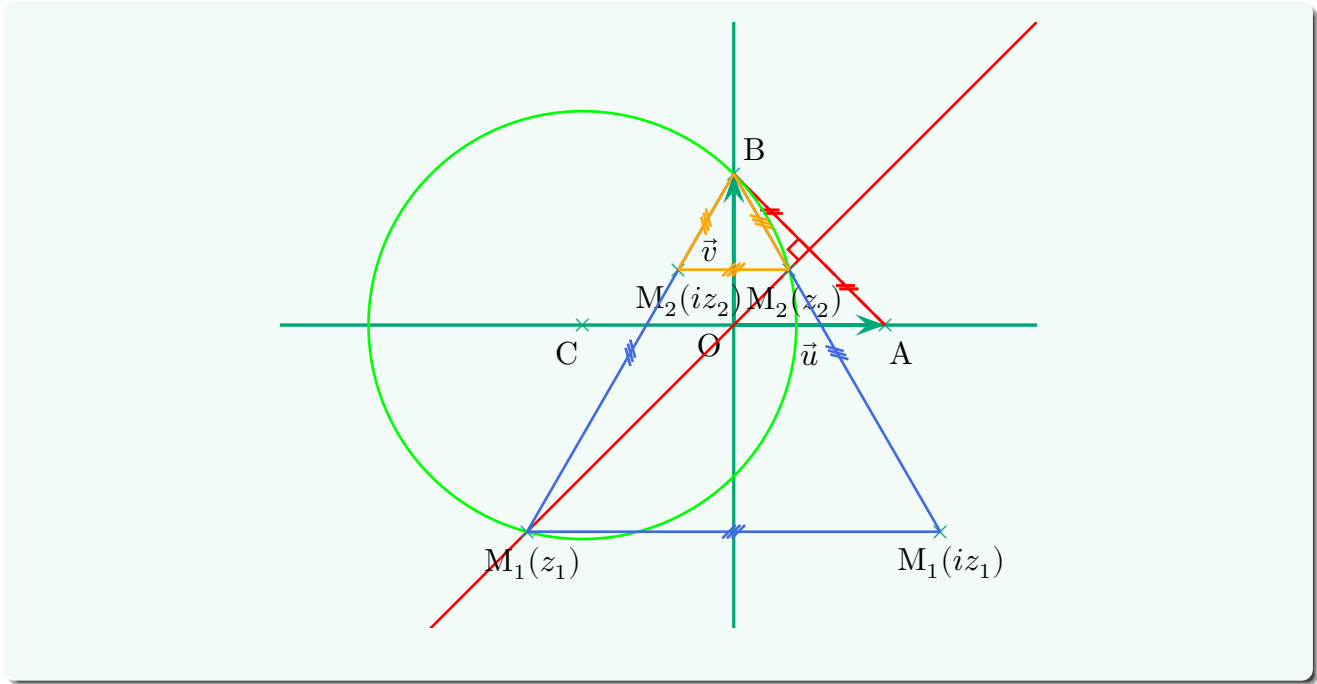
D'un point de vue algébrique, en revenant à (X.3)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} (z - i)(\bar{z} - i) = (z - 1)(\bar{z} - 1) \\ 2z\bar{z} = (z - 1)(\bar{z} - 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z - i\bar{z} = 0 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -iz \\ iz^2 + iz - z - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -iz \\ z^2 + (1 + i)z - i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{X.4})$$

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 + (1 + i)z - i$ de discriminant $\Delta = 6i = (\sqrt{3}(1 + i))^2$.

On trouve $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})}{2} = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$

Les points cherchés sont donc $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.



III/ Transformations du plan

(Hors-Programme)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan.

III.1 Représentation complexe

Définition 4 : On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.

$$M \longmapsto M'$$

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une *transformation du plan*.
- Lorsque $\mathcal{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto z'$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(M) = M'$ est appelée *représentation* ou *représentation complexe* de $\mathcal{F}$.
On l'écrit souvent $z' = f(z)$ au lieu de $z \longmapsto f(z)$.

Exemple 8 : la symétrie axiale d'axe (Ox) est une transformation du plan.
Son écriture complexe est : $z \longmapsto \bar{z}$.

Exercice 11 :

1. Donner l'écriture complexe de la symétrie de centre O.
2. Donner l'écriture complexe de la symétrie d'axe (Oy).

III.2 Translation

Définition 5 : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* , notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

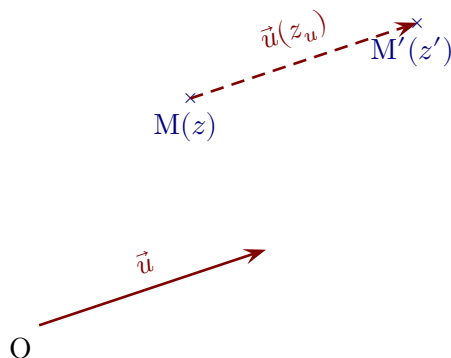


Figure X.7 – Translation de vecteur $\vec{u}$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $t_{\vec{u}}$ est bijective.

Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } t_{\vec{u}} &\iff t_{\vec{u}}(M) = N \\ &\iff \overrightarrow{MN} = \vec{u} \\ &\iff \overrightarrow{NM} = -\vec{u} \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $t_{\vec{u}}$.

Donc $t_{\vec{u}}$ est bien une transformation du plan (=bijective).

Remarque : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$z' = z + a$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{u}}(M) &\iff \overrightarrow{MN} = \vec{u} \\ &\iff z' - z = a \\ &\iff z' = z + a \end{aligned}$$

III.3 Homothétie

Définition 6 : Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* , notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

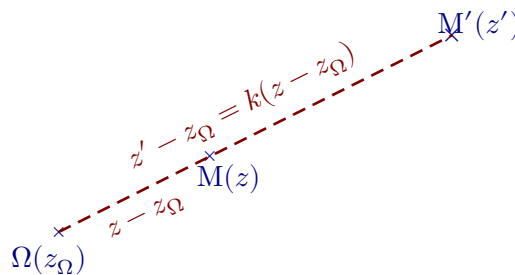


Figure X.8 – Homothétie de centre Ω et de rapport r .

Preuve : Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } h_{\Omega,k} &\iff h_{\Omega,k}(M) = N \\ &\iff \overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \\ &\iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k} \overrightarrow{ON} \text{ car } k \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $h_{\Omega,k}$.

Donc $h_{\Omega,k}$ est bien bijective donc une transformation du plan.

Remarque : $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega,k}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned}$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k .

III.4 Rotation

Définition 7 : Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle *rotation de centre Ω et d'angle θ* , notée $r_{\Omega,\theta}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

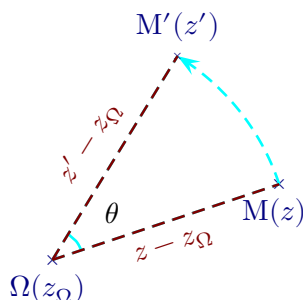


Figure X.9 – Rotation de centre Ω et d'angle θ .

Preuve : Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } r_{\Omega,\theta} &\iff r_{\Omega,\theta}(M) = N \\ &\iff \begin{cases} \Omega N = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \Omega M = \Omega N \\ (\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $r_{\Omega, \theta}$.

Donc $r_{\Omega, \theta}$ est bien une transformation du plan (=bijective).

Remarque : $r_{\Omega, \theta}^{-1} = r_{\Omega, -\theta}$.

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

Supposons que $M \neq \Omega$.

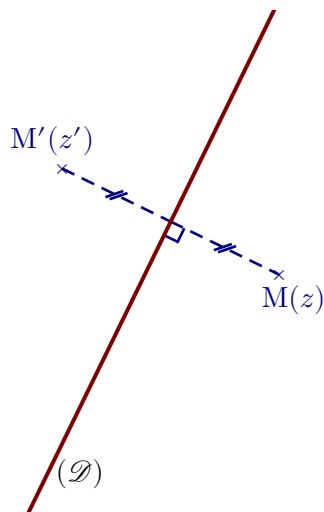
$$\begin{aligned} M' = r_{\Omega, \theta}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ , $z \mapsto e^{i\pi}z$ celle de la symétrie de centre O .

III.5 Symétrie axiale

Définition 8 : Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle *symétrie d'axe* $(\mathcal{D})$, notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que $(\mathcal{D})$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

Figure X.10 – Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.**Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :**

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_A , et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$. L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est :

$$z' - z_A = z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A).$$

Remarque : $s_{(\mathcal{D})}^{-1} = s_{(\mathcal{D})}$.

Preuve : Notons M le point d'affixe z et $M'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Soit θ l'argument de $z_{\vec{u}}$.

On commence par faire une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ pour nous ramener à une symétrie d'axe parallèle à l'axe des abscisses. Les affixes seront donc multipliées par $\bar{z}_{\vec{u}}$. Le point $A(z_A)$, par exemple, est transformé en $A'(z_{A'}) = \bar{z}_{\vec{u}} z_A$.

Par une translation de vecteur $-\overrightarrow{OA'}$, on transforme cette symétrie en la conjugaison i.e. Symétries et translations étant des isométries, M' est l'image de M par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ si, et seulement si c'est encore le cas pour leur image par la composée de ces deux transformations. Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\vec{u}} (z' - z_A) &= \overline{\bar{z}_{\vec{u}} (z - z_A)} \iff z' - z_A = \frac{1}{\bar{z}_{\vec{u}}} \times z_{\vec{u}} (\bar{z} - \bar{z}_A) \\ &\iff z' - z_A = z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A) \quad \left(\text{car } z_{\vec{u}} \in \mathbb{U} \implies \frac{1}{\bar{z}_{\vec{u}}} = z_{\vec{u}} \right) \\ &\iff z' = z_A + z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A). \end{aligned}$$

Remarque : On a supposé que $\vec{u}$ est unitaire, donc que $z_{\vec{u}}$ est de la forme $e^{i\theta}$. Ainsi, la multiplication par $\bar{z}_{\vec{u}} = \frac{1}{z_{\vec{u}}}$ correspond à une rotation d'angle $-\theta$ qui nous ramène à un axe parallèle à l'axe des abscisses.

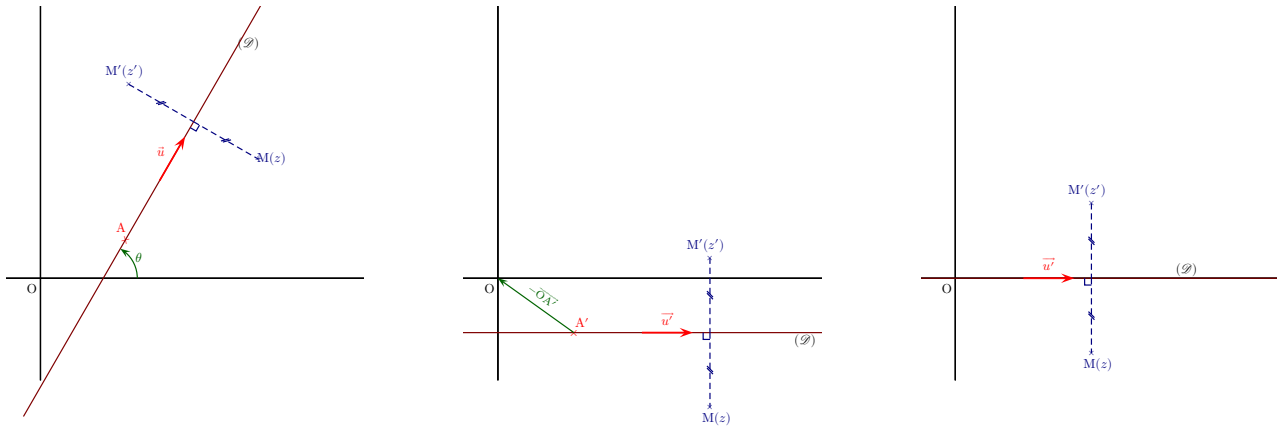


Figure X.11 – Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.

Les homothéties : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Les rotations : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Les symétries : $z' = z_{\bar{u}}^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

(a) Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

(b) Si $a = re^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.

On dit que φ est la représentation d'une *similitude* (directe ou indirecte) de centre Ω , de rapport r et d'angle θ .

2. Soit $\varphi : z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a = re^{i\theta} \neq 0$ et $u = e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Alors φ est la représentation de la composée d'une symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A , d'une translation de vecteur $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (un glissement le long de la droite $(\mathcal{D})$) et d'une homothétie de centre O et de rapport r .

Preuve :

1. (a) Si $a = 1$, on reconnaît l'écriture d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
- (b) Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

$\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b \iff \omega = \frac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.

Notons s la transformation complexe associée à φ et $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par s .

$$\begin{aligned} M' = s(M) &\iff z' = az + b \underset{b=\omega-a\omega}{\iff} z' - \omega = a(z - \omega) \\ &\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |a||z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \arg(a) \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \Omega M' = r \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

M' est donc l'image de M par composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ et l'homothétie de centre Ω et de rapport r .

2. L'homothétie étant appliquée en dernier, on est ramené à la description de $z \mapsto z' = z_u^2 \bar{z} + \frac{b}{r}$.

On met z' sous la forme $z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A + z_v$ où $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Il suffit alors de comparer les deux expressions, et en exprimant la condition de colinéarité, on obtient une condition sur la partie imaginaire de $z_A \bar{z}_u$, et on peut décider de choisir la partie réelle nulle.

Exercice 12 : Caractériser la transformation associée à la fonction

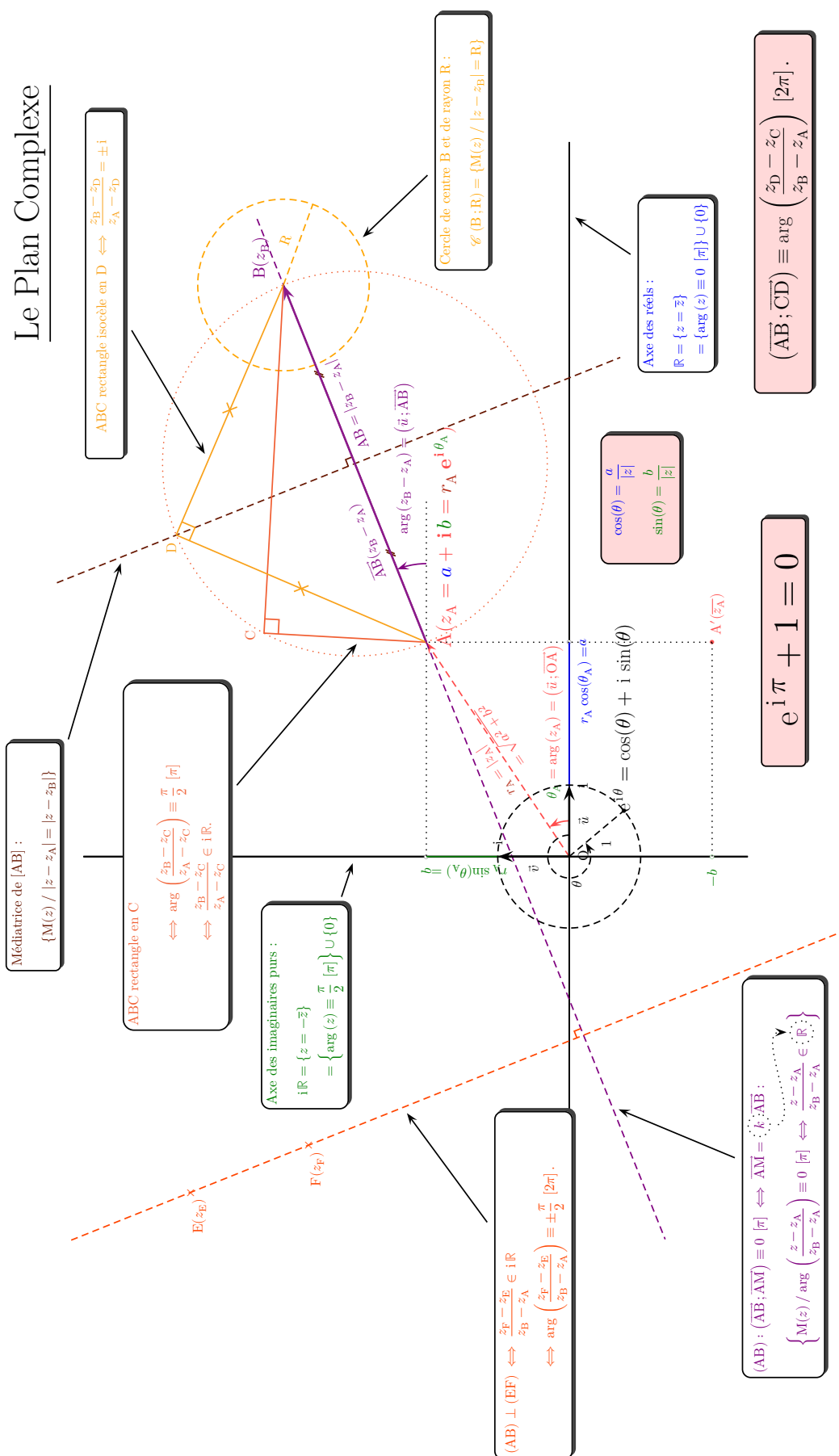
$$f : z \mapsto 2iz + 1.$$

Correction : f est la similitude de centre $\Omega\left(\frac{1+2i}{5}\right)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?

Réponse : parce qu'il n'a jamais d'argument.

IV/ Résumé de géométrie complexe



Nombres complexes II - équations et Géométrie

I/ Équations

Exercice 1 : Calculer les racines carrées des nombres suivants sous forme exponentielle et algébrique si possible

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -2i$$

$$z_3 = 3 + 4i$$

$$z_4 = 8 - 6i$$

$$z_5 = 5 + 12i$$

$$z_6 = 7 + 4i$$

$$z_7 = 7 - 24i$$

$$z_8 = -15 + 8i$$

$$z_9 = 9 + 40i$$

Correction :

1. Il suffit de factoriser le polynôme $Z^2 - 1 = (Z - 1)(Z + 1)$.

Les racines carrées de 1 sont donc $1 = e^{2i\pi}$ et $-1 = e^{i\pi}$.

2. Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = -2i$:

$$\begin{aligned} -2i = u^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2i = a^2 - b^2 + 2abi \\ 2 = |u|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ ab = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{ab < 0} u_1 = 1 - i \quad \text{ou} \quad u_2 = -1 + i. \end{aligned}$$

Soit $u = s e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} -2i = u^2 &\Leftrightarrow 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = s^2 e^{2i\varphi} \Leftrightarrow s^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &\Leftrightarrow_{s \geq 0} s = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \\ &\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{1 + i, -1 + i\} = \left\{ \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right\}$.

3. Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 3 + 4i$:

$$\begin{aligned} 3 + 4i = u^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi \\ 5 = |u|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{ab > 0} u_1 = 2 + i \quad \text{ou} \quad u_2 = -2 - i. \end{aligned}$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $3 + 4i = 5 \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) = 5 e^{i \arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$.

Soit $u = s e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} 3 + 4i = u^2 &\Leftrightarrow 5 e^{i \arctan(\frac{4}{3})} = s^2 e^{2i\varphi} \Leftrightarrow s^2 = 5 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\frac{4}{3}\right) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow_{s \geq 0} s = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4}{3}\right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{5} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{4}{3})} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{5} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{4}{3}) + \pi)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{2 + i, -2 - i\} = \left\{ \sqrt{5} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{4}{3})}, \sqrt{5} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{4}{3}) + \pi)} \right\}$.

4. Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 8 - 6i$:

$$\begin{aligned} 8 - 6i = u^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 6i = a^2 - b^2 + 2abi \\ 10 = |u|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \\ 2ab = -6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{ab < 0} u_1 = 3 - i \quad \text{ou} \quad u_2 = -3 + i. \end{aligned}$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $8 - 6i = 10 \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \right) = 10 e^{-i \arctan(\frac{3}{4})}$.

Remarque : $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ donc $10 e^{-i \arctan(\frac{3}{4})} = 5 e^{i(\arctan(\frac{4}{3}))} \times 2 e^{i \frac{\pi}{2}}$
 $= 5 e^{i(\arctan(\frac{4}{3}))} \times (-2i).$

On pourrait alors se servir des deux résultats précédents.

Soit $u = s e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} 8 - 6i = u^2 &\Leftrightarrow 10 e^{i \arctan(\frac{3}{4})} = s^2 e^{2i\varphi} \Leftrightarrow s^2 = 10 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\frac{3}{4}\right) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow_{s \geq 0} s = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{3}{4}\right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{10} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{3}{4})} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{10} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{3}{4}) + \pi)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{3 - i, -3 + i\} = \left\{ \sqrt{10} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{3}{4})}, \sqrt{10} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{3}{4}) + \pi)} \right\}$.

5. Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 5 + 12i$:

$$\begin{aligned} 5 + 12i = u^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi \\ 13 = |u|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ 2ab = 12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \\ ab = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{ab > 0} u_1 = 3 + 2i \quad \text{ou} \quad u_2 = -3 - 2i. \end{aligned}$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $5 + 12i = 13 \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i \right) = 13 e^{i \arctan(\frac{12}{5})}$.

Soit $u = s e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} 5 + 12i = u^2 &\Leftrightarrow 13 e^{i \arctan(\frac{12}{5})} = s^2 e^{2i\varphi} \Leftrightarrow s^2 = 13 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\frac{12}{5}\right) [2\pi] \\ &\Leftrightarrow_{s \geq 0} s = \sqrt{13} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{12}{5}\right) [\pi] \\ &\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{13} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{12}{5})} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{13} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{12}{5}) + \pi)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{3 + 2i, -3 - 2i\} = \left\{ \sqrt{13} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{12}{5})}, \sqrt{13} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{12}{5}) + \pi)} \right\}$.

9. Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40i$:

$$9 + 40i = u^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 40i = a^2 - b^2 + 2abi \\ 41 = |u|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ a^2 + b^2 = 41 \\ 2ab = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \\ ab > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{ab>0} u_1 = 5 + 4i \quad \text{ou} \quad u_2 = -5 - 4i.$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9 + 40i = 41 \left(\frac{9}{41} + \frac{40}{41}i \right) = 41 e^{i \arctan(\frac{40}{9})}$.

Soit $u = s e^{i\varphi}$:

$$9 + 40i = u^2 \Leftrightarrow 41 e^{i \arctan(\frac{40}{9})} = s^2 e^{2i\varphi} \Leftrightarrow s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\frac{40}{9}\right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow_{s \geq 0} s = \sqrt{41} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{40}{9}\right) [\pi]$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{41} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{40}{9})} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{41} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{40}{9}) + \pi)}.$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \{5 + 4i, -5 - 4i\} = \left\{ \sqrt{41} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{40}{9})}, \sqrt{41} e^{i(\frac{1}{2} \arctan(\frac{40}{9}) + \pi)} \right\}.$$

Exercice 2 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. En suivant la même idée, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction :

1. **Sous forme algébrique :** soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases}$$

Les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sont :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)$$

Sous forme trigonométrique : on a $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

D'après le cours, les racines carrées de a sont $\sqrt[2]{1} e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt[2]{1} e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)}$ i.e. $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

Comme $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on en déduit que :

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

2. De même, pour accéder à $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on cherche les racines carrées de $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Sous forme algébrique : soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ 2xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ 2xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines carrées de $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$ sont donc :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

Sous forme trigonométrique : on a $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

D'après le cours, les racines carrées de a sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Comme $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on en déduit que :

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Remarque :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
4. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.
5. $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$.
6. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
7. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.
8. $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
9. $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$.
10. $z^4 + (2i-1)z^2 - 1 - i = 0$.

Correction :

- $\Delta = -3$ puis $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\} = \{j; j^2 = \bar{j}\}$.
- $\Delta = 1$ puis $\mathcal{S} = \{1 + i; i\}$.
- $\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$ puis $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i \right\}$.
- $\Delta = (3 + 4i)^2 + 4(1 - 5i) = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$ puis $\mathcal{S} = \{2 + 3i, 1 + i\}$.
- $\Delta = (5 - i)^2 - 4(2 - 2i)(2 + i) = -2i = (1 - i)^2$ puis $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i, 1 - i \right\}$.
- $z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 10Z + 169 = 0$ en posant $Z = z^2$
 $\Leftrightarrow Z = -5 + 12i$ ou $Z = -5 - 12i$
 $\Leftrightarrow z^2 = -5 + 12i$ ou $z^2 = -5 - 12i$
 $\Leftrightarrow z = 2 + 3i$ ou $z = -2 - 3i$ ou $z = 2 - 3i$ ou $z = -2 + 3i$.

Donc $\mathcal{S} = \{2 + 3i, -2 - 3i, 2 - 3i, -2 + 3i\}$.

- $\Delta_{z^2} = (5 - 14i)^2 + 8(12 + 5i) = -75 - 100i = (5 - 10i)^2$ puis
 $\mathcal{S} = \{3 - 2i, -3 + 2i, 1 - i, -1 + i\}$.

- $\mathcal{S} = \{2 + i, -2 - i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$.

- $\mathcal{S} = \{1 + i, -1 - i, 1 + 2i, -1 - 2i\}$.

- $\Delta_{z^2} = (2i - 1)^2 + 4(1 + i) = 1$ d'où $z^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ou $z^2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ puis

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{3i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{7i\frac{\pi}{8}} \right\}.$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i), \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i \right\}.$$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $e^z = 1 + i$.

- $e^z + 2e^{-z} = 2$

Correction :

- Comme dans le cours :

$$e^z = 1 + i \Leftrightarrow e^z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z \equiv \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} [2i\pi].$$

- En multipliant les deux membres de l'équation par $e^z \neq 0$ on est ramené à résoudre l'équation

$$Z^2 - 2Z + 2 = 0.$$

Avec $\Delta = -4 = (2i)^2$ et $Z = 1 \pm i$.

On résout alors les équations $e^z = 1 \pm i$ pour trouver l'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}\ln 2 \pm \frac{\pi}{4} [2i\pi] \right\}.$$

Exercice 5 :

1. Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0. \quad (\text{X.1})$$

En déduire toutes les solutions complexes.

2. Avec les mêmes idées résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$.

Correction :

1. Conformément aux indications de l'énoncé, commençons par chercher, si elles existent, des solutions réelles et imaginaires pures. Supposant qu'elle existe, soit $x \in \mathbb{R}$ une telle solution. On a alors :

$$x^4 - 4(1+i)x^3 + 12ix^2 + 8(1-i)x - 5 = 0.$$

Par passage au conjugué et par compatibilité avec les lois de $\mathbb{C}$, x est alors également solution de l'équation

$$x^4 - 4(1-i)x^3 - 12ix^2 + 8(1+i)x - 5 = 0,$$

soit du système

$$\begin{cases} x^4 - 4(1+i)x^3 + 12ix^2 + 8(1-i)x - 5 = 0 \\ x^4 - 4(1-i)x^3 - 12ix^2 + 8(1+i)x - 5 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{en retranchant}} (-4x^2 + 12x - 8)ix = 0.$$

Comme $x = 0$ n'est clairement pas une solution, cette équation est équivalente à $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les racines sont facilement $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Réciproquement, on vérifie que seule $z_1 = 1$ est racine de (X.1).

On itère le même raisonnement pour une racine imaginaire pure. Soit iy avec $y \in \mathbb{R}$ une telle solution. On a alors :

$$y^4 - 4(1-i)y^3 - 12iy^2 + 8(1+i)y - 5 = 0.$$

Par passage au conjugué, iy est alors solution du système

$$\begin{cases} y^4 - 4(1-i)y^3 - 12iy^2 + 8(1+i)y - 5 = 0 \\ y^4 - 4(1+i)y^3 + 12iy^2 + 8(1-i)y - 5 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{en ajoutant}} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0.$$

On remarque (heureusement) que $y = 1$ est une racine en évidence et on vérifie que $z_2 = 1 \times i = i$ est racine de (X.1).

Factorisons :

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = (z-1)(z-i)(az^2 + bz + c).$$

Il est déjà clair que $a = 1$ et $c = 5i$. On identifie pour $z = -1$, par exemple, pour trouver :

$$\begin{aligned} -8 + 24i &= -2(-1-i)(1-b+5i) \iff -8 + 24i = -8 + 12i - 2(1+i)b \\ &\iff b = -\frac{6}{1+i} = -3-3i. \end{aligned}$$

D'où, $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = (z-1)(z-i)(z^2 - (3+3i)z + 5i)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 - (3+3i)z + 5i$:

$$\text{— } \Delta = -2i = (1-i)^2.$$

$$\text{— Les deux racines complexes sont donc } z_3 = \frac{3+3i+1-i}{2} = 2+i \text{ et } z_4 = \frac{3+3i-1-i}{2} = 1+2i.$$

On en déduit l'ensemble des racines complexes de (X.1) :

$$\mathcal{S} = \{1, i, 2+i, 1+2i\}.$$

2. $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 11i)z - 2(1 + 7i) = 0$. (E)

— On cherche une racine réelle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (3 + 2i)\lambda^2 + (3 + 11i)\lambda - 2(1 + 7i) = 0 &\iff (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2) + i(-2\lambda^2 + 11\lambda - 14) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 & (1) \\ -2\lambda^2 + 11\lambda - 14 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{car } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'équation (2) admet deux solutions : 2 et $\frac{7}{2}$.

On teste l'équation (1) : 2 est également solution de (1).

2 est donc une solution de l'équation (E).

Remarque : On peut être encore plus malin en remarquant que si λ est une solution réelle de l'équation, alors λ sera aussi une solution de l'équation conjuguée. On raisonne alors par condition nécessaire en cherchant λ réel tel que :

$$\begin{cases} z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 11i)z - 2(1 + 7i) = 0 \\ z^3 - (3 - 2i)z^2 + (3 - 11i)z - 2(1 - 7i) = 0 \end{cases} \implies 2z^2 - 11z + 14 = 0$$

en soustrayant les deux équations.

Il suffit alors de vérifier que la solution 2 convient et de poursuivre.

— On factorise par $(z - 2)$:

$$(E) \iff (z - 2)(z^2 - (1 + 2i)z + (1 + 7i)) = 0.$$

Donc, $\mathcal{S} = \{2, 2 - i, -1 + 3i\}$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z + z' = 4 + 2i \\ zz' = 2 + 4i \end{cases}$

3. $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = -1 + 2i \end{cases}$

2. $\begin{cases} a + b = 1 + i \\ ab = 2 - i \end{cases}$

4. $\begin{cases} u + v = 3 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{9 + 3i}{10} \end{cases}$

6. 's $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

1. z et z' sont les racines du trinôme $Z^2 - (4 + 2i)Z + 2 + 4i$ de discriminant $\Delta = (4 + 2i)^2 - 4(2 + 4i) = 4$.

On trouve donc $z = 2 + i + 1 = 3 + i$ et $z' = 2 + i - 1 = 1 + i$.

2. a et b sont les racines du trinôme $z^2 - (1 + i)z + 2 - i$ de discriminant $\Delta = (1 + i)^2 - 4(2 - i) = -8 + 6i = \pm(1 + 3i)^2$.

On trouve donc $a = \frac{1 + i + 1 + 3i}{2} = 1 + 2i$ et $b = \frac{1 + i - 1 - 3i}{2} = -i$.

3. u et v sont les racines du trinôme $z^2 - 2z + 2$ de discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$.

On trouve donc $u = 1 + i$ et $v = \bar{u} = 1 - i$.

4. Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v . Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{9 + 3i}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = \frac{9 + 3i}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = \frac{10}{3 + i} \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 3 - i \end{cases}$$

Le raisonnement est ensuite identique :

u et v sont les racines du trinôme $z^2 - 3z + 3 - i$ de discriminant $\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$.

On trouve donc $u = 2 + i \neq 0$ et $v = 1 - i \neq 0$.

5. En remarquant que $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$, on a :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = -1 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (u + v)^2 - (u^2 + v^2) = 1^2 - (-1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 1 - i \end{cases}$$

u et v sont les racines du trinôme $z^2 - z + 1 - i$ de discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - i) = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$.

On trouve donc $u = 1 + i$ et $v = -i$.

6. Même exercice, en remarquant que $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3(u^2v + uv^2)$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u + v) = 6 \\ (u + v)^3 = 27 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 2 \\ u + v = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2j^2 \\ u + v = 3j \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2\bar{j} \\ u + v = 3\bar{j} \end{cases} \end{aligned}$$

u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

- $z^2 - 3z + 2$ i.e. les racines en évidence 1 et 2.
- $z^2 - 3jz + 2j^2$ de discriminant $\Delta = 9j^2 - 8j^2 = j^2$. Ses racines sont donc $\frac{3j + j}{2} = 2j$ et $\frac{3j - j}{2} = j$.
- $z^2 - 3\bar{j}z + 2\bar{j}$ de discriminant $\Delta = 9\bar{j} - 8\bar{j} = \bar{j} = (\bar{j})^2$. Ses racines sont donc $\frac{3\bar{j} + \bar{j}}{2} = 2\bar{j}$ et $\frac{3\bar{j} - \bar{j}}{2} = \bar{j}$.

II/ Racines de l'unité

Exercice 7 : Trouver les racines cubiques des nombres suivants :

$$z_1 = 2 - 2i \quad z_2 = 11 + 2i \quad z_3 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} \quad z_4 = 4\sqrt{2}(1 + i)$$

Correction : Il suffit de trouver une racine cubique du nombre puis de la multiplier par les racines cubiques de l'unité 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ pour les avoir toutes.

1. $2 - 2i = (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{\pi}{4}}$ dont une racine cubique est $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

$$\begin{aligned} \text{Conclusion, } \mathcal{S} &= \left\{ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \times 1, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \times j, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \times j^2 \right\} \\ &= \left\{ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right\}. \end{aligned}$$

2. $11 + 2i = (\sqrt{5})^3 \left(\frac{11}{\sqrt{125}} + \frac{2}{\sqrt{125}}i \right) = (\sqrt{5})^3 e^{-i\arctan(\frac{2}{11})}$ dont une racine cubique est $\sqrt{5}e^{-i\frac{1}{3}\arctan(\frac{2}{11})}$.

Remarque : Il n'existe pas de méthodes simples pour trouver la racine cubique d'un nombre complexe sous forme algébrique.

Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{5} e^{-i \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2}{11}\right)}, \sqrt{5} e^{-i \frac{1}{3} \left(\arctan\left(\frac{2}{11}\right) - 2\pi\right)}, \sqrt{5} e^{-i \frac{1}{3} \left(\arctan\left(\frac{2}{11}\right) + 2\pi\right)} \right\}$.

3. Comme $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}}{2 e^{-i \frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{5\pi}{12}}$ dont une racine cubique est $\frac{1}{2^{\frac{1}{6}}} e^{i \frac{5\pi}{36}}$, on trouve :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}} e^{i \frac{5\pi}{36}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}} e^{i \frac{29\pi}{36}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}} e^{-i \frac{19\pi}{36}} \right\}.$$

4. On commence par mettre tout sous forme exponentielle :

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+i) \iff z^3 = \left(2 e^{i \frac{\pi}{12}}\right)^3.$$

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ 2 e^{i \frac{\pi}{12}}, 2 e^{i \frac{\pi}{12}} j, 2 e^{i \frac{\pi}{12}} j^2 \right\} \\ &= \left\{ 2 e^{i \frac{\pi}{12}}, 2 e^{i \frac{3\pi}{4}}, 2 e^{-i \frac{7\pi}{12}} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\Omega = \omega + \frac{1}{\omega}$, puis les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Comment utiliser ce qui précède pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Correction :

1. Comme $\omega \neq 1$, on a $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - \omega} = 0$.
2. Comme $\omega \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation précédente par ω^2 et obtenir :

$$\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0 \iff \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} + 1 = 0$$

$$\text{Or, } \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + 2.$$

$$\iff \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0.$$

$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$ est donc solution de l'équation du second degré :

$$\iff Z^2 + Z - 1 = 0$$

$$Z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{De plus, } \omega + \frac{1}{\omega} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + \overline{\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)} = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

$$\text{Enfin, } 0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2} \text{ entraîne } \cos \left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0.$$

Donc,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

On note traditionnellement $\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or, et $\psi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, l'opposée de la seconde racine de $Z^2 + Z - 1$ soit :

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \varphi \quad \text{et} \quad 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \psi.$$

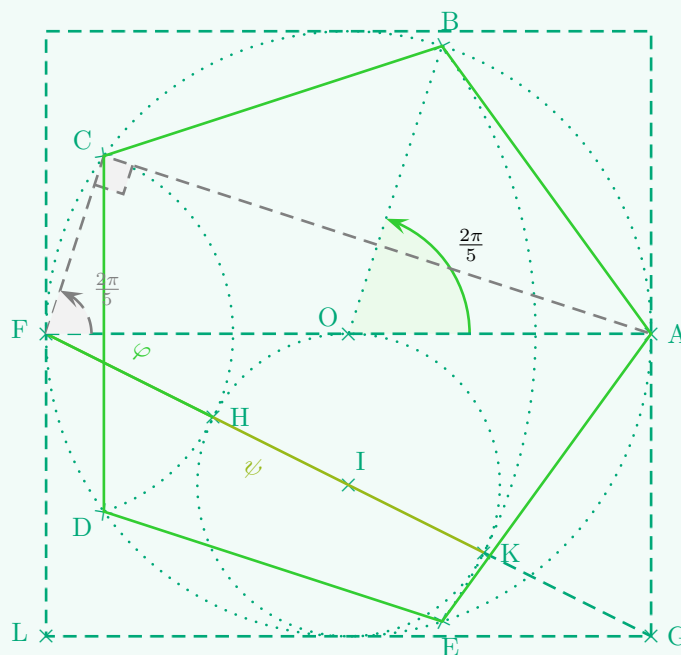
3. Dans la figure ci-dessus, le triangle AFC est rectangle en C (angle inscrit dans un demi-cercle). L'angle en F vaut $\frac{2\pi}{5}$ (angle inscrit moitié de l'angle au centre).

On a donc,

$$FC = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \varphi.$$

De même, en considérant le triangle AFB, on obtient

$$FB = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \psi.$$



Il reste donc à construire φ et ψ , c'est-à-dire $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Pour construire le nombre $\sqrt{5}$ avec la règle et le compas, il suffit de remarquer que c'est la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 et 2 d'après le théorème de Pythagore comme c'est le cas dans le rectangle AFLG. Sa diagonale FG mesure donc $\sqrt{5}$.

Le point I est le milieu de la diagonale. Le cercle de centre I, passant par l'origine O, a pour rayon $\frac{1}{2}$. Le segment FI a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, on a :

$$FH = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{et} \quad FK = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \psi.$$

D'où la construction des points B et E, puis C et D en portant au compas les longueurs $FB = FE = FK$ et $FC = FD = FH$.

Exercice 9 : Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $\begin{cases} A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \\ B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 \end{cases}$.

1. Calculer $A + B$ et AB .
2. En déduire A et B .

Correction :

1. Comme $\omega \in \mathbb{U}_7$, facilement $A + B = \sum_{k=0}^6 \omega^k - 1 = -1$.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } AB &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4(1 + \omega + \omega^3)(1 + \omega^2 + \omega^3) \\ &= \omega^4(1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\ &= \omega^4 \left(\underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}_{=0} + 2\omega^3 \right) = 2\omega^7 = 2. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, A et B sont donc les racines du polynôme

$$X^2 + X + 2 = \left(X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \right) \left(X - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \right).$$

On les départage en remarquant que

$$\operatorname{Im}(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Comme $\sin$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$. Donc

$\operatorname{Im}(A) \geq \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$ et on choisira pour A la racine ayant une partie imaginaire positive :

$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1. \left(\frac{2z+1}{z-1} \right)^4 = 1.$$

$$3. z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$2. z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$$

$$4. 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$

$$5. z^6 + z^3(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$$

Correction :

1. On résout cette équation pour $z \neq 1$ et notons ω_k les 4 racines quatrièmes de l'unité.

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \iff \frac{2z+1}{z-1} = \omega_k \iff z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 2}.$$

Avec $\omega_k \in \{\pm 1, \pm i\}$, on trouve :

$$\mathcal{S} = \left\{-2, 0, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}.$$

2. Comme $\frac{16\sqrt{2}}{1-i} = \left(2e^{\frac{i\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\frac{16\sqrt{2}}{1-i}$. Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrièmes de l'unité $i, -1$ et $-i$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

$$\mathcal{S} = \left\{2e^{\frac{i\pi}{16}}, 2ie^{\frac{i\pi}{16}}, -2e^{\frac{i\pi}{16}}, -2ie^{\frac{i\pi}{16}}\right\} = \left\{2e^{\frac{i\pi}{16}}, 2e^{\frac{9i\pi}{16}}, 2e^{-\frac{15i\pi}{16}}, 2e^{-\frac{9i\pi}{16}}\right\}.$$

Ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.

3. Comme $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{12}}$, une racine primitive est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{-i\frac{\pi}{96}}$.

Il suffit alors de multiplier par les racines huitièmes de l'unité pour avoir toutes les solutions :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{\omega_0, \omega_0 e^{i\frac{\pi}{4}}, \omega_0 i, \omega_0 e^{i\frac{3\pi}{4}}, -\omega_0, -\omega_0 e^{i\frac{\pi}{4}}, -\omega_0 i, -\omega_0 e^{i\frac{3\pi}{4}}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{-i\frac{\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{i\frac{23\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{i\frac{47\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{i\frac{71\pi}{96}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{i\frac{95\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{-i\frac{73\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{-i\frac{49\pi}{96}}, \frac{1}{\sqrt[16]{2}} e^{-i\frac{25\pi}{96}}\right\}. \end{aligned}$$

4. Remarquons tout d'abord que -1 n'est pas solution de $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. On peut donc supposer $z \neq -1$.

$$\text{D'où } 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \iff 27(z-1)^6 = -(z+1)^6$$

$$\iff \frac{-27(z-1)^6}{(z+1)^6} = 1 \iff \left(\frac{i\sqrt{3}(z-1)}{z+1}\right)^6 = 1$$

$$\iff \frac{i\sqrt{3}(z-1)}{z+1} \in \mathbb{U}_6$$

$$\iff \frac{i\sqrt{3}(z-1)}{z+1} = e^{\frac{ik\pi}{3}} \text{ avec } k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket.$$

$$\iff z = \frac{i\sqrt{3} + e^{\frac{ik\pi}{3}}}{i\sqrt{3} - e^{\frac{ik\pi}{3}}} \text{ avec } k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket.$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{2 - i\sqrt{3}, 2 + i\sqrt{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{2+i\sqrt{3}}{7}, \frac{2-i\sqrt{3}}{7}\right\}.$$

5. Il est clair que -1 n'est pas solution. On peut donc diviser les deux membres de l'équation par $(1+z)^6$ et obtenir l'équation équivalente :

$$\left(\frac{z}{z+1}\right)^6 + \left(\frac{z}{z+1}\right)^3 + 1 = 0.$$

En posant $Z = \left(\frac{z}{z+1}\right)^3$, on trouve d'abord $Z = j$ ou $Z = \bar{j}$ dont les racines cubiques primitives sont respectivement $e^{\frac{2i\pi}{9}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{9}}$.

On résout donc les 6 équations :

$$\frac{z}{z+1} = j^k e^{\frac{2i\pi}{9}}, k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{j^k e^{\frac{2i\pi}{9}}}{1 - j^k e^{\frac{2i\pi}{9}}} \\ &= \frac{e^{\frac{(k+1)i\pi}{9}}}{2 \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{9}\right)} i \end{aligned}$$

$$\frac{z}{z+1} = \bar{j}^k e^{\frac{2i\pi}{9}}, k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{j}^k e^{\frac{2i\pi}{9}}}{1 - \bar{j}^k e^{\frac{2i\pi}{9}}} \\ &= -\frac{e^{\frac{(1-k)i\pi}{9}}}{2 \sin\left(\frac{(1-k)\pi}{9}\right)} i \end{aligned}$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) : $z^{n+1} = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $z \neq 0$ est une solution de (E), que vaut $|z|$? Résoudre alors (E).

Correction : $z = 0$ est une solution évidente de (E).

Supposons maintenant $z \neq 0$. On a alors :

$$z^{n+1} = \bar{z} \implies |z|^{n+1} = |z| \iff |z|(|z|^n - 1) = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad |z| = 1.$$

On en déduit que si $z \neq 0$ alors $|z| = 1$ et $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) se réduit alors à $e^{i(n+1)\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i(n+2)\theta} = 1 \iff z^{n+2} = 1$.

En conclusion, $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathbb{U}_{n+2}$.

Exercice 12 : Résoudre de deux manières l'équation $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.

En déduire la valeur de $\cotan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Correction : Remarquons tout d'abord que $z = 1$ n'est pas solution de $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$. On peut donc supposer $z \neq 1$.

$$\begin{aligned} (z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\} \\ &\iff \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \quad \text{avec } k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket \\ &\iff z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1} = -i \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \quad \text{avec } k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket. \\ &\iff z = i \cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket. \end{aligned}$$

Développons les deux binômes de newton :

$$\begin{aligned}
 (z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 &\Leftrightarrow z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 - z^5 + 5z^4 - 10z^3 + 10z^2 - 5z + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 10z^4 + 20z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 5Z^2 + 10Z + 1 = 0 \text{ en posant } Z = z^2 \\
 &\Leftrightarrow Z = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} \\
 &\Leftrightarrow z^2 = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} < 0 \quad \text{ou} \quad z^2 = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} < 0 \\
 &\Leftrightarrow z \in \left\{ i \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -i \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, i \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -i \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{4}$ alors $\cotan\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 1$. La seule valeur qui convient est donc $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$:

$$\cotan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

Exercice 13 : Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ dans $\mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : En remarquant que i n'est jamais solution de $(z+i)^n = (z-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, le raisonnement est identique à la première partie de l'exercice précédent en supposant $z \neq i$.

$$\begin{aligned}
 (z+i)^n - (z-i)^n = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad (\text{pas de solution pour } k=0) \\
 &\Leftrightarrow z = i \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \\
 &\Leftrightarrow z = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Exercice 14 :

1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n -ième de 1.

Calculer $\sum_{k=1}^n k\omega^{k-1}$.

Correction :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega^k = (1+\omega)^n = -2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
2. Si $\omega = 1$, alors $\sum_{k=1}^n k\omega^{k-1} = \frac{n(n+1)}{2}$.

On considère maintenant que $\omega \neq 1$ et on sait, depuis le chapitre sur les sommes que :

$$\forall z \neq 1, \sum_{k=1}^n kz^{k-1} = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n k\omega^{k-1} = \frac{1 - (n+1)\omega^n + n\omega^{n+1}}{(1-\omega)^2}$$

Or, $\omega^n = 1$ et $\omega^{n+1} = \omega$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n k\omega^{k-1} &= \frac{1 - (n+1) + n\omega}{(1-\omega)^2} = \frac{n(\omega-1)}{(1-\omega)^2} \\ &= \frac{n}{\omega-1}. \end{aligned}$$

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^{n-1} + \dots + z + 1$.

2. Démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n$.

3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction :

1. On a :

$$(z-1)P(z) = (z-1)(z^{n-1} + \dots + z + 1) = z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right),$$

Égalité également vraie pour $z = 1$. En identifiant, on obtient :

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

2. Il suffit d'évaluer P en 1 soit $P(1) = n$ puis

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n.$$

3. À partir du résultat précédent, l'éternelle factorisation par l'angle moitié donne

$$1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -2i e^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) &= 2^{n-1} (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2^{n-1} (-i)^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Or, $\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) \frac{i\pi}{n}} = e^{\frac{n(n-1)}{2} \frac{i\pi}{n}} = e^{(n-1) \frac{i\pi}{2}} = i^{n-1}$. On en déduit :

$$1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2^{n-1} \times (-i^2)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

III/ Géométrie complexe

Exercice 16 : Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\frac{2}{1+it}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction : Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\frac{2}{1+it}$ sont correctement définis pour tout t . Il suffit de calculer :

$$\left| \frac{2}{1+it} - 1 \right| = \left| \frac{1-it}{1+it} \right| = \frac{|1-it|}{|1+it|} = 1.$$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\frac{2}{1+it}$ appartiennent au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 17 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction : Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\bar{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$ et $\bar{u} = \frac{1}{u}$, ($u \neq 0$). Le reste se fait tout seul :

$$\begin{aligned} |xy + xz + yz|^2 &= (xy + xz + yz) \overline{(xy + xz + yz)} = (xy + xz + yz)(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}) \\ &= |xy|^2 + |xz|^2 + |yz|^2 + |y|x\bar{z} + |x|y\bar{z} + |y|z\bar{y} + |z|x\bar{y} + |y|z\bar{x} + |z|y\bar{x} \\ &= 3 + x\bar{z} + y\bar{z} + z\bar{y} + x\bar{y} + z\bar{x} + y\bar{x} \\ &= 3 + 2\operatorname{Re}(xy + xz + yz) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} |x + y + z|^2 &= (x + y + z) \overline{(x + y + z)} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + x\bar{y} + x\bar{z} + y\bar{x} + y\bar{z} + z\bar{x} + z\bar{y} \\ &= 3 + x\bar{z} + y\bar{z} + z\bar{y} + x\bar{y} + z\bar{x} + y\bar{x} \\ &= 3 + 2\operatorname{Re}(xy + xz + yz) \end{aligned}$$

Égalité entre deux nombres positifs donc entre leur racine positive :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{U}^3, |x + y + z| = |xy + xz + yz|.$$

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 19 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$

2. $|z - 3| = 2$

3. $|z - 2| = 4$

4. $|z + i| \leq 5$

5. $|z - 2| = |z - 4i|$

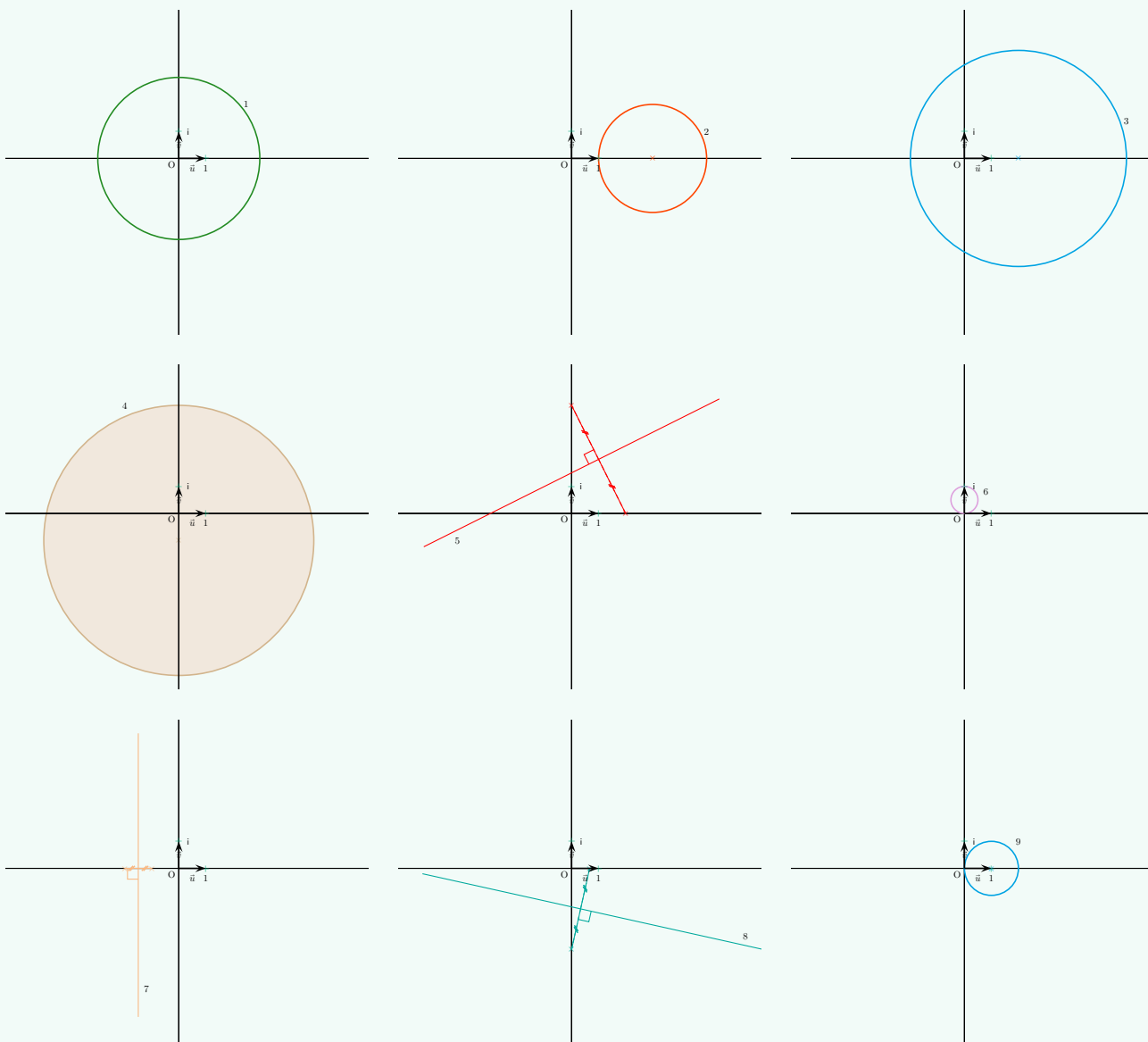
6. $|2z - i| = 1$

7. $\left| \frac{z+1}{z+2} \right| = 1$

8. $\frac{|3z - 2|}{|z + 3i|} = 3$

9. $z + \bar{z} = z\bar{z}$

Correction :



Exercice 20 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z - i)\overline{(z - i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z - i)\overline{(z - i)}$.
 3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'afixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) = 8.$$

Correction :

- 1.
- $(z - i)\overline{(z - i)} = 9 \iff |z - i| = 3.$

C'est le cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 3.

2. $(z - i)\overline{(z - i)} = |z|^2 - \bar{1}z - i\bar{z} - 1 = |z|^2 + i(z - \bar{z}) - 1 = |z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) - 1$
 3. D'après les questions précédentes, $|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) = 8 \iff |z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) - 1 = 9 \iff |z - i| = 3.$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 3.

Exercice 21 : Montrer que les points du plan dont l'afixe vérifie $|z - 3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - 5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :**1^{ère} méthode : on reste dans $\mathbb{C}$:** Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned} |z - 3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - 5| &\iff (z - 3)\overline{(z - 3)} = \frac{1}{2}(z - 5)\overline{(z - 5)} \\ &\iff 2z\bar{z} - 6\bar{z} - 6z + 18 = z\bar{z} - 5\bar{z} - 5z + 25 \\ &\iff z\bar{z} - \bar{z} - z = 7 \\ &\iff (z - 1)\overline{(z - 1)} - 1 = 7 \quad (\text{avec un peu de métier}) \\ &\iff |z - 1| = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.**2^{ème} méthode : on pose $z = x + iy$:**

$$\begin{aligned} |z - 3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - 5| &\iff (x - 3)^2 + y^2 = \frac{1}{2}((x - 5)^2 + y^2) \\ &\iff \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x - \frac{7}{2} = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 + y^2 = 8. \end{aligned}$$

On retrouve le cercle de centre $\Omega(1; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 22 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

1. $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

2. $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$

3. $\arg(z^2) = 0$

4. $\arg(z-1) = \frac{\pi}{2}$

5. $\arg(z-1-2i) = \frac{\pi}{3}$

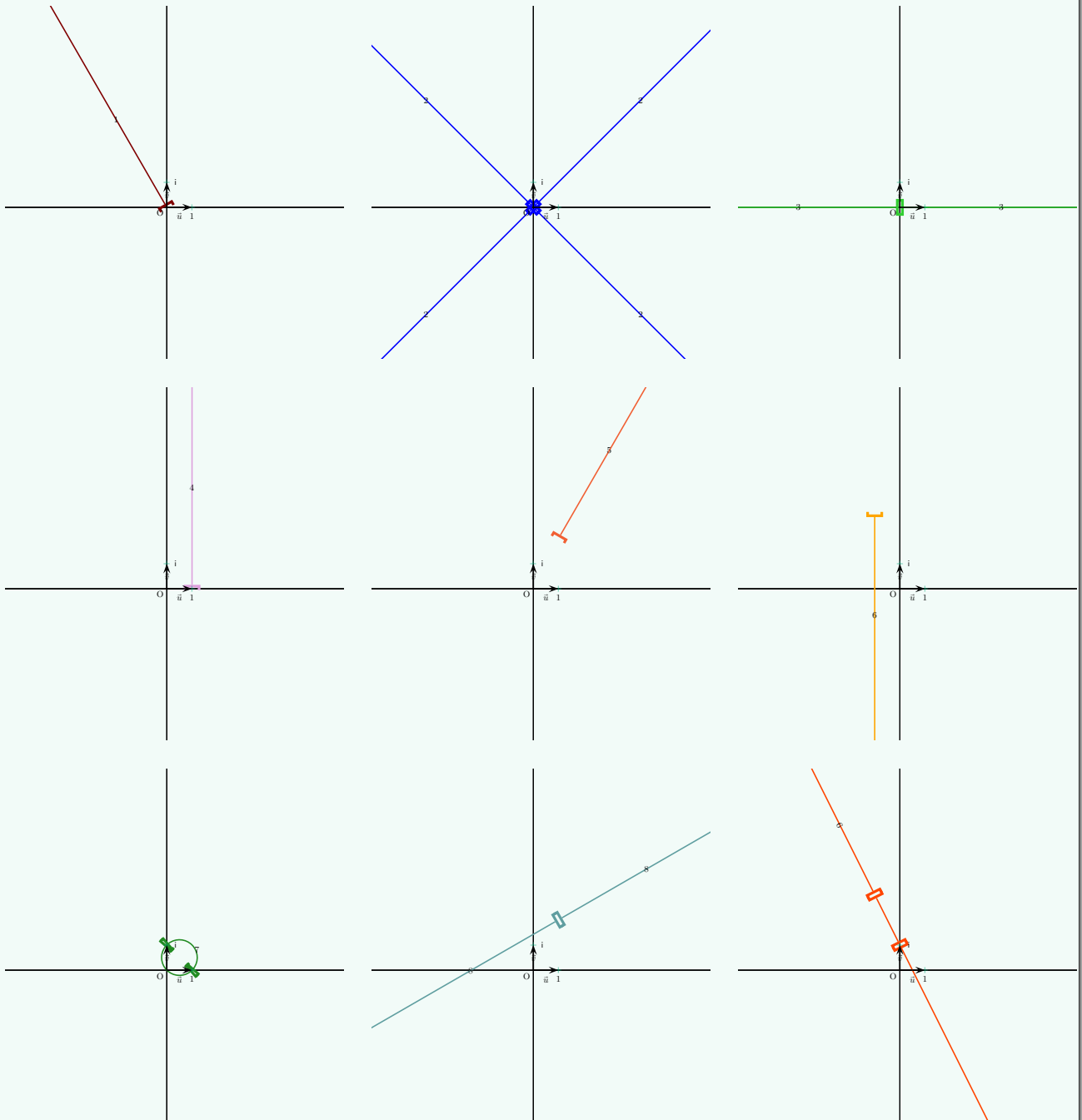
6. $\arg(z-3i+1) = \frac{3\pi}{2}$

7. $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

8. $\arg((z-1-2i)^2) = \frac{\pi}{3}$

9. $\arg(z-3i+1) = \arg(z-i)$

Correction : Sauf mention contraire dans l'énoncé, on a représenté, ci-dessous, les ensembles de points modulo 2π :



Exercice 23 : Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3 + 2i)$, $B(0)$ et $C\left(-1 + \frac{3}{2}i\right)$;
2. $A(2 - i)$, $B(1 - 4i)$ et $C(-2 - 3i)$;
3. $A(-4)$, $B(-2 + 3i)$ et $C(4 - i)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Correction :

1. $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1 + \frac{3}{2}i}{3 + 2i} = \frac{1}{2}i$ donc $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.
2. $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3 + i}{1 + 3i} = i$ donc $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
3. $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{6 - 4i}{2 + 3i} = -2i$ donc $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.

Exercice 24 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. les points d'affixes z , z^2 , z^3 forment un triangle rectangle.
2. (*) Les points d'affixes 1 , z et z^3 sont alignés.
3. (*) les points d'affixes j , z , jz sont alignés.

Correction :

1. Les points d'affixes z , z^2 , z^3 sont forment un triangle rectangle si, et seulement si $z = 0$ (un point), $z = 1$ (un point) ou exclusif $\frac{z^3 - z^2}{z^2 - z} = z \in i\mathbb{R}$ ou $\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1 \in i\mathbb{R}$ dans les cas non dégénérés en l'un ou l'autre de ses sommets.

L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe imaginaire, de la droite d'équation $x = -1$ et du point d'affixe 1.

2. Les points d'affixes 1 , z , z^3 sont alignés si, et seulement si $z = 1$ (un point), $z = 0$ (deux points) ou $\frac{z^3 - z}{z - 1} = z(z + 1) \in \mathbb{R}$ dans le cas où $z \neq 1$. Les deux premiers cas étant triviaux, on s'occupe du dernier :

Or,

$$\begin{aligned} z(z + 1) \in \mathbb{R} &\iff z(z + 1) = \bar{z}(\bar{z} + 1) \iff z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \\ &\iff (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe réel et de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

3. Les points d'affixes j , z , jz sont alignés si, et seulement si $\frac{jz - j}{z - j} \in \mathbb{R}$. Le cas où $z = j$ est trivial car alors les deux points seraient confondus et deux points alignés. On suppose dorénavant $z \neq j$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{jz-j}{z-j} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{jz-j}{z-j} = \overline{\left(\frac{jz-j}{z-j}\right)} \Leftrightarrow \frac{jz-j}{z-j} = \frac{\bar{j}\bar{z}-\bar{j}}{\bar{z}-\bar{j}} \\ &\Leftrightarrow \frac{jz-j}{z-j} = \frac{j^2\bar{z}-j^2}{\bar{z}-j^2}, \quad \text{car } \bar{j} = j^2. \\ &\Leftrightarrow (jz-j)(\bar{z}-j^2) - (z-j)(j^2\bar{z}-j^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (j-j^2)z\bar{z} + (-1+j^2)z + (1-j)\bar{z} = 0, \quad \text{car } j^3 = 1. \\ &\Leftrightarrow j(1-j)z\bar{z} + (j-1)(j+1)z + (1-j)\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{1+j}{j}z + \frac{1}{j}\bar{z} = 0 \end{aligned}$$

Or, $\frac{1+j}{j} = -j$ et $\frac{1}{j} = \bar{j}$,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z\bar{z} + jz + \bar{j}\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow |z + \bar{j}|^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega(-\bar{j}) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et de rayon } 1. \end{aligned}$$

Remarque : Si on ne reconnaît pas le module de $z + \bar{j}$, on peut aussi passer par la forme algébrique :

$$\begin{aligned} \underbrace{z\bar{z} + jz + \bar{j}\bar{z}}_{2\operatorname{Re}(jz)} = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\operatorname{Re}\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + iy)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}z = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

On retrouve le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rayon 1.

Exercice 25 : Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b, c . On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer qu'il y a équivalence entre :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solution j ou $\bar{j}$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. Bonus : $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$.

Correction :

$$\begin{aligned}
 \text{ABC est équilatéral} &\Leftrightarrow C = r_{A, \pi/3}(B) \text{ ou } C = r_{A, -\pi/3}(B) \\
 &\Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a) \text{ ou } c - a = (-j)(b - a) \\
 &\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \\
 &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
 &\Leftrightarrow (j^2)^2a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
 &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0.
 \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
 j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
 &\Leftrightarrow (ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc,
 \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \\
 &\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0 \\
 &\Leftrightarrow (c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a)}{(b - c)(c - a)(a - b)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b} = 0.
 \end{aligned}$$

Exercice 26 : Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction : En supposant que ABC est direct, on calcule les affixes des nouveaux sommets en utilisant l'exercice précédent puis les affixes des centres de gravité (moyenne des trois sommets), puis, soit on applique l'exercice (25) soit on montre que chaque sommet du nouveau triangle est obtenu par rotation d'un sommet par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre le troisième sommet.

Soient $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

— A' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c).$$

— De même pour B' , image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a).$$

— Et C' , image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

Soient $G_{A'}(g_{A'})$, $G_{B'}(g_{B'})$ et $G_{C'}(g_{C'})$ les centres de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC' . On a :

$$\begin{aligned} g_{A'} &= \frac{1}{3} \left(c + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c) + b + c \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})b + (2 - e^{i\frac{\pi}{3}})c \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})b + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})c \right) \\ g_{B'} &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})a \right) \\ g_{C'} &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})a + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})b \right) \end{aligned}$$

On peut alors :

1. Vérifier que les longueurs des côtés de $G_{A'}G_{B'}G_{C'}$ sont égales en posant $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$:

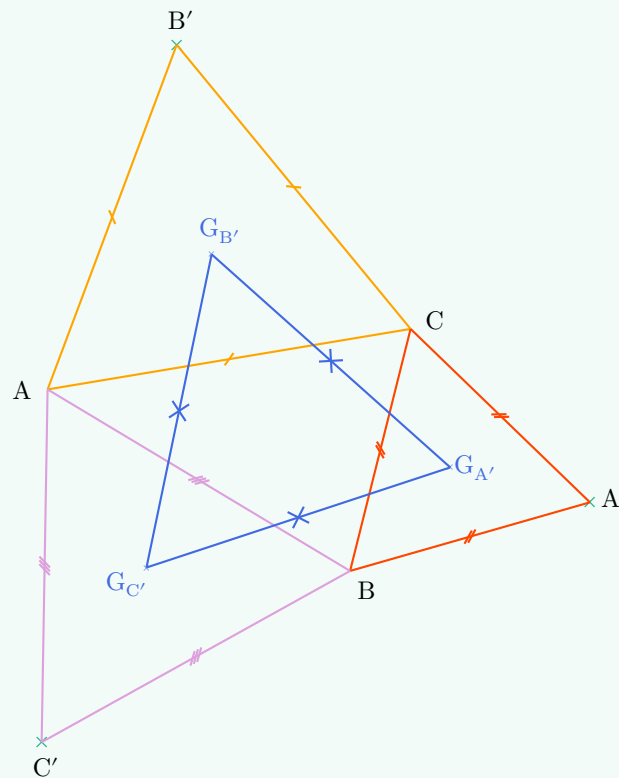
$$\begin{aligned} - \quad G_{A'}G_{B'} &= |g_{B'} - g_{A'}| = \frac{1}{3} \left| (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})a - (1 + e^{i\frac{\pi}{3}})b + (e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})c \right| \\ &= \frac{1}{3} |(1-j)a - (1-j^2)b + (j-j^2)c| \\ - \quad G_{B'}G_{C'} &= |g_{C'} - g_{B'}| = \frac{1}{3} \left| (e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})a + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})b - (1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c \right| \\ &= \frac{1}{3} |(j-j^2)a + (1-j)b - (1-j^2)c| \\ &= \frac{1}{3} |j| \left| (1-j)a + \left(\frac{1}{j} - 1\right)b - \left(\frac{1}{j} - j\right)c \right| \quad \left(\frac{1}{j} = \bar{j} = j^2 \text{ et } |j| = 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} |(1-j)a - (1-j^2)b + (j-j^2)c| \\ &= G_{A'}G_{B'}. \\ - \quad G_{C'}G_{A'} &= |g_{A'} - g_{C'}| = \frac{1}{3} \left| -(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})a + (e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})b + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})c \right| \\ &= \frac{1}{3} |-(1-j^2)a + (j-j^2)b + (1-j)c| \\ &= \frac{1}{3} \left| \frac{1}{j} \right| |-(j-1)a + (j^2-1)b + (j-j^2)c| \quad (j^3 = 1) \\ &= \frac{1}{3} |(1-j)a - (1-j^2)b + (j-j^2)c| \\ &= G_{A'}G_{B'}. \end{aligned}$$

2. Vérifier que, par exemple, $G_{C'}$ est l'image de $G_{B'}$ par la rotation de centre $G_{A'}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} g_{A'} + e^{i\frac{\pi}{3}}(g_{B'} - g_{A'}) &= \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)g_{A'} + e^{i\frac{\pi}{3}}g_{B'} \\ &= \frac{1}{3} \left((1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})b + (1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) \left((1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})c \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c + e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})a \right) \right) \right. \\ &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})a + (1 - e^{2i\frac{\pi}{3}})b + \underbrace{(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{2i\frac{\pi}{3}})}_{=0} c \right) \\ &= \frac{1}{3} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})a + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})b \right) \\ &= g_{C'}. \end{aligned}$$

3. En utilisant l'exercice (25), on peut vérifier que $g_{A'}j^2 + g_{B'}j + g_{C'} = 0$ ou $g_{A'}\bar{j}^2 + g_{B'}\bar{j} + g_{C'} = 0$. Or,

$$\begin{aligned} 3(g_{A'}\bar{j}^2 + g_{B'}\bar{j} + g_{C'}) &= e^{2i\frac{\pi}{3}} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})b + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})c \right) + e^{-2i\frac{\pi}{3}} \left((1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})a \right) \\ &\quad + (1 + e^{i\frac{\pi}{3}})a + (1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})b \\ &= \underbrace{(e^{-2i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}})}_{=0}a + \underbrace{(e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}})}_{=0}b + \left(\underbrace{e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{=0} + \underbrace{e^{-2i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}_{=0} \right)c \\ &= 0. \end{aligned}$$



IV/ Transformations géométriques _____

Exercice 27 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto i\bar{z}$	5. $z \mapsto (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.$
2. $z \mapsto \frac{1}{i}z$	6. $z \mapsto z + 3 - i$
3. $z \mapsto z + (2 + i)$	7. $z \mapsto 2z + 3$
4. $z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$	8. $z \mapsto iz + 1$
	9. $z \mapsto (1 - i)z + 2 + i$

Correction :

- On écrit $\frac{1}{i}z = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $(2, 1)$.
- L'application de la forme $z \mapsto az + b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

On trouve $z = 1 + i$, le centre de la similitude est donc le point $A(1, 1)$.

On a de plus

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\frac{\pi}{3}$.

- Si $\alpha = 0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe z solution de l'équation

$$z = (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha \iff z = 1.$$

Le centre de la similitude est donc le point $A(1, 0)$.

De plus, on a

$$1 + i \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \times (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} e^{i\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport $\frac{1}{\cos \alpha}$ et d'angle α .

- C'est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.
- $\omega = 2\omega + 3 \iff \omega = -3$. C'est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.
- $\omega = i\omega + 1 \iff \omega = \frac{1}{2}(1 + i)$.

Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, c'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- $\omega = (1 - i)\omega + 2 + i \iff \omega = 1 - 2i$.

Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, c'est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 28 : Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $j = e^{i2\pi/3}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on déterminera l'affixe du centre.

Exercice 29 : On donne A, d'affixe $1 + i$, B, d'affixe $1 - i$ et C, d'affixe $4 + 3i$ dans le plan complexe. Déterminer la nature du triangle ABA' où A' est le symétrique de A par rapport au centre de gravité de ABC.

Exercice 30 : Dans le plan complexe, on donne A(2), B(1 - i) et C(1 + i).

- Quelle est la nature de ABC ?

2. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$ et r est la rotation de centre A qui envoie B sur C . Si M est un point de Γ et si M' est son image par r , démontrer que C , M et M' sont alignés.

Nombres complexes II

1. Simplifier (factoriser) $\sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.

$$\sqrt{\left(\sqrt[4]{a}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt[4]{a}+1\right)^2} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in [0; 1] \\ 2\sqrt{a} & \text{si } a \in [1; +\infty[. \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

Posons $X = x + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} 6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 &= x^2 \left(6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 (6X^2 - 12 - 13X + 12) = x^2 (6X^2 - 13X) \\ &= xX(6xX - 13x) \quad (\text{On revient à } x) \\ &= (x^2 + 1)(6x^2 + 6 - 13x) \\ &= (x^2 + 1)(2x - 3)(3x - 2). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right\}$.

3. Donner, avec ou sans calculs, les racines quatrièmes de l'unité.

$1, i = e^{i\frac{\pi}{2}}, -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$.

4. Déterminer les racines quatrièmes de $\sqrt{8} + i\sqrt{8}$. On les donnera sous leur forme exponentielle.

$\sqrt{8} + i\sqrt{8} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc ses racines quatrièmes sont

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{16}}, -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{16}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{16}}i = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{16}} \text{ et } -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{16}}i = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{16}}.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 - (1-i)z - i = 0$.

Point besoin de discriminant ici car 1 est racine i.e. $z^2 - (1-i)z - i = (z-1)(z+i)$ et la deuxième racine qui s'en suit.

En l'absence de racines évidentes, $\Delta = (1-i)^2 + 4i = 2i = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$ puis

$$z_1 = \frac{1-i+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = -i.$$

6. Trouver tous les couples $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $\begin{cases} z + z' = 1 - i \\ zz' = -i \end{cases}$

z et z' sont les racines du polynôme précédent.

Les couples cherchés sont donc $(1; -i)$ et $(-i; 1)$.

7. En posant $u = \sin(x)$ déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{3 + \cos^2(x)}$ sur $I \subset \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in I$, $3 + \cos^2(x) \neq 0$ donc $\frac{\cos(x)}{3 + \cos^2(x)}$ est continue sur I .

Avec $u = \sin(x)$, on a $du = \cos(x) dx$ et $3 + \cos^2(x) = 4 - u^2$ puis

$$\forall x \in I, \int \frac{\cos(x)}{3 + \cos^2(x)} = \int^u \frac{du}{4 - u^2} = \frac{1}{4} \ln \left(\left| \frac{u+2}{u-2} \right| \right) = \frac{1}{4} \ln \left(\left| \frac{\sin(x)+2}{\sin(x)-2} \right| \right) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin(x)}{2 - \sin(x)} \right).$$

Nombres complexes II

1. Simplifier (factoriser) $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

$$\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\sqrt{a-1}+1}{a \geq 1}\right)^2}_{\geq 0}} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a-1}-1}{a \geq 1}\right)^2} = \begin{cases} 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in [2; +\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [1; 2]. \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

Posons $X = x + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 3x + 4 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 (X^2 - 2 + 3X + 4) = x^2 (X^2 + 3X + 2) \\ &= x (X + 1) x (X + 2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1) \quad (\text{On revient à } x) \\ &= (x^2 + x + 1)(x + 1)^2. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{-1\}$.

3. Donner, avec ou sans calculs, les racines troisièmes de l'unité.

$1, j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

4. Déterminer les racines cubiques de $-4 + 4i\sqrt{3}$. On les donnera sous leur forme exponentielle.

$-4 + 4i\sqrt{3} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc ses racines cubiques sont $2e^{i\frac{2\pi}{9}}, 2e^{i\frac{2\pi}{9}}j = 2e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $2e^{i\frac{2\pi}{9}}j^2 = 2e^{-i\frac{4\pi}{9}}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 + (1-i)z - i = 0$.

Point besoin de discriminant ici car -1 est racine *i.e.* $z^2 + (1-i)z - i = (z+1)(z-i)$ et la deuxième racine qui s'en suit.

En l'absence de racines évidentes, $\Delta = (1-i)^2 + 4i = 2i = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$ puis

$$z_1 = \frac{i-1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i-1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = -1.$$

6. Trouver tous les couples $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $\begin{cases} z + z' = i - 1 \\ zz' = -i \end{cases}$

z et z' sont les racines du polynôme précédent.

Les couples cherchés sont donc $(-1; i)$ et $(i; -1)$.

7. En posant $u = \tan(x)$ déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$ sur $I \subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in I$, $\cos(x) \neq 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur I .

Avec $u = \tan(x)$, on a $du = \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ et $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + u^2$ puis

$$\forall x \in I, \int \frac{dx}{\cos^4(x)} = \int^u \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int^u (1 + u^2) du = u + \frac{1}{3}u^3 = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x).$$

Solutions d'équation et géométrie

Problème 1 (Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$) – On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (\text{E})$$

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - 10X + 5 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$.
 (b) En développant, trouver une première résolution de (E).
2. À partir de l'expression des racines 5^{ème} de l'unité, déduire une seconde résolution de (E).
3. Confronter les résultats des questions précédentes et donner les tangentes des nombres $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.
On mettra les résultats sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$ où $p, q, n \in \mathbb{Z}$.
4. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Problème 2 (Construction géométrique des images des racines d'une équation) –

Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on appelle (E) l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z - 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2 .

On note M_1, M_2, P, A, B, C les points d'affixes respectives $z_1, z_2, e^{i\theta}, 1, -1, i$ dans un repère orthonormé direct du plan.

On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure.

L'objectif est de construire les points M_1 et M_2 à partir de ces trois points à l'aide d'une règle et d'un compas.

1. Que vaut la somme des racines de l'équation ? Justifiez que P est le milieu de $[M_1 M_2]$.
2. Donnez les expressions de z_1 et z_2 en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. (a) Montrez que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}$ et $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}$ sont deux réels positifs.
 (b) En déduire les formes exponentielles de $z_1 + 1, z_2 + 1$ et $e^{i\theta} + 1$.
 (c) Montrer que $\arg\left(\frac{z_2 + 1}{z_1 + 1}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\theta} + 1}{z_1 + 1}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Qu'en déduire pour les points M_1, M_2, P et B ?

4. Calculer $|i - 1|^2, |z_1 - 1|^2$ et $|z_2 - 1|^2$. Qu'en déduire pour les points M_1, M_2 et C ?
5. Expliquer comment, à partir du point P , construire à la règle et au compas les points M_1 et M_2 sans résoudre l'équation (E).

Faire une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Solutions d'équation et géométrie

Problème 1 (Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$) – On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \quad (\text{E})$$

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - 10X + 5 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$.

Correction : Sans difficulté particulière : $5 - 2\sqrt{5}$ et $5 + 2\sqrt{5}$.

- (b) En développant, trouver une première résolution de (E).

Correction : On développe :

$$(1 + iz)^5 - (1 - iz)^5 = 10iz - 20iz^3 + 2iz = 2iz(5 - 10z^2 + z^4).$$

L'équation (E) est équivalente à l'équation $z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0$.

On résout $z^4 - 10z^2 + 5 = 0$ en posant $X = z^2$, ce qui nous ramène à l'équation précédente.

Remarquons que les racines de cette équation sont deux réels strictement positifs.

Les racines de (E) sont donc $0, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

2. À partir de l'expression des racines 5^{èmes} de l'unité, déduire une seconde résolution de (E).

Correction : Remarquons d'abord que $z = -i$ n'est pas solution de (E), donc que $(1 - iz) \neq 0$.

On peut donc diviser par $(1 - iz)^5$ sans perdre l'équivalence.

$$\begin{aligned} (\text{E}) &\Leftrightarrow \frac{(1 + iz)^5}{(1 - iz)^5} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^5 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \text{ où } k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket \\ &\Leftrightarrow 1 + iz = (1 - iz) \times e^{i\frac{2k\pi}{5}} \text{ où } k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket \\ &\Leftrightarrow iz \left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1 \text{ où } k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket \end{aligned}$$

Remarquons encore que pour $k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket$, $1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}} \neq 0$ car $\frac{2k\pi}{5} \neq \pi [2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc (E)} &\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1}{i \left(e^{i\frac{2k\pi}{5}} + 1\right)} \text{ où } k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \text{ où } k \in \llbracket -2; 2 \rrbracket. \end{aligned}$$

3. Confronter les résultats des questions précédentes et donner les tangentes des nombres $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

On mettra les résultats sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$ où $p, q, n \in \mathbb{Z}$.

Correction : Il apparaît donc que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sont les deux racines positives de l'équation (E) et de plus, $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$$\text{Donc } \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

4. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Correction : Soit $x = \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$. On sait d'après une formule de trigonométrie que $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$, donc ici, il vient l'égalité $b = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{2x}{1 - x^2}$, ou encore $bx^2 + 2x - b = 0$.

On résout cette équation, on lui trouve deux racines dont l'une est positive et l'autre non.

Comme $x > 0$, on en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}.$$

Problème 2 (Construction géométrique des images des racines d'une équation) –

Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on appelle (E) l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z - 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2 .

On note M_1, M_2, P, A, B, C les points d'affixes respectives $z_1, z_2, e^{i\theta}, 1, -1, i$ dans un repère orthonormé direct du plan.

On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure.

L'objectif est de construire les points M_1 et M_2 à partir de ces trois points à l'aide d'une règle et d'un compas.

1. Que vaut la somme des racines de l'équation ? Justifiez que P est le milieu de $[M_1M_2]$.

Correction : On sait que la somme des racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est $-\frac{b}{a}$.

Pour notre équation, on a alors $z_1 + z_2 = 2e^{i\theta}$ i.e. $\frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2} = z_P$.

Le point P est donc le milieu de $[M_1M_2]$.

2. Donnez les expressions de z_1 et z_2 en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Correction : Le discriminant Δ de (E) s'écrit $\Delta = 4e^{2i\theta} + 4 = 4(e^{2i\theta} + 1) = 8\cos(\theta)e^{i\theta}$.

Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) \geq 0$ et une racine carrée de Δ est donc $\sqrt{8\cos(\theta)}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Les racines de (E) sont alors $z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\cos(\theta)}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\cos(\theta)}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

3. (a) Montrez que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}$ et $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}$ sont deux réels positifs.

Correction : Pour le premier des deux nombres, c'est évident, puisqu'il est la somme de nombres positifs car $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Pour le second, on manipule un peu l'expression :

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)} &= \frac{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos(\theta)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} && \left(\text{on multiplie par } \frac{1}{1}\right) \\ &= 2 \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} && \left(\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

- (b) En déduire les formes exponentielles de $z_1 + 1$, $z_2 + 1$ et $e^{i\theta} + 1$.

Correction :

$$z_1 + 1 = e^{i\theta} + 1 + \sqrt{2\cos(\theta)}e^{i\frac{\theta}{2}} = \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}\right)}_{\geq 0 \text{ d'après la question précédente}} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

$$z_2 + 1 = \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}\right)}_{\geq 0 \text{ d'après la question précédente}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

et

$$e^{i\theta} + 1 = \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\geq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

- (c) Montrer que $\arg\left(\frac{z_2 + 1}{z_1 + 1}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\theta} + 1}{z_1 + 1}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Qu'en déduire pour les points M_1, M_2, P et B ?

Correction : D'après la question précédente,

$$\arg\left(\frac{z_2 + 1}{z_1 + 1}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\theta} + 1}{z_1 + 1}\right) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

En terme d'angles, cela s'écrit :

$$(\overrightarrow{BM_1}; \overrightarrow{BM_2}) = (\overrightarrow{BM_1}; \overrightarrow{BP}) \equiv 0 [2\pi].$$

Les points B, M₁, M₂ et P sont donc alignés (et du même côté de B).

4. Calculer $|i - 1|^2$, $|z_1 - 1|^2$ et $|z_2 - 1|^2$. Qu'en déduire pour les points M₁, M₂ et C ?

Correction : Juste un peu de trigonométrie :

$$|i - 1|^2 = 2$$

$$z_1 - 1 = e^{i\theta} - 1 + \sqrt{2\cos(\theta)} e^{i\frac{\theta}{2}} = \left(\sqrt{2\cos(\theta)} + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} |z_1 - 1|^2 &= 2 \left(\cos(\theta) + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right|^2 \\ &= 2 \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad \left(\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$z_2 - 1 = e^{i\theta} - 1 - \sqrt{2\cos(\theta)} e^{i\frac{\theta}{2}} = \underbrace{\left(\sqrt{2\cos(\theta)} - 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}_{=\sqrt{2\cos(\theta)} + 2i \sin(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$|z_2 - 1|^2 = |z_1 - 1|^2 = 2.$$

Donc $|i - 1| = |z_1 - 1| = |z_2 - 1|$ i.e. $AC = AM_1 = AM_2$, les points M₁, M₂ et C sont donc sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

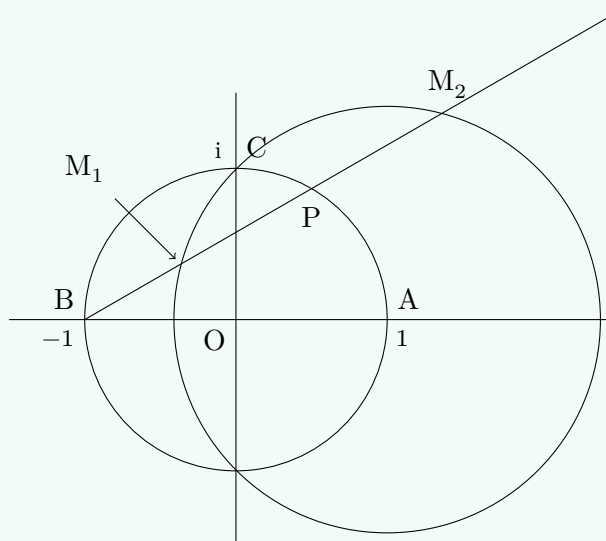
5. Expliquer comment, à partir du point P, construire à la règle et au compas les points M₁ et M₂ sans résoudre l'équation (E).

Faire une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Correction : D'après (3c), les points M₁ et M₂ appartiennent à la droite (BP).

D'après (4), les points M₁ et M₂ appartiennent au cercle de centre A passant par O.

Le point P étant connu, les points M₁ et M₂ sont donc les intersections entre (BP) et le cercle précédent.



Équations différentielles linéaires

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures. Les objectifs de formation sont les suivants :

— ...

— l'application du calcul des primitives aux équations différentielles.

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

- Équation différentielle linéaire du premier ordre
- Équation homogène associée.

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Cas particulier où la fonction a est constante.
- Ensemble des solutions de l'équation homogène.
- Principe de superposition.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Méthode de la variation de la constante.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

2. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

- Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

- Équation homogène associée.
- Ensemble des solutions de l'équation homogène. Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
- Principe de superposition.
- Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. *La démonstration de ce résultat est hors programme.*

Équations différentielles (linéaires)

La moindre modélisation d'un phénomène en physique amène souvent à la résolution d'une *équation différentielle* voire aux *dérivées partielles* dont la solution cherchée sera la trajectoire, la température, la tension, ... du système considéré. Les fonctions dépendent généralement des trois dimensions spatiales x, y, z et du temps t .

Un opérateur $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^4$ ou plus et une fonction f excitatrice donnés, une *équation différentielle* prend la forme générale :

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, f).$$

Les équations aux dérivées partielles ont une forme analogue.

On est loin de savoir résoudre *i.e.* trouver les *courbes intégrales*, toutes les équations différentielles existantes sous forme exacte ou même approchée.

L'exemple le plus connu est la résolution des *équations de Navier-Stokes* qui vous apportera un million de dollars et la gloire éternelle tant ses applications sont nombreuses et le problème difficile :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right)}_{\tilde{m}} = \underbrace{-\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueuse}}}.$$

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ $\left(\begin{array}{l} \text{équations différentielles linéaires du second} \\ \text{ordre à coefficients constants.} \end{array} \right)$

Dans ces cas là, les méthodes sont clairement définies et leur application quasi mécanique.

Les autres types ne peuvent en général **pas** se résoudre explicitement, à moins de pouvoir se ramener à des *équations différentielles linéaires*. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles, mais la problématique de résolution explicite qui nous occupe dans ce chapitre est absente dans ce contexte.

CONTENU

I	Équations et opérateurs linéaires	649
I.1	Linéarité et conséquences	649
I.2	Équations différentielles linéaires	651
II	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	654
II.1	Solutions de l'équation homogène	655
II.2	Solution particulière	657
II.3	Problème de Cauchy associé à une EDL ₁	660
II.4	Résolution des EDL ₁ à coefficients constants	663
III	Équations différentielles linéaires d'ordre 2	665
III.1	Solutions de l'équation homogène	666
III.2	Solution générale	673
III.3	Problème de Cauchy associé à une EDL ₂	677
	Feuille d'exercices n° 11 : Équations différentielles (linéaires)	685
	Feuille d'exercices n° 12 : Remédiation.	703
	Test n° 15 : Équations différentielles linéaires	707
	Test n° 16 : Équations différentielles linéaires 2	709
	Devoir en temps libre n° 12 : Méthode de variation de la constante d'ordre 2	711
	Correction	712
	Devoir surveillé n° 3 : Nombres complexes et équations différen-	
	tielles.	715
	Correction	719
	Programme de Khôlle des semaines 11 et 12	732
	Programme du chapitre XII	733

Remarques liminaires :

1. Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.

Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant la situation.

2. L'ensemble E considéré au cours de la première section sera supposé stable par combinaisons linéaires i.e.

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in E.$$

Nous reviendrons sur ce point au deuxième semestre mais comprenez pour l'instant, que la structure de E permet de considérer toutes les sommes d'éléments de E ainsi que les éléments multipliés par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ sans que l'on ne s'échappe de E .

L'ensemble des vecteur du plan, l'ensemble des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle I vérifient cette propriété.

I/ Équations et opérateurs linéaires

I.1 Linéarité et conséquences

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l’instant suffisante.

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles stables par combinaisons linéaires.

Un opérateur $T : E \mapsto F$ est dit *linéaire* si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, T(\lambda x +_E y) = \lambda T(x) +_F T(y).$$

Exemples 1 (Exemples d’opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{c} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$	$f \mapsto f' + af, a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'' + af' + bf, a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g)' + b(\lambda f + g) = \lambda(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)$

En particulier, si E est non vide alors $\forall x \in E, T(x - x) = T(x) - T(x) \implies T(0_E) = 0_F$.

Définition 2 : Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

— On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \tag{\mathcal{E}}$$

- $y \in E$ est l’inconnue cherchée.
- b en est appelé le *second membre*.
- On note $\mathcal{S}$ l’ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s’appelle une *solution particulière* et est notée en général y_p .
- On appelle *équation homogène associée* à $(\mathcal{E})$ ou *sans second membre* toute équation de la forme :

$$T(y) = 0. \tag{\mathcal{E}_0}$$

— On note $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_H$ l’ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.

Un des premiers avantages des équations linéaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème 1 (Principe de superposition) :

Soient $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in F$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $T(y) = b_1$ et $T(y) = b_2$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $T(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Preuve : Il suffit simplement d'utiliser la linéarité de T et d'écrire :

$$T(\lambda y_1 + y_2) \underset{\text{linéarité de } T}{=} \lambda T(y_1) + T(y_2) \underset{\text{définition de } y_1 \text{ et } y_2}{=} \lambda b_1 + b_2.$$

D'où le résultat.

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

On dit que $\mathcal{S}_0$ est un *sous-espace vectoriel* de E .

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in \mathcal{S}, \exists y_0 \in \mathcal{S}_0 / y = y_p + y_0.$$

On dit que $\mathcal{S}$ est un *sous-espace affine* de E dirigé par $\mathcal{S}_0$.

Preuve :

1. On sait déjà que $T(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.

Alors, $T(\lambda y_{0,1} + y_{0,2}) = \lambda T(y_{0,1}) + T(y_{0,2}) = 0$.

Donc, $\lambda y_{0,1} + y_{0,2} \in \mathcal{S}_0$ et le résultat cherché.

2. Comme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $T(y_p) = b$.

On a alors :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff T(y) = b \iff T(y) = T(y_p) \iff T(y) - T(y_p) = 0 \underset{\text{Linéarité}}{\iff} T(y - y_p) = 0 \\ &\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée} \\ &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0 \\ &\iff \exists y_0 \in \mathcal{S}_0, y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists y_0 \in \mathcal{S}_0, y = y_p + y_0. \end{aligned}$$

Comme $y \in \mathcal{S}$ était quelconque, on vient bien de montrer que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.

Toute solution générale d'une équation linéaire est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

ATTENTION

Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode 1 (Résoudre une équation linéaire) :

Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p .
3. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$ où $y_0 \in \mathcal{S}_0$.

Exemple 2 : Posons $E = \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T l'opérateur différentiel et $b = \cos$.

On considère l'équation linéaire :

$$T(f) = \cos \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x).$$

1. Les solutions de l'équation homogène associée $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ i.e. $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. La fonction $y_p = \sin$ est une solution particulière.

Il ne reste plus qu'à additionner :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto \sin(x) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

I.2 Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) : Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle *équation différentielle linéaire* d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle *équation homogène* associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle *ordre* d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.

- Résoudre ou intégrer une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \mapsto y(x)$ solutions de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle à préciser.
- On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une *solution particulière*.

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x , et x ou t sa variable.
- Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est *normalisée* ou *résolue*.
- Les courbes représentatives des solutions de $(\mathcal{E})$ sont appelées *courbes intégrales*.

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.

En effet, $x \mapsto x$ en est solution mais pas $x \mapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du **théorème (2)**.

- $2y' - y = e^x$ n'est pas homogène.

Remarques :

- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.

Elles seront en fait de classe $\mathcal{C}^r$ sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :

$$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)} (b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{r-1}(x)y^{(r-1)}),$$

somme de fonctions continues donc continues.

- On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.

Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

- L'équation $(\mathcal{E})$ correspond à l'opérateur

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^r(\mathbb{R}; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K}) \\ f &\longmapsto a_r f^{(r)} + \dots + a_1 f' + a_0 f \end{aligned}$$

où les coefficients a_i sont des fonctions continues.

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$RCu' + u = E(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$Li' + Ri = E(t).$$

- La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, la vitesse de désintégration $y'(t)$ est proportionnelle à sa concentration dans un rapport de $1/8000$ par an et vérifie donc l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation (datation au carbone 14).

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

- L'évolution au cours du temps de θ l'angle formé par un pendule de longueur ℓ et de masse m avec la verticale est donnée par l'équation différentielle **non** linéaire d'ordre 2 :

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0.$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β , la fonction $x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \quad (E_1)$$

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \quad (E_2)$$

3. Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f soit solution.

Correction :

1. Soit $f : x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ qui est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= (3x^2 + \alpha)e^x + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x \\ &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (3x^2 + 6x + \alpha)e^x + (x^3 + 3x^2 + \alpha x + \alpha + \beta)e^x \\ &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x \\ &\quad - 2[x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x \\ &\quad + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x \\ &= 6xe^x. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est donc bien solution de (E_1) .

2. Soit $f : x \mapsto ax + b$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

$$f'(x) = a$$

$$f''(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E_2) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x - 3 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 2b = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}$ est solution de (E_2) .

3. Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $] -1; 1[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1; 1[, \quad f'(x) &= \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x}{1-x^2} \times \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} f(x) + \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

En multipliant par $1-x^2$, non nul sur $] -1; 1[$:

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad (1-x^2)f'(x) = xf(x) + 1$$

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

II/ Équations différentielles linéaires d'ordre 1 _____

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre, **résolues** (i.e. le coefficient de y' vaut 1) :

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (\text{EDL}_1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I .

L'équation homogène associée (EDL_1) s'écrit :

$$y' + a(x)y = 0. \quad (\text{EDL}_1)_0$$

Le **théorème (2)** de structure s'applique à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

À retenir 1 :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & & \text{Solution} & & \text{Solution générale de} \\ \text{de (EDL}_1\text{)} & = & \text{particulière} & + & \text{l'équation homogène} \\ & & \text{de (EDL}_1\text{)} & & \text{(EDL}_1\text{)}_0 \end{array}$$

II.1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \mapsto e^{-A(x)}$. On dit alors que l'ensemble des solutions est une *droite vectorielle*, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION | Il n'y a qu'une solution de $(\text{EDL}_1)_0$ qui s'annule : la fonction nulle.

Preuve : Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A .

Sachant que y est une fonction dérivable par nécessité, la fonction $x \mapsto y(x) e^{A(x)}$ est donc également dérivable sur I et on a :

$$y \in \mathcal{S}_0 \iff y' + a(x)y = 0$$

En multipliant les deux membres par $e^{A(x)} \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\iff y' e^{A(x)} + A'(x)y e^{A(x)} = 0 \\ &\iff \forall x \in I, (y e^{A(x)})' = 0 \quad (\text{on reconnaît}) \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto y(x) e^{A(x)}$, de dérivée nulle sur l'intervalle I est donc constante sur I :

$$\begin{aligned} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) e^{A(x)} = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Exemple 5 : Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 : Considérons $(1 + x^2)y' + y = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

1. L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente.

D'après le **théorème (2)**, la solution générale est donc

$$x \mapsto 1 + \lambda e^{-\arctan(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 : Considérons $y' + xy = x$.

1. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.
3. Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

1. Au brouillon ou à la manière des physiciens,
 - (a) on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!).

L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.

- (b) On reconnaît la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
 - (c) On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
2. Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y .

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.
2. $y' = yx^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
3. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ sur $I =]0; \pi[$.

Correction :

1. Si $a \neq 0$, $x \mapsto \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sinon toute fonction constante convient.

2. $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

3. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0; \pi[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Les solutions de $y' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \lambda \sin(x)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

II.2 Solution particulière

Pour commencer, il s'agit de fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le **théorème (1)** de superposition.

Supposant cette première étape effectuée, on cherche une solution particulière de l'équation générale

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (\text{EDL}_1)$$

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale comme dans l'**exemple (7)** ou l'**exemple (8)**.

Exemple 8 : Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

1. $y' + ay = b$: La fonction constante $x \mapsto \frac{b}{a}$ est solution.
2. $y' + ay = be^{\alpha x}$: La fonction $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.
 - (a) $x \mapsto e^{2x}$ est solution de $y' + y = 3e^{2x}$.
 - (b) $x \mapsto e^{2x}$ n'est pas solution de $y' - 2y = 3e^{2x}$.

Mais n'y perdez pas trop de temps : s'il n'y a pas de solution évidente qui vous saute aux yeux, voici une méthode efficace, attribuée à Lagrange^[1], pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène.

[1]. **Joseph Louis, comte de Lagrange** (en italien Giuseppe Lodovico ou aussi Giuseppe Luigi De la Grange Tournier), né à Turin en **1736** et mort à Paris en **1813**, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français. À l'âge de trente ans, il quitte le Piémont et va séjourner à Berlin pendant vingt-et-un ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt-six dernières années à Paris, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Cassini. Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (dès 1797) avec Monge et Fourcroy. Il a aussi été le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

Méthode 3 (Variation de la constante) :

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL₁) non homogène sous la forme $x \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$ i.e. on « rend la constante variable ».
2. En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL₁) et après simplification, $x \mapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.

Preuve : Soit $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ une solution de (EDL₁)₀ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, y_0' + ay_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de (EDL₁)₀ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) e^{-A(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) &= \lambda(x) e^{-A(x)} \\ y_p'(x) &= (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)) e^{-A(x)} \\ y_p'(x) + a(x)y_p(x) &= \left(\lambda'(x) + \underbrace{a(x)\lambda(x) - a(x)\lambda(x)}_{=0} \right) e^{-A(x)} \\ &= \lambda'(x) e^{-A(x)}\end{aligned}$$

Or, y_p est solution de (EDL₁) si, et seulement si

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x)$$

si, et seulement si

$$\begin{aligned}\lambda'(x) e^{-A(x)} &= b(x) \\ \lambda'(x) &= b(x) e^{A(x)}.\end{aligned}$$

En conclusion, y_p est solution de (EDL₁) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$Z' = b e^{A(x)}. \quad (\text{XI.1})$$

Toute primitive Z convient puisque l'on cherche une solution particulière de (EDL₁). Cette dernière sera alors de la forme :

$$y_p : x \mapsto Z(x) e^{-A(x)}.$$

Remarque : Les solutions générales s'écriront alors :

$$y = y_0 + y_p : x \mapsto (\lambda + Z(x)) e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$.

En mécanique des fluides, il introduit le concept de potentiel de vitesse en 17817, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit en plus deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond.

Rétrospectivement, cet ouvrage marque une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne. Lagrange a aussi œuvré dans le domaine de la théorie des probabilités.

Correction :

1. Comme $1+x^2 > 0$, la fonction $a : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont une primitive est $A : x \mapsto \ln(1+x^2)$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2}$.

2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$(1+x^2) \left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2} \right) + \frac{2x\lambda(x)}{1+x^2} = 1$$

$$\lambda'(x) = 1$$

$$\lambda(x) = x + \mu.$$

Une solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.

3. Les solutions générales de $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$ sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda + x}{1+x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans certains cas de seconds membres bien particuliers, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante développée ci après, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée.

Théorème 4 (Second membre particulier) :

Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$y' + ay = \lambda P(x) e^{\alpha x}, \quad \text{où } a \in \mathbb{K}. \quad (\text{EDL}_1)$$

L'équation (EDL_1) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto \mu x^m Q(x) e^{\alpha x},$$

où $\mu \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré $\deg(Q) = \deg(P)$ et

- $m = 0$ si $a + \alpha \neq 0$.
- $m = 1$ sinon.

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = P(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n , admet une solution particulière polynomiale de degré n .
- $y' + ay = \lambda e^{\alpha x}$, où $a, \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu e^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \mapsto y_p(x) = \mu x e^{\alpha x}, \quad \mu \in \mathbb{K}.$$

- $y' + ay = \lambda \cos(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \sin(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu \cos(\omega x) + \nu \sin(\omega x), \quad (\mu; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$

- $y' + ay = \lambda \text{ch}(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \text{sh}(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu \text{ch}(\omega x) + \nu \text{sh}(\omega x), \quad (\mu; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 4 : Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y' + y \cos(x) = 0$. 2. $(1+x^2)y' + xy = 1+x+2x^2$. 3. $y' - 2y = 3 \cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

1. La fonction nulle convient comme à toute équation homogène.
2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = ax + b \\ y_p'(x) = a$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} (1+x^2)y_p' + xy_p &= 1+x+2x^2 \\ (1+x^2)a + x(ax+b) &= 1+x+2x^2 \\ 2ax^2 + bx + a &= 1+x+2x^2 \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière est $y_p : x \mapsto 1+x$.

3. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \\ y_p'(x) = \mu \cos(x) - \lambda \sin(x)$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} y_p' - 2y_p &= 3 \cos(x) - \sin(x) \\ (\mu - 2\lambda) \cos(x) - (\lambda + 2\mu) \sin(x) &= 3 \cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu - 2\lambda = 3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière est $y_p : x \mapsto -\cos(x) + \sin(x)$.

II.3 Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Pour l'instant, toutes les solutions générales de (EDL₁) sont définies à une constante près. N'y a-t-il pas moyen de déterminer cette constante ? La réponse est oui mais en rajoutant une condition, dite *initiale*.

La réunion de l'équation différentielle et de cette condition porte un nom :

Définition 4 (Problème de Cauchy ^[2] d'une EDL₁) : Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & (\text{C.L}_1) \end{cases}$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa *condition initiale*.

Le théorème qui suit affirme, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution, vérifiant des conditions initiales données :

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL₁) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système (C.L₁) possède une unique solution sur I .

Preuve : Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0 .

Comme $e^{A(x)} \neq 0$ sur I , on a une équation équivalente en multipliant les deux membres de (EDL₁) par $e^{A(x)}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad e^{A(x)}(y' + a(x)y) &= e^{A(x)}b(x) \\ \frac{d}{dx} (e^{A(x)}y(x)) &= e^{A(x)}b(x)\end{aligned}$$

Avec $y(x_0) = y_0$, en primitivant entre x_0 et $x \in I$, on obtient :

$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y_0 = \int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u)du$$

[2]. **Augustin Louis**, baron **Cauchy**, né à Paris le 21 août **1789** et mort à Sceaux le 23 mai **1857**, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par **Leonhard Euler**, **Paul Erdos** et **Arthur Cayley**, avec près de 800 parutions et sept ouvrages. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIX^{ème} siècle, mais le fait qu'il publie ses résultats dès leur découverte sans y appliquer toute la rigueur souhaitée et la négligence dont il fit preuve concernant les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entachèrent son prestige. Il rejeta en effet le mémoire de Galois qui lui avaient été soumis en mai et n'eut aucune réponse, jugé par lui « incompréhensible », et celui d'Abel, sous le prétexte d'une « encre trop pâle », alors que ces deux mathématiciens morts avant Cauchy dans des conditions misérables devaient marquer profondément les mathématiques du XX^{ème} siècle.

Une telle attitude lui a été violemment reprochée. Dans sa biographie, Valson donne une explication : « On doit l'excuser de n'avoir pas toujours eu le temps de s'occuper des publications d'autrui, quand il n'a pas trouvé dans le cours de sa propre vie le loisir nécessaire pour relier et classer ses travaux personnels. »

Le génie de Cauchy fut reconnu dès son plus jeune âge. Dès 1801, **Lagrange** eut ce commentaire : « Vous voyez ce petit homme, eh bien ! Il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres. » La prédominance de Cauchy en sciences s'explique par la multitude de ses domaines d'études : ses travaux embrassent à peu près toutes les branches des sciences mathématiques, depuis la théorie des nombres et la géométrie pure jusqu'à l'astronomie et l'optique.

Bien que ses talents de mathématicien aient été applaudis, les faveurs dont il bénéficia durant la Seconde Restauration ne furent pas appréciées. Critiquant ouvertement **Laplace** et **Poisson**, il connut rapidement des conflits avec ses anciens appuis à qui il devait ses premières publications. Ses rapports avec Poisson se dégradèrent avec le temps et une rivalité entre eux s'installa. Ses votes à l'Académie étaient considérés comme orientés. Malgré l'influence de Cauchy sur les nouvelles générations, ses dernières années furent obscurcies par une querelle de priorité en mécanique, où il refusa de reconnaître son erreur.

Comme $A(x_0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} e^{A(x)}y(x) - y_0 &= \int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u)du \\ y(x) &= \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u)du \right) e^{-A(x)} \\ &= \underbrace{y_0 e^{-A(x)}}_{y_0(x)} + \underbrace{\left(\int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u)du \right) e^{-A(x)}}_{y_p(x)}. \end{aligned}$$

La solution y est, en particulier, déterminée de manière unique d'où le résultat.

Remarque : La preuve de ce résultat montre que toute solution de $(C.L_1)$ est bien de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$, ce qui justifie la **méthode (3)** de variation de la constante.

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ .
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.
- Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.

D'après le **théorème (5)**, c'est la seule.

- La formule $y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u)du \right) e^{-A(x)}$ donnant la forme générale de la solution de $(C.L_1)$ n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas, en général, calculer l'intégrale.

Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière.

Exemple 9 : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme λe^{-x^2} , et la condition initiale se traduit alors par $\lambda e^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2e$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y : x \mapsto 2e^{1-x^2}$.

Exercice 5 : Résoudre $y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(C.L_1)$ est $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La solution générale de $(C.L_1)$ est donc $x \mapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. La condition initiale impose $\lambda = -1$.

La solution du problème de Cauchy considéré est donc $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 5.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (\text{EDL}_1)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
- Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{K}$.

Preuve : Le premier point est une reformulation du **théorème (5)**.

Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $M_0(x_0; y_0)$. Notons y_1 et y_2 les solutions de (EDL_1) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :

$$(\text{C.L}_1) \quad \begin{cases} (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 \equiv y_2$.

II.4 Résolution des EDL_1 à coefficients constants

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation $y' = ay + b$ dans le cas où a et b sont constants (réels ou complexes).

Ce théorème est un corollaire immédiat des résultats des sections précédentes.

Corollaire 5.2 (Équation linéaire $y' + ay = b$ à coefficients constants) :

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-ax} + \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \mapsto \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}.$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E , une résistance R , une bobine d'inductance L et un interrupteur.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert.

On note $i : t \mapsto i(t)$ l'intensité dans le circuit en fonction du temps t .

L'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad (\text{XI.2})$$

et la condition initiale $i(0) = 0$.

En notant $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps du circuit), l'équation (XI.2) s'écrit :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \mapsto \frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation.
3. Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \mapsto \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4. Comme $i(0) = 0$, on obtient $\lambda = -\frac{E}{R}$ soit :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

Commentaires : En pratique, $t \in [0; +\infty[$ et $\tau > 0$. La fonction i est alors une fonction d'atténuation dont la courbe ressemble à la [figure \(XI.2\)](#).

- En particulier, la fonction i est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La courbe de i admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{E}{R}$.
- La tangente à la courbe en $t = 0$ a pour coefficient directeur

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} - Ri(0) = \frac{E}{L}.$$

Cette tangente, d'équation $y = \frac{E}{L}t$, coupe donc l'asymptote à la courbe $y = \frac{E}{R}$ en

$$x = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{E}{L}} = \frac{L}{R} = \tau.$$

- En physique, on dit que l'intensité est :
 - en *régime permanent* quand elle s'approche fortement de son asymptote.
 - et en *régime transitoire* dans sa période de forte croissance.

En pratique, on considère le *régime permanent* atteint pour $t = 3\tau$. À cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale.

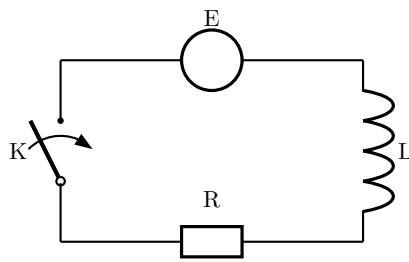


Figure XI.1 – Circuit RL

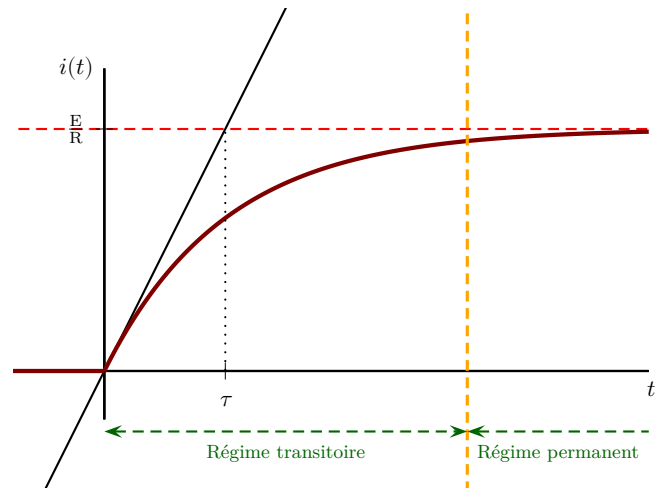


Figure XI.2 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.

Exercice 6 : Quelle est la réponse en intensité d'un circuit RL en régime alternatif lorsque $E = \sqrt{2} \cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$?

III/ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \mapsto A e^{\alpha x} \text{ avec } A, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \sin(\omega x) \text{ avec } B \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre même si leur complexité augmente.

En accord avec le programme, on se restreindra au cas de **coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation homogène associée (EDL_2) s'écrit :

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{EDL}_2)_0$$

Ici aussi le **théorème (2)** de structure s'applique :

À retenir 2 :	Solution générale	$=$	Solution	$+$	Solution générale de
	de (EDL_2)		particulière		l'équation homogène
			de (EDL_2)		(EDL_2) ₀

Notre démarche sera donc la même que pour les EDL_1 .

III.1 Solutions de l'équation homogène

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'*exponentielle complexe*.

Définition 5 (Polynôme caractéristique) : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $P_{car} = aX^2 + bX + c$ de discriminant $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$.

Théorème 6 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas complexe) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_0$$

- $P_{car} = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $(EDL_2)_0$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$
$\Delta_{car} \neq 0$	r_1 et r_2 distinctes	$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	r	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \{ \lambda u + \mu v \mid (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v , déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ces solutions fondamentales ne sont pas multiples l'une de l'autre.

On dira bientôt qu'elles sont *libres* et qu'elles constituent une *base* de $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

On dira alors de ce dernier qu'il constitue un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ de *dimension* 2 et que, dès lors, $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ est un *plan affine* de direction $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

Preuve : Suivant la forme des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, on cherche à quelles conditions $(EDL_2)_0$ peut admettre des solutions sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$.

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
 y : x \mapsto e^{rx} \text{ est solution de } (EDL_2)_0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\
 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ar^2 + br + c) e^{rx} = 0 \quad \text{avec } e^{rx} \neq 0 \\
 &\iff ar^2 + br + c = 0 \\
 &\iff r \text{ est racine de } P_{car}.
 \end{aligned}$$

On cherche alors une solution (particulière) de $(EDL_2)_0$ sous la forme $y = ze^{rx}$ où

- z est une fonction au moins deux fois dérivables.
- r est une racine de $P_{car} = aX^2 + bX + c$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= z(x) e^{rx} \\
 y'(x) &= (z'(x) + rz(x)) e^{rx} \\
 y''(x) &= (z''(x) + 2rz'(x) + r^2z(x)) e^{rx} \\
 ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= \left(az''(x) + (2ar + b)z'(x) + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} z(x) \right) e^{rx} \\
 &= (az''(x) + (2ar + b)z'(x)) e^{rx}.
 \end{aligned}$$

y est donc solution de $(EDL_2)_0$ si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$aZ' + (2ar_1 + b)Z = 0. \quad (XI.3)$$

- Si r est racine double de P_{car} alors $r = -\frac{b}{2a} \iff 2ar + b = 0$.

L'équation (XI.3) se réduit alors à :

$$\begin{aligned}
 aZ' = 0 &\iff z'' = 0 \iff z \text{ est une fonction affine.} \\
 &\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 / z : x \mapsto \lambda x + \mu \\
 &\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 / \boxed{y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}.}
 \end{aligned}$$

- Si r_1 est une racine simple de P_{car} , alors :

$$\begin{aligned}
 &\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda_0 e^{-\frac{2ar_1+b}{a}x} \\
 &\exists (\lambda_0; \mu) \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = -\frac{a\lambda_0}{2ar_1+b} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu \\
 &\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu \\
 &\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x) e^{r_1x} = \lambda e^{-\left(r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{r_1x}.
 \end{aligned}$$

Or, d'après les relations coefficients-racines d'un polynôme de degré 2,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \iff -\left(r_1 + \frac{b}{a}\right) = r_2.$$

En remplaçant, on obtient finalement la forme générale de la solution sous la forme :

$$\boxed{y : x \mapsto \lambda e^{r_2x} + \mu e^{r_1x}} \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).

La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.

- Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.

Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).

La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos du **théorème (7)**.

- La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connaît une solution particulière. Elle trouve là toute sa pertinence.

Exercice 7 : Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$

2. $y'' - y' + (1 + i)y = 0$

3. $y'' - 2(1 + i)y' + 2iy = 0$

Correction :

1. $(E_c) : r^2 + 4 = 0$ a deux solutions $2i$ et $-2i$.

$$\mathcal{S}_C = \{x \mapsto K_1 e^{2ix} + K_2 e^{-2ix}, (K_1; K_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

2. $(E_c) : r^2 - r + (1 + i) = 0$ a deux solutions $1 - i$ et i .

$$\mathcal{S}_C = \{x \mapsto K_1 e^{(1-i)x} + K_2 e^{ix}, (K_1; K_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

3. $(E_c) : r^2 - 2(1 + i)r + 2i = 0$ a une racine double $1 + i$.

$$\mathcal{S}_C = \{x \mapsto (K_1 x + K_2) e^{(1+i)x}, (K_1; K_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Théorème 7 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas réel) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_{0,\mathbb{R}}$$

- $P_{car} = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de $(EDL_2)_{0,\mathbb{R}}$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$
$\Delta_{car} > 0$	r_1 et r_2 réelles distinctes	$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	$r (\in \mathbb{R})$	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$
$\Delta_{car} < 0$	$r \pm i\omega$ complexes conjuguées	$x \mapsto e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \mid (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$ et $v : x \mapsto e^{rx} \sin(\omega x)$.

Comme dans le cas complexe, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v , déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ici aussi, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ de dimension 2 et de base $(u; v)$.

Preuve : La démonstration du **théorème (6)** conduite de manière identique pour $(\text{EDL}_2)_{0, \mathbb{R}}$ résout aisément le cas $\Delta_{car} \geq 0$ lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Seul le cas $\Delta_{car} < 0$ reste à démontrer.

Considérons donc ce cas avec $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de P_{car} .

Soit y une solution complexe de l'équation $(\text{EDL}_2)_{0, \mathbb{R}}$. D'après le **théorème (6)**, y est de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \mu_1 e^{r_2 x} = e^{rx} (\lambda_1 e^{i\omega x} + \mu_1 e^{-i\omega x}).$$

Cette fonction sera à valeurs réelles si, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Im}(\lambda_1 e^{i\omega x} + \mu_1 e^{-i\omega x}) = 0$.

En particulier, pour :

- $x = 0$, $\text{Im}(\lambda_1 + \mu_1) = 0 \iff \text{Im}(\lambda_1) = -\text{Im}(\mu_1)$.
- $x = \frac{\pi}{2\omega}$, $\text{Im}(i(\lambda_1 - \mu_1)) = 0 \iff \text{Re}(\lambda_1 - \mu_1) = 0 \iff \text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\mu_1)$.

Autrement dit, nécessairement $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= e^{rx} (\lambda_1 e^{i\omega x} + \overline{\lambda_1} e^{-i\omega x}) = e^{rx} (\lambda_1 e^{i\omega x} + \overline{\lambda_1} e^{i\omega x}) \\ &= e^{rx} \times 2\text{Re}(\lambda_1 e^{i\omega x}) \\ &= e^{rx} \left(\underbrace{2\text{Re}(\lambda_1)}_{\lambda \in \mathbb{R}} \cos(\omega x) + \underbrace{(-\text{Im}(\lambda_1))}_{\mu \in \mathbb{R}} \sin(\omega x) \right) \\ &= e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)). \end{aligned}$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.

Exemple 11 : En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Dans le cas périodique, on peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos à l'aide d'une transformation de Fresnel :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ y : x \mapsto A e^{rx} \cos(\omega x + \varphi), (A; \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Enfin, dans le cas $\Delta > 0$, les solutions peuvent aussi s'exprimer sous une forme trigonométrique mais hyperbolique cette fois :

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \mu_1 e^{r_2 x} = e^{\frac{r_1 + r_2}{2} x} \left(\lambda_1 e^{\frac{r_1 - r_2}{2} x} + \mu_1 e^{-\frac{r_1 - r_2}{2} x} \right)$$

On pose $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ et $\omega = \frac{r_1 - r_2}{2}$:

$$\begin{aligned} &= e^{rx} \left(\lambda_1 (\operatorname{ch}(\omega x) + \operatorname{sh}(\omega x)) + \mu_1 (\operatorname{ch}(\omega x) - \operatorname{sh}(\omega x)) \right) \\ &= e^{rx} \left((\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{ch}(\omega x) + (\lambda_1 - \mu_1) \operatorname{sh}(\omega x) \right) \\ &= e^{rx} (\lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} &= \left\{ y : x \mapsto e^{rx} (\lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y : x \mapsto A e^{rx} \operatorname{ch}(\omega x + \varphi), (A; \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 8 : Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$

2. $y'' + 2y' + y = 0$

3. $y'' + 2y' + 4y = 0$

Correction :

1. $(E_c) : r^2 - 2r - 3 = 0$ a deux solutions -1 et 3 .

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto k_1 e^{-x} + k_2 e^{3x}, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. $(E_c) : r^2 + 2r + 1 = 0$ a une solution double : -1 .

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (k_1 x + k_2) e^{-x}, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. $(E_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ a deux solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto e^{-x} \left[k_1 \cos(x\sqrt{3}) + k_2 \sin(x\sqrt{3}) \right], (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque : Des équations différentielles de la forme :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

ou

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont fréquentes en physique. Leurs solutions respectives s'écrivent :

$$x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$$

$$x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)$$

$(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(A; \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi).$$

$$x \mapsto A \operatorname{ch}(\omega x + \varphi).$$

Exemple 12 (Un peu de physique : Circuit LC) : La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0.$$

En posant $\omega^2 = \frac{1}{LC}$:

$$q'' + \omega^2 q = 0. \quad (\text{LC})$$

Les solutions de (LC) s'écrivent alors sous la forme :

$$q : t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

avec $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

La constante A est appelée amplitude de la solution et la constante φ , son déphasage.



Figure XI.3 – Circuit LC.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) : On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

On s'intéresse à l'évolution de cette charge q au cours du temps.

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

On note usuellement en physique :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, constante appelée *pulsation propre* du circuit.
- $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle *facteur de qualité* du circuit.

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).

Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta_{car} = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

- Le discriminant est positif quand $Q < \frac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\frac{\omega_0}{2Q}(\pm \sqrt{1 - 4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux.

La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes.

On parle alors de *régime apériodique*, la charge se contentant de décroître de q_0 vers 0 (confer figure (XI.5)).

- Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante.

On parle alors de *régime pseudo-périodique* : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps (confer figure (XI.6)).

- Enfin, dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$ il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante.

On parle de *régime critique*, la courbe ressemble à celle du régime apériodique (confer figure (XI.7)).

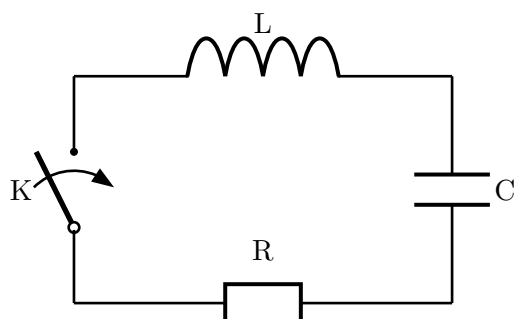


Figure XI.4 – Circuit RLC.

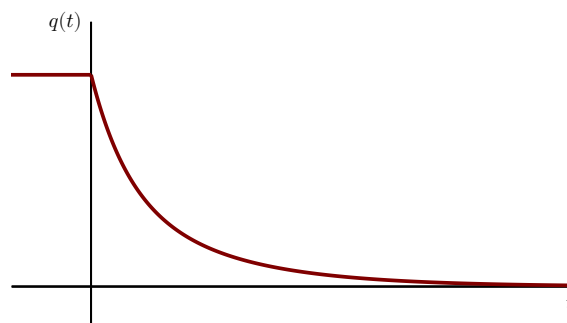


Figure XI.5 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime apériodique.

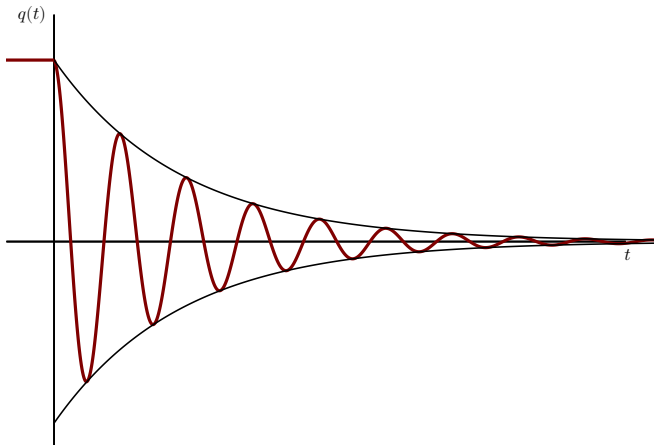


Figure XI.6 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime pseudo-périodique.

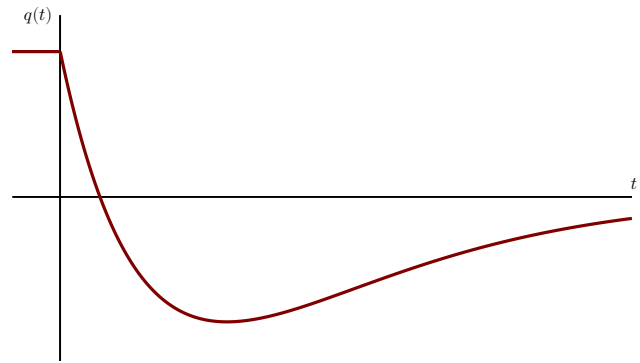


Figure XI.7 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime critique.

III.2 Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

En accord avec le **théorème (2)**, toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\text{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \mapsto A e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \sin(\Omega x).$$

$$(\alpha; \Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Quitte à user du **théorème (1)** de superposition, tous nos exemples se ramèneront à un des ces cas.

Théorème 8 (Second membre exponentiel) :

Soient $A, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = A e^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto B x^m e^{\alpha x}, \quad \text{où } B \in \mathbb{C} \text{ et}$$

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Exemple 14 : On veut trouver les solutions générales de l'équation

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$

Équation homogène : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont -1 et 1.

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{2x}$: Comme 2 n'est pas racine de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \mapsto B e^{2x}, \quad B \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \mapsto B e^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{2x} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 4B e^{2x} - B e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^x$: Comme 1 est racine simple de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \mapsto B x e^x, \quad B \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \mapsto B x e^x \text{ est solution de } y'' - y = e^x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (B x e^x + 2B e^x) - B x e^x = e^x \\ &\iff B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sont finalement toutes les fonctions

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 9 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.

Correction :

1. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ dont les solutions complexes sont $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.
2. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

3. Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que

$$y'' + y' + y = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x}).$$

Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation

$$y'' + y' + y = e^{(1+i)x}.$$

On la cherche sous la forme $y_p(x) = a e^{(1+i)x}$, où $a \in \mathbb{C}$.

On a donc $y_p'(x) = a(1+i) e^{(1+i)x}$ et $y_p''(x) = a(1+i)^2 e^{(1+i)x} = 2i a e^{(1+i)x}$.

En factorisant par $e^{(1+i)x}$,

$$y_p \text{ est solution si, et seulement si } a(2+3i) = 1 \iff a = \frac{2-3i}{13}.$$

$$\text{On a donc } y_p(x) = \frac{2-3i}{13} e^{(1+i)x} = \left(\frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{13} \right) e^x + i \dots$$

La solution générale est donc :

$$x \mapsto \left(\frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{13} \right) e^x + \left(\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \mu \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Corollaire 8.1 (Second membre trigonométrique) :

Soient $A \in \mathbb{K}, \Omega \in \mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}, a \neq 0$, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = A \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = A \sin(\Omega x). \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto x^m \left(B \cos(\Omega x) + C \sin(\Omega x) \right), \quad \text{où } B, C \in \mathbb{K} \text{ et}$$

- $m = 0$ si Ω n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si Ω est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.

Exercice 10 : Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 13y = 8 \cos(x) + 16 \sin(x)$.

Correction :

— **Solution homogène :** $(E_0) : y'' - 4y' + 13y = 0$.

$$(E_c) : r^2 - 4r + 13 = 0 \text{ a deux solutions } 2 \pm 3i.$$

Les solutions réelles de (E_0) sont les

$$x \mapsto e^{2x} (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x) \text{ avec } (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2$$

— **Recherche de solution particulière :**

$$x \mapsto \frac{e^{ix}}{3-i} \text{ est solution de } (E') : y'' - 4y' + 13y = 4e^{ix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x \mapsto \frac{3 \cos(x) - \sin(x)}{10} \text{ est solution de } (E_1) : y'' - 4y' + 13y = 4 \cos(x) \\ x \mapsto \frac{\cos(x) + 3 \sin(x)}{10} \text{ est solution de } (E_2) : y'' - 4y' + 13y = 4 \sin(x) \end{cases}$$

D'après le principe de superposition des solutions :

$$x \mapsto 2 \times \frac{3 \cos(x) - \sin(x)}{10} + 4 \times \frac{\cos(x) + 3 \sin(x)}{10} \text{ est solution de (E)}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^{2x} (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x) + \cos(x) + \sin(x), (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Même si nous n'irons guère plus loin, ce théorème se généralise aisément à des seconds membres un poil plus compliqués :

Corollaire 8.2 (Second membre exponentiel-polynôme) :

Soient $A, \alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = AP(x) e^{\alpha x}, \text{ où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto B x^m Q(x) e^{\alpha x},$$

où $B \in \mathbb{C}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré $\deg Q = \deg P$ et

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.
- $f(x) = A x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(x) = B \cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \cos(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = B \sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \sin(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.
- Par superposition, le cas où f est une somme de fonctions sinusoïdales de même pulsation, cette même somme produit par une exponentielle complexe, ...

Exercice 11 : Déterminer les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x e^{2x}$.

Correction :

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2.
2. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x$.
3. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = x(ax + b) e^{2x}$ et on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.

Une solution particulière est donc $x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x}$.

La solution générale est donc :

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^x.$$

III.3 Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL₂) : Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$ et $x_0 \in I$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\text{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa *condition initiale*.

Comme pour les (EDL₁), on peut s'attendre à l'existence et l'unicité d'une solution dans notre cas très restreint :

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL₂) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, le système (C.L₂) possède une unique solution sur I .

Exemple 15 : On veut résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - y = e^{2x} - e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

D'après l'exemple (14), les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0$, i.e. $(\lambda; \mu)$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1 \\ \lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \mu = \frac{5}{12} \end{cases}$$

L'unique solution est ainsi la fonction

$$x \mapsto \frac{1-2x}{4} e^x + \frac{5}{12} e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}.$$

Exercice 12 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$1. \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y'' + y = \cos^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Correction :

1. On reconnaît une équation homogène. La fonction nulle est clairement une solution particulière et les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto A e^x + B e^{2x}$.

Si on impose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, par exemple, il existe une unique solution qui les vérifie.

Ici, on obtient le système $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$, dont on tire $A = 2$ et $B = -1$.

La seule solution de ce problème de Cauchy est donc :

$$y : x \mapsto 2e^x - e^{2x}.$$

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les $(EDL_2)_0$) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0; y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque : Ici encore, la seule solution de $(EDL_2)_0$ telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

Preuve : D'après le **théorème (2)**, les solutions sont de la forme $x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$ avec y_p une solution particulière et y_H une solution de l'équation homogène.

Considérons une des solutions données par le **théorème (6)**. Par exemple, $y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $r_1 \neq r_2$ (le cas $r_1 = r_2$ est identique en plus simple) :

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } y(x_0) = y_0 &\iff y_0 = y_p(x_0) + \lambda e^{r_1 x_0} + \mu e^{r_2 x_0} \\ \text{et } y'(x_0) = y_1 &\iff y_1 = y_p'(x_0) + \lambda r_1 e^{r_1 x_0} + \mu r_2 e^{r_2 x_0} \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} y_0 - y_p(x_0) &= \lambda e^{r_1 x_0} + \mu e^{r_2 x_0} \\ y_1 - y_p'(x_0) &= \lambda r_1 e^{r_1 x_0} + \mu r_2 e^{r_2 x_0} \end{cases}$$

Le couple $(\lambda; \mu)$ est donc solution d'un système de déterminant $e^{(r_1 + r_2)x_0}(r_2 - r_1) \neq 0$ donc admettant une solution unique.

La solution y est donc uniquement déterminée tout comme la solution du problème de Cauchy.

Exemple 16 : Considérons $y'' - 2y' + y = 0$.

Les solutions sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$x \mapsto e^x.$$

Corollaire 10.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \quad (\text{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Vocabulaire : En physique, le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé *signal d'entrée* et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudié.

On parle de *régime libre* si f est la fonction nulle, et de *régime forcé* sinon.

Preuve : Simple reformulation du **théorème (10)**.

Exercice 13 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2e^x$ avec les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$

Correction : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^x + e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sin(x)\}$.

Méthode 4 (Résolution d'un problème de Cauchy linéaire) :

0. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
1. Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - (a) $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - (b) $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
2. Trouver une solution particulière : y_p

- (a) On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
 (b) Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
3. Donner l'allure générale des solutions : $y = y_H + y_p$.
 4. Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) : Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L , et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux)

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}.$$

Mise en équation : Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical orienté vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - K(z - L) + mg \iff mz'' + \alpha z' + Kz = KL + mg.$$

Cette équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = L + \frac{mg}{K}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).

En portant l'origine en z_0 i.e. en posant $Z = z - z_0$, on obtient :

$$mZ'' + \alpha Z' + KZ = 0 \iff Z'' + 2\lambda Z' + \omega_0^2 Z = 0.$$

L'équation du mouvement est donc régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0. \quad (\text{Oscil}_0)$$

Où on a noté, comme d'usage en physique :

- $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$, le coefficient d'amortissement de l'oscillateur,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui représente la pulsation propre.

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime apériodique** quand $\lambda > \omega_0$,
- **Régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,
- **Régime pseudo-périodique** quand $\lambda < \omega_0$.

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (XI.5), (XI.7) et (XI.6).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

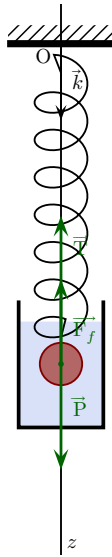


Figure XI.8 – Oscillateur harmonique en régime libre

Exercice 14 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime libre donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 0. \quad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

On reprend l'équation $Oscil_0$ mais avec un second membre non nul :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = F \cos(\omega t). \quad (Oscil)$$

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Interprétation physique : Ceci se traduit en disant que le mouvement obtenu est la somme de l'oscillation propre, qui dépend des conditions initiales, et de l'oscillation forcée par la force extérieure ; on parle aussi de réponse à l'excitation décrite par le second membre.

Généralement, il suffit de ne considérer que cette réponse qui subsiste seule après l'extinction de l'oscillation propre due à l'amortissement.

Résolution : Pour ce faire il est commode d'utiliser les nombres complexes en considérant l'équation :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = F e^{i\omega t}.$$

La recherche d'une solution particulière sous la forme $\tilde{z}_p = Z e^{i\omega t}$ conduit à

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)Z = F \Leftrightarrow Z = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} F.$$

Fonction de transfert : En posant $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$, cette équation se réécrit :

$$Z = H(\omega)F.$$

$H(\omega)$ représente la fonction de transfert qui décrit la réponse en fonction de la pulsation.

Écrite sous sa forme exponentielle on a $H(\omega) = |H|e^{i\varphi}$ puis $\tilde{z}_p = |H(\omega)| F e^{i(\omega t + \varphi)}$.

Notre solution particulière s'écrit alors :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi).$$

Interprétation : Ainsi, à une excitation sinusoïdale un système linéaire fait correspondre une réponse sinusoïdale de même pulsation.

De même, à une somme de sinusoïdes correspond une somme de sinusoïdes. Pour chacune d'entre elles le module et l'argument de la fonction de transfert représentent respectivement l'amplification et le déphasage.

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et $|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

L'amplification croît avec un déphasage nul à partir de la valeur statique $\frac{F}{\omega_0}$ jusqu'à l'infini lorsque ω atteint la valeur ω_0 .

Ensuite elle décroît jusqu'à zéro avec un déphasage égal à $-\pi$, le déphasage étant défini par :

$$\begin{cases} \cos \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\omega_0^2 - \omega^2) |H(\omega)| = -1 \\ \sin \varphi &= - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 2\lambda\omega |H(\omega)| = 0 \end{cases}$$

La valeur infinie correspond à la *résonance* lorsque le système est excité à sa pulsation propre ω_0 .

Dans la conception d'un système, le simple calcul de cette pulsation (ou fréquence ou période propre) peut conduire à modifier l'inertie ou la raideur d'un système pour l'éloigner des excitations attendues.

En tout état de cause, la réponse ne peut être que finie à cause de l'amortissement qui est négligé ici.

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, la fonction de transfert devient :

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

L'amplification est :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

Il apparaît que le dénominateur de la fonction de transfert ne peut plus s'annuler : pour un amortissement faible on a une courbe de réponse voisine de celle du système non amorti mais avec un maximum fini.

En annulant la dérivée de $|H(\omega)|$ par rapport à ω^2 , on obtient la pulsation qui donne ce maximum :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$

À mesure que le coefficient d'amortissement λ augmente, l'abscisse du maximum diminue jusqu'à 0 où la fonction $|H(\omega)|$ de ω devient décroissante, ce qui se produit pour l'amortissement critique :

$$\omega_0^2 - 2\lambda_{crit}^2 = 0 \iff \lambda_{crit} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Le déphasage est, ici, défini par :

$$\begin{cases} \cos \varphi &= (\omega_0^2 - \omega^2)|H(\omega)| \\ \sin \varphi &= -2\lambda\omega|H(\omega)| \end{cases}$$

- Pour les plus petites valeurs de la pulsation on a le régime quasi statique dominé par la raideur dans lequel la réponse est en phase avec l'excitation.
- Pour les plus grandes, on atteint le régime dominé par l'inertie dans lequel la réponse est en opposition et l'amplification est de l'ordre de $\frac{F}{\omega^2}$.

L'amortissement devient essentiel loin de ces deux extrêmes.

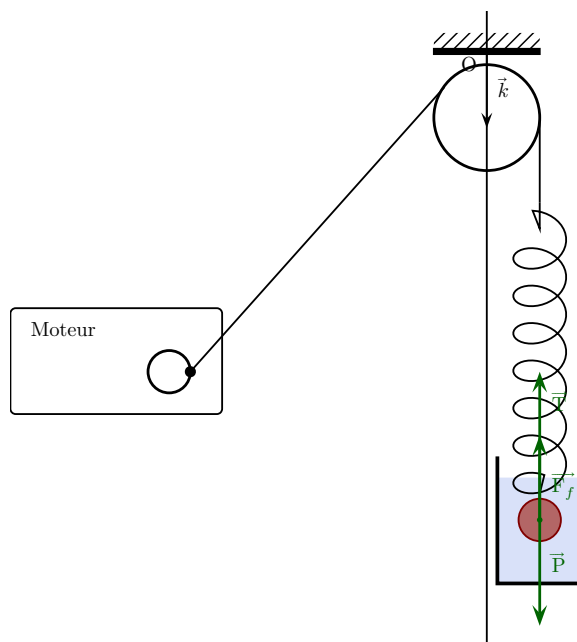


Figure XI.9 – Oscillateur harmonique en régime forcé

Exercice 15 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 5 \cos(t). \quad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

On déterminera également le comportement asymptotique correspondant physiquement à l'état stable.

Équations différentielles (linéaires)

I/ Équations du premier ordre

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$ sur $]0; +\infty[$.
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$.
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$.

Correction : Avant toute intégration, on vérifie bien que l'intégrande « a » est continue sur l'intervalle considéré et on fera bien attention au fait que la primitive dépend de ce dernier.

1. **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$:** Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $A(x) = x^2 - \ln(x)$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln(x)) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

Recherche d'une solution particulière : Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$.

On cherche une telle solution sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$.

On calcule d'abord, pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$y'_p(x) = \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right) \exp(x^2)$$

Maintenant y_p est solution de $y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} y'_p - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y_p &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda'(x)x \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right) \exp(x^2) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)\lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \\ \text{(cela doit se simplifier!)} \quad \Leftrightarrow \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda'(x) &= x \exp(-x^2) \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_p(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2x}.$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

Solution générale : L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène.

Autrement dit, les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\lambda}{x} e^{x^2} = \frac{1}{2x} (2\lambda e^{x^2} - 1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$:** Les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \mapsto y(x) = \lambda \exp(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière : On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y_0'(x) = \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x)$ alors y_0 est solution de $y' - y = x^k \exp(x)$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x) - \lambda(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \iff \lambda'(x) \exp(x) = x^k \exp(x) \\ &\iff \lambda'(x) = x^k. \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$x \mapsto y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x).$$

Solution générale : L'ensemble des solutions est donc formé des fonctions :

$$x \mapsto y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x) + \lambda \exp(x) = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \lambda \right) e^x \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} y = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \mapsto y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $a(x) = -\frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + \ln^2(x)$.

Les solutions de l'équation sont les $x \mapsto y(x) = \lambda e^{-\ln(1 + \ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1 + \ln^2(x)}$.

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1 + \ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable.

$y_0 = \lambda(x)z(x)$ est solution si, et seulement si

$$\begin{aligned} y_0' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} y_0 &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \iff \lambda'(x)z(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[z'(x) + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} z(x) \right]}_{\substack{=0 \text{ car } z(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(x)} \text{ est} \\ \text{solution de l'équation homogène}}} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \iff \frac{\lambda'(x)}{1 + \ln^2(x)} &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ \iff \lambda'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$, ce qui donne la solution particulière $x \mapsto y_0(x) = \frac{\ln(x)}{1 + \ln^2(x)}$.

- (c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Commentaires : Le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près.

Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln(x) + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{\ln(x) + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\mu = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Exercice 2 : Résoudre :

1. $(x+1)y' - xy + 1 = 0$ sur $] -1; +\infty[$
2. $y' = 2y + \sin(x) + e^x + x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = -\frac{y}{x} + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $y' + y \cos(x) = 0$
5. $e^x y' + x^2 y = 0$
6. $(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 2x^2$
7. $y' - xy = xe^{x^2}$
8. $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

9. $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0; 1[$
10. $2x(1+x)y' + (1+x)y = 2\sqrt{|x|}$ sur $] -1; 0[$
11. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
12. $y' \sin(x) + y \cos(x) = \sin^2 x$ sur $]0; \pi[$
13. $y' - y = (2x+1)e^x$
14. $y' + y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$
15. $y' + y = 4\operatorname{ch}(x)$

Correction :

4. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-\sin(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
5. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
6. $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{x + \frac{2}{3}x^3}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
7. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
8. $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{\ln(x)}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
9. $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
10. $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} - \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{|x|}}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
11. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \sin(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$
12. $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

13. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme λe^x , $\lambda \in \mathbb{R}$

Comme le coefficient dans l'exponentielle correspond à celui du membre de droite, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(ax + b)e^x.$$

$$\text{On a alors } y'_p(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$$

$$y'_p(x) - y_p(x) = (2ax + b)e^x.$$

y_p est donc solution de l'équation complète si $2ax + b = 2x + 1$.

On trouve $a = b = 1$ pour obtenir la solution particulière $y_p : x \mapsto (x^2 + x)e^x$.

Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (x^2 + x + \lambda)e^x.$$

14. Le même raisonnement donne pour la deuxième :

$$x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{3}{4} \cos(x) - \frac{1}{4} \sin(x).$$

Exercice 3 : Donner la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(t)y' + \operatorname{sh}(t)y = 1 + t^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 4 : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 5 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t)dt$$

Exercice 6 (Solutions maximales (Hors-Programme)) : 1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = 2$.

Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$?

3. Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$?

Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$ et $y(-1) = 1$?

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $\sqrt{|x|}y' = y.$

(b) $xy' = y.$

5. Résoudre sur le plus grand intervalle possible l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3.$$

Exercice 7 (Recollement (Hors-Programme)) : Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - 2xy = x^2,$$

sur chacun des intervalles I suivants :

1. $I =]1; +\infty[$, 2. $I =]-1; 1[$, 3. $I =]-1; +\infty[$ 4. et $I = \mathbb{R}$.

Correction : L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1. Soit I l'un des deux intervalles $] -1; 1[$ ou $]1; +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I, (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x^3 + \lambda_0}{3(1-x^2)}, \quad (\text{en renommant } \lambda_0 \text{ la constante } 3\lambda). \end{aligned}$$

Attention ! La constante λ_0 dépend évidemment de l'intervalle I choisi.

3. Si $I =]-1; +\infty[$.

Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $] -1; 1[$ et $]1; +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente.

Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)}$

et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)}$.

Enfin, l'équation impose $-2 \times 1 \times f(1) = 1^2$ soit $f(1) = -\frac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si } -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ f_2(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Réciproquement, une telle fonction f ne sera solution de (E) si, et seulement si elle est continue et dérivable sur $] -1; +\infty[$. Les restrictions f_1 et f_2 sont clairement dérivables, respectivement, sur leur intervalle de définition.

Il nous reste à vérifier qu'en les points, dits de raccordement, la fonction f est continue et dérivable.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_1(x)$ n'existe que si $\lambda_1 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_1(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + x + 1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution f est donc continue à gauche en 1.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x)$ n'existe que si $\lambda_2 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x + 1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution f est donc également continue à droite en 1.

Une telle solution f avec $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ est donc bien continue sur $] -1; +\infty[$.

Vérifions maintenant si la fonction définie par

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 - 1}{3(1-x^2)} = -\frac{x^2 + x + 1}{3(1+x)} & \text{si } x \neq -1, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est dérivable sur I.

- Sur $] -1; 1[\cup] 1; +\infty[$, la fonction f est clairement dérivable et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[\cup] 1; +\infty[, f'(x) = \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2}.$$

- En 1, on revient à la définition et on regarde, la limite des taux d'accroissement en 1 par valeurs supérieures et inférieures :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-\frac{x^2+x+1}{3(1+x)} + \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2x^2 - x - 1}{6(1+x)(1-x)} = \frac{2x+1}{6(1+x)}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{6(1+x)} = \frac{1}{4} < \infty$. Elle est dérivable en 1.

La fonction f ainsi déterminée par les choix précédents de λ_1 et λ_2 est donc bien dérivable sur I. C'est une solution de (E) sur I. C'est même la seule.

Commentaires : $\forall x \in] -1; 1[\cup] 1; +\infty[, \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2} = \frac{1}{4}$.

La fonction f est donc même de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

4. Si $I = \mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $] -1; +\infty[$ est nécessairement la fonction précédente.

Or, cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Donc, f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II/ Équations du deuxième ordre

Exercice 8 : Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{5x}$.
2. $y'' - y' - 2y = \cos(x)$.
3. $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 4\operatorname{sh}(2x)$
5. $y'' = e^x + \sin(x)$

Correction :

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} - x e^x + \frac{1}{12} e^{5x}, (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
2. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-x} - \frac{3 \cos(x) + \sin(x)}{10}, (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
3. (a) L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1 .
 (b) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
 (c) Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition :

- i. On commence par chercher une solution de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\text{On a donc } y_1''(x) = 2a \iff -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1 \iff a = -1, b = 0 \text{ et } c = 2a - 1 = -3.$$

$$\text{On obtient donc } y_1(x) = -x^2 - 3.$$

- ii. Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta) e^x$ puisque 1 est racine de l'équation caractéristique.

$$\text{On a donc } y_1'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x, \text{ et } y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta) e^x, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} y'' - y = e^x &\iff \alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1 \\ &\iff 2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On peut prendre n'importe quelle valeur pour } \beta, \text{ choisissons le par exemple tel que } y_2(x) = \frac{1}{2} x e^x.$$

$$\text{Une solution particulière de l'équation complète est donc } y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \frac{1}{2} x e^x.$$

La solution générale est donc :

$$x \mapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{1}{2} x \right) e^x + \mu e^{-x}.$$

4. — **Solution homogène :** $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$(E_c) : r^2 - 4r + 4 = 0 \text{ a une seule solution } 2.$$

Les solutions réelles de (E_0) sont les

$$x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{2x} \text{ avec } (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- **Recherche de solution particulière :** Comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on va utiliser le principe de superposition pour résoudre séparément les équations $y'' - 4y' + 4y = -2 e^{-2x}$ et $y'' - 4y' + 4y = 2 e^{2x}$.

La première équation ne pose pas de problèmes et une solution particulière sera aisément trouvée sous la forme $y_{p_1} = \lambda e^{-2x}$ où λ est solution de $4\lambda + 8\lambda + 4\lambda = -2$ soit $\lambda = -\frac{1}{8}$ et $y_{p_1} = -\frac{1}{8} e^{-2x}$.

Pour la seconde, on cherche une solution y_{p_2} sous la forme :

$$\begin{aligned}y_{p_2} &= \lambda x^2 e^{2x} \\y'_{p_2} &= \lambda (2x^2 + 2x) e^{2x} \\y''_{p_2} &= \lambda (4x^2 + 8x + 2) e^{2x}\end{aligned}$$

y_p sera solution de notre équation si, et seulement si

$$\begin{aligned}2e^{2x} &= y''_p - 4y'_p + 4y_p \\2e^{2x} &= 2\lambda e^{2x} \\\lambda &= 1 \text{ et } y_{p_2} = x^2 e^{2x}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = 4\text{sh}(2x)$ est donc $x \mapsto x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}$.

— **Solution générale :** $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{2x} + x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}, (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

5. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto e^x - \sin(x) + \lambda_1 x + \lambda_2, (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 9 : Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales indiquées :

1. $y'' + 6y' + 9y = 50 \sin(x)$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

2. $y'' - y' - 2y = 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

3. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = 0$.

4. $y'' + 2y' + y = \cos(2t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

5. $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2t)$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2 \text{sh}(x) - 3 \\ y(0) = \frac{3}{4} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Correction :

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto -3 \cos(x) + 4 \sin(x) + 5(2x + 1)e^{-3x}\}$.

2. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto -e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} - x + \frac{1}{2} \right\}$.

Exercice 11 : Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie

$$y'' - 2(1+i)y' + 2iy = t + i, \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 12 : On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$.
2. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x)$.

Correction :

1. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$, pour laquelle $r = 2$ est racine double.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Lorsque $d(x) = e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x} , qui convient si $a = \frac{1}{16}$.

Lorsque $d(x) = e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2.

Comme on sait déjà que $(\lambda x + \mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0. On cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x} , qui convient si, et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

2. Puisque $\frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, d'après le principe de superposition les solutions générales sont obtenues sous la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 13 : Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x + 8) \cos(x) + (4x + 2) \sin(x).$$

Correction : Les racines de l'équation caractéristique sont $2 \pm 3i$ donc les solutions homogènes sont de la forme :

$$y_H : x \mapsto (\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) e^{2x}.$$

Cherchons une solutions particulières sous la forme :

$$\begin{aligned}
 13 \times y_p &= (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) \\
 -4 \times y_p' &= (cx + a + d) \cos(x) + (-ax - b + c) \sin(x) \\
 y_p'' &= (-ax - b + 2c) \cos(x) + (-cx - 2a - d) \sin(x) \\
 (12x + 8) \cos(x) &+ \quad \quad \quad ((12a - 4c)x - 4a + 12b + 2c - 4d) \cos(x) \\
 (4x + 2) \sin(x) &+ \quad \quad \quad ((12c + 4a)x - 2a + 4b - 4c + 12d) \sin(x) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4c = 12 \\ -4a + 12b + 2c - 4d = 8 \\ 4a + 12c = 4 \\ -2a + 4b - 4c + 12d = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - c = 3 \\ -2a + 6b + c - 2d = 4 \\ a + 3c = 1 \\ -a + 2b - 2c + 6d = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b - d = 3 \\ c = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Une solutions particulière sera donc $y_p : x \mapsto (x + 1) \cos(x)$.

Les solutions générales sont alors les fonctions

$$y : x \mapsto (\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) e^{2x} + (x + 1) \cos(x).$$

Exercice 14 (Variation de la constante d'ordre 2) :

Après avoir trouvé une solution homogène simple adapter la méthode de variation de la constante pour résoudre $t^2 y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : $y : t \mapsto t$ est une solution de E_0 .

On applique la méthode de Lagrange en posant $y(t) = \lambda(t)t$.

On arrive à $t^3 \lambda'' + 3t^2 \lambda' = 0$.

D'où, $\lambda(t) = \frac{1}{t^2}$ après deux intégrations convient et fournit une deuxième solution de l'équation $E_0 : y : t \mapsto \frac{1}{t}$.

En remarquant qu'une solution particulière est la constante 1, on trouve l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 15 : Déterminer toutes les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Correction : Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convient si, et seulement si

- f est dérivable
- f est solution de $y' + y = c$
- f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or, les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$).

Clairement, ces fonctions sont dérivables et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$.

Donc, la troisième condition est satisfaite si, et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.

Les solutions du problème sont exactement les

$$x \mapsto f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

III/ Changement de fonction et de variable _____

Exercice 16 : On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

- (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
- (b) En déduire une expression de f .

Correction :

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions définies par :

$$y(x) = e^{-x} (a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent $\mathbb{R}$.

2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x} Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$.

On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$.

On pose donc $R(x) = ax + b$.

D'où,

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si, et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$.

On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = -\frac{4}{49}.$$

La fonction $x \mapsto y_p(x) = \frac{1}{7} \left(x - \frac{4}{7} \right) e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$x \mapsto y(x) = e^{-x} (a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7} \left(x - \frac{4}{7} \right) e^x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit h une solution de E.

Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées si, et seulement si

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

4. (a) On a $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f''(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \ln e^x = x e^x.$$

Donc g est solution de E.

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\ln(t))$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 2.

Les fonctions f recherchées sont donc de la forme :

$$t \mapsto \frac{1}{t} \left(a \cos(\sqrt{3} \ln(t)) + b \sin(\sqrt{3} \ln(t)) \right) + \frac{t}{7} \left(\ln(t) - \frac{4}{7} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17 : Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2 y'' + x y' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + m y = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).
3. $y'' - y' - e^{2x} y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
4. $y'' - \left(6x + \frac{1}{x} \right) y' + 8x^2 y = x^4$ (poser $u = x^2$).
5. $x(1 - 2 \ln(x)) y'' + (1 + 2 \ln(x)) y' - \frac{4}{x} y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

Correction :

1. Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0; +\infty[$, et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$.

On a alors $t = \ln(x)$ et $y(x) = z(\ln(x))$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln(x)) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln(x)) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} z''(\ln(x)) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x^2 y'' + x y' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln(x)) = \lambda \cos(\ln(x)) + \mu \sin(\ln(x))$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

— $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m} \arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m} \arctan x},$$

— $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

— $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m} \arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m} \arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Posons $u = e^x$, puis $z(u) = y(x)$ soit $z(e^x) = y(x)$. On en déduit

$$y'(x) = e^x z'(e^x) \text{ puis } y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x).$$

Si y vérifie l'équation différentielle, alors z vérifie l'équation

$$e^{2x} z''(t) - e^{2x} z(t) = e^{3x},$$

soit

$$z'' - z = u.$$

On résout maintenant très facilement cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont

$$z(u) = \lambda e^u + \mu e^{-u}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La fonction $u \mapsto -u$ est solution particulière de l'équation, et donc la solution générale de l'équation vérifiée par z est de la forme

$$z(u) = \lambda e^u + \mu e^{-u} - u, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Revenant à y , on trouve

$$y(x) = \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x} - e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. $x \mapsto \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2 + 3}{16}.$

5. $x \mapsto \lambda x^2 + \mu \ln(x).$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 18 (Équations à variables séparables) :

1. $t^3 y' + y^3 = 0$ avec $y(1) = -1$
2. $y' = y(1 + y)$.
3. $y' = \sin(x) \cos(y)$.
4. $2yy' \sqrt{x} = \sqrt{y^2 - 1}$.
5. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
6. $y' = \sqrt{|y|}$ et étudier les problèmes de raccordements.

Correction :

1. y ne doit pas être constamment nulle et si une telle solution existe, il doit exister un intervalle I sur lequel y ne s'annule pas i.e. un tel intervalle ne peut pas contenir 0 et sur I l'équation est équivalente à :

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{t^3}.$$

C'est une équation à variable séparée.

Elle est équivalente à : $-\frac{1}{y^2} = \frac{1}{t^2} + \lambda$, ce qui donne $y^2 = -\frac{t^2}{1 + \lambda t^2}$.

La condition initiale impose $\lambda = -2$.

Comme y ne s'annule pas sur I qui ne contient pas 0, y garde un signe constant et donc $\forall t \in I, y(t) = \sqrt{\frac{t^2}{2t^2 - 1}}$.

Cette solution est définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{\sqrt{2}} ; +\infty \right[$.

2. $y = -1 + \frac{1}{1 - \lambda e^x}$ ou $y = -1$.
3. $y \equiv 2 \arctan(\lambda e^{-\cos(x)}) - \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.
4. $y = \pm \sqrt{1 + (\sqrt{x} + \lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.
5. $y = -\ln(1 - x(1 - 1/e))$.
6. $y = \left(\lambda + \frac{x}{2} \right) \left| \lambda + \frac{x}{2} \right|$ ou $y = 0$.

Exercice 19 (Équation de Bernoulli) : En posant $z = \frac{1}{y}$, résoudre les équations, dites de Bernoulli, suivantes :

1. $t^2 y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
2. $y' = xy^2 + y$ avec $y(0) = 1$.

Correction :

1. y est une solution non constamment nulle. On pose donc $y = z^{-1} = \frac{1}{z}$ ce qui donne :

$$z' = \frac{1}{t^2} z + \frac{1}{t^2}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par $z(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}}$ et une solution particulière est $z_p(t) = -1$.

Les solutions générales sont donc les fonctions définies par $z(t) = -1 + \lambda e^{-\frac{1}{t}}$.

La condition initiale donne $\lambda = 2e$.

D'où $y : t \mapsto \frac{1}{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$.

D'après les théorèmes généraux, cette fonction est dérivable sur $]-\infty; 0[$, $]0; \frac{1}{1+\ln 2}[$ ou $]\frac{1}{1+\ln 2}; +\infty[$.

Solution d'une équation différentielle, notre solution ne sera définie que sur un seul de ces trois intervalles avant que l'on tente de les recoller. La condition initiale donnée pour $t = 1 \in]-\infty; \frac{1}{1+\ln 2}[$ impose ce dernier.

Notre solution est donc $y : t \mapsto \frac{1}{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$ définie sur $]-\infty; \frac{1}{1+\ln 2}[$.

Commentaires : Comme $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} e^{-\frac{1}{t}} = 0$, si l'on avait imposé une condition initiale sur un intervalle de la forme $]0; a[$, on aurait pu espérer prolonger par continuité notre solution sur $[0; a[$ et peut-être de manière deux fois dérivable.

2. y est une solution non constamment nulle. On pose encore $y = z^{-1} = \frac{1}{z}$ ce qui donne :

$$y' = xy^2 + y \iff -\left(-\frac{y'}{y^2}\right) = x + \frac{1}{y} \iff z' = -z - x \text{ avec } z(0) = 1.$$

- (a) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par $z(x) = \lambda e^{-x}$ et une solution particulière est $z_p(t) = 1 - x$.

Les solutions générales sont donc les fonctions définies par $z(t) = 1 - x + \lambda e^{-x}$.

La condition initiale impose $\lambda = 0$.

D'où $y(t) = \frac{1}{1-x}$ définie sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

Exercice 20 (Équation de Bernoulli bis) :

1. Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq 1,$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$.

2. Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Correction :

1. On suppose qu'une solution y ne s'annule pas.

On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par y^n , ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n) \frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n} z' + a(x)z + b(x) = 0$$

2. Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2 \frac{y'(x)}{y^3(x)}$. L'équation différentielle s'exprime alors $-\frac{1}{2} xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se restreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[& \text{si } \lambda = 0 \\ \left]0; -\frac{2}{\lambda}\right[& \text{si } \lambda < 0 \\ -\infty; -\frac{2}{\lambda}\left[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \epsilon(x) \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\epsilon(x) = \pm 1$.

Or, y est continue sur l'intervalle I_λ , et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\epsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1 . Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \quad \text{sur } I_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

Exercice 21 (Équation de Riccati) :

1. Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

2. Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Correction :

1. Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

2. Équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

— Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.

— $y_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

— On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2 \left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2 , cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x} \frac{1}{u} + 1 = 0$.

On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$.

Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x \ln |x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln |x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.

— Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x \ln |x|} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Exercice 22 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(-x) = 1. \quad (\text{XI.1})$$

Correction : Tout d'abord, remarquons que f et f' ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$. Conséquence, $f' = \frac{1}{f(-x)}$, quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable puis, par récurrence, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice à astuce où il faut remarquer que $\left(f(x)f(-x)\right)' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1$ et $f'(-x)f(x) = 1$ par symétrie alors $f(x)f(-x)$ dont la dérivée est nulle, est constante sur $\mathbb{R}$, par exemple, à $f(0)^2$ non nul.

En combinant les deux équations, on obtient :

$$f(x)f(-x) = f(0)^2 \text{ et } f(-x) = \frac{1}{f(x)} \implies f(x) = f(0)^2 f'(x).$$

f est donc de la forme $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ pour un certain $\lambda > 0$.

Réciproquement, on vérifie que seule $f_1 : x \mapsto e^x$ est solution de (XI.1).

Exercice 23 : On considère l'équation différentielle

$$(L) : x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2 y$.
2. Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$?

Correction :

1. Posons $u = x^2 y$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,$

$$\begin{aligned} u = x^2 y &\iff y = \frac{u}{x^2} \\ u' = 2xy + x^2 y' &\iff y' = \frac{u' - 2\frac{u}{x}}{x^2} = \frac{xu' - 2u}{x^3} \\ u'' = 2y + 4xy' + x^2 y'' &\iff y'' = \frac{x^2 u'' - 2\frac{u}{x^2} - 4\frac{u'x - 2u}{x^2}}{x^2} = \frac{x^2 u'' - 4xu' + 6u}{x^4} \\ &\iff x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = \frac{x^2 u'' - 4xu' + 6u + 4xu' - 8u + (2 + x^2)u}{x^2} \\ &\iff 0 = u'' + u \end{aligned}$$

Commentaires : La forme simple de l'équation en u se voyait mais la méthode ci-dessus, marchera dans tous les cas.

La fonction u est donc solution de d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants donc de la forme $u : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On trouve alors les solutions de l'équation initiale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ (les constantes dépendent de ces intervalles) :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda_\pm \cos(x) + \mu_\pm \sin(x)}{x^2}, \quad \lambda_\pm, \mu_\pm \in \mathbb{R}.$$

2. Quelles que soient les constantes $\lambda_\pm, \mu_\pm$ non nulles, $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = +\infty$ donc il est impossible de prolonger y en une solution même continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La seule solution sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle (on le vérifiera aisément).

Commentaires : Si le dénominateur avait été x et non x^2 , on aurait pu le tenter avec $\lambda_\pm = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ mais pas là et on aurait eu, de toute manière des soucis pour prolonger en une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Remédiation

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

Correction : Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x^2)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx \\ &= \left[x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan(x) \right]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Calculer à l'aide d'un changement de variables $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ et $\int_0^1 \sqrt{e^x-1} dx$.

Correction : En posant $x = \operatorname{sh}(u)$ i.e. $dx = \operatorname{ch}(u) du$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \operatorname{ch}^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} 1 + \operatorname{ch}(2u) du \\ &= \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2u) \right]_0^{\operatorname{argsh}(1)} \quad (\operatorname{argsh}(1) = \ln(1+\sqrt{2})) \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{argsh}(1) + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2 \operatorname{argsh}(1)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{argsh}(1) + \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(1))) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{argsh}(1) + \sqrt{1+1^2}) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Posons $u = \sqrt{e^x-1}$ i.e. $du = \frac{u^2+1}{2u} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{e^x-1} dx &= 2 \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= 2 \left[u - \arctan(u) \right]_0^{\sqrt{e-1}} \\ &= 2\sqrt{e-1} - 2\arctan(\sqrt{e-1}). \end{aligned}$$

3. À l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

(a) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ (poser $x = 2 + \sin(u)$) (b) $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$ (poser $x = \operatorname{sh}(u)$) (c) $x \mapsto \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Correction :

(a) Posons $t = 2 + \sin(u)$ i.e. $dt = \cos(u) du$

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}} dt &= \int^u \frac{2 + \sin(u)}{\sqrt{(1 + \sin(u))(1 - \sin(u))}} \cos(u) du \\ &= \int^u \frac{2 + \sin(u)}{\sqrt{1 - \sin^2(u)}} du = 2u - \sqrt{1 - \sin^2(u)} \\ &= 2\arcsin(t-2) - \sqrt{1 - (t-2)^2} \\ &= 2\arcsin(t-2) - \sqrt{(t-1)(3-t)}. \end{aligned}$$

(b) Posons $t = \operatorname{sh}(u)$ i.e. $dt = \operatorname{ch}(u) du$ et $u = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{t + \sqrt{1+t^2}} &= \int^u \frac{\operatorname{ch}(u) du}{\operatorname{sh}(u) + \operatorname{ch}(u)} \\ &= \int^u \frac{e^u + e^{-u}}{2e^u} du = \int^u \frac{1}{2} (1 + e^{-2u}) du \\ &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2} e^{-2u} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \right). \end{aligned}$$

(c) $\int^x \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} dt = \int^x \left(1 - \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1} \right) dt$
 $= x - \ln(x^2 + x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

(a) $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1, 1[$. (b) $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

(a) Sur $] -1, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_H : x \mapsto \lambda e^{-\arcsin(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction constante à 1 est clairement solution.

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y : x \mapsto 1 + \lambda e^{-\arcsin(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Comme $\operatorname{ch}(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les solutions homogènes sont de la forme

$$y : x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)\operatorname{ch}(x)$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

y_p est solution si, et seulement si $\lambda'(x) = \frac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{sh}(x) - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$ dont une primitive est $x \mapsto \operatorname{ch}(x) + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Les solutions générales sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Donner les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' + y = 2 \cos^2(x)$ (b) $y'' + 2y' + 3y = x e^x \sin(x)$

Correction :

(a) Les solutions homogènes sont de la forme

$$y_H : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme $2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, d'après le théorème de superposition, cherchons des solutions particulières des équations

$$y'' + 2y' + y = 1 \quad \text{et} \quad y'' + 2y' + y = \cos(2x).$$

Pour la première la fonction constante à 1 est clairement solution.

Pour la seconde, cherchons une solution particulière sous la forme, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) \\ 2 \times y'_p(x) &= 2\mu \cos(2x) - 2\lambda \sin(2x) \\ y''_p(x) &= -4\lambda \cos(2x) - 4\mu \sin(2x) \\ \cos(2x) &= (-3\lambda + 4\mu) \cos(2x) + (-4\lambda - 3\mu) \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = 1 \\ -4\lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{25} \\ \mu = \frac{4}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions générales sont de la forme

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-x} + 1 + \frac{1}{25} (4 \sin(2x) - 3 \cos(2x)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Les solutions homogènes sont de la forme

$$y_H : x \mapsto (\lambda \cos(x\sqrt{2}) + \mu \sin(x\sqrt{2})) e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$3 \times y_p(x) = \left((ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) \right) e^x.$$

$$\text{ou } (AX + B) \left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \right) e^x \text{ c'est pareil.}$$

$$2 \times y'_p(x) = \left(((a+c)x + a + b + d) \cos(x) + ((c-a)x + c + d - b) \sin(x) \right) e^x$$

$$y''_p(x) = \left((2cx + 2a + 2c + 2d) \cos(x) - (2ax + 2a + 2b - 2c) \sin(x) \right) e^x$$

$$e^x \sin(x) = \left(((5a + 4c)x + 4a + 5b + 2c + 4d) \cos(x) + ((5c - 4a)x - 2a - 4b + 4c + 5d) \sin(x) \right) e^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 4c = 0 \\ 4a + 5b + 2c + 4d = 0 \\ -4a + 5c = 1 \\ -2a - 4b + 4c + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{41} \\ 205b + 164d - 16 + 10 = 0 \\ c = \frac{5}{41} \\ -164b + 205d + 8 + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{41} \\ 205b + 164d = 6 \\ c = \frac{5}{41} \\ 164b - 205d = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{41} \\ b = \frac{142}{1681} \\ c = \frac{5}{41} \\ d = -\frac{116}{1681} \end{cases}$$

Donc, à erreur de calcul près, on peut considérer

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{41} \left(\left(-4x + \frac{142}{41} \right) \cos(x) + \left(5x - \frac{116}{41} \right) \sin(x) \right) e^x.$$

Et donc, les solutions générales sont sous la forme :

$$y : x \mapsto \left(\lambda \cos(x\sqrt{2}) + \mu \sin(x\sqrt{2}) \right) e^{-x} + \frac{1}{41} \left(\left(-4x + \frac{142}{41} \right) \cos(x) + \left(5x - \frac{116}{41} \right) \sin(x) \right) e^x,$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Indication : Poser $x = e^t$.

Correction : Posons z la fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{aligned} z(t) = y(e^t) &\Leftrightarrow z(t) = y(x) \\ z'(t) = e^t y'(e^t) &\Leftrightarrow z'(t) = xy'(x) \\ z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) &\Leftrightarrow z''(t) = xy'(x) + x^2 y''(x) \\ &\Leftrightarrow z''(t) - z'(t) = x^2 y''(x) \\ &\Leftrightarrow z'' + 3z' + 2z = x^2 y'' + 4xy' + 2y \end{aligned}$$

La fonction z est donc solution de d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants donc de la forme

$$z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On trouve alors les solutions de l'équation initiale :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Équations différentielles linéaires

1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x+1}$.

Pour ne pas faire de bêtises, le mieux est de factoriser et de résoudre, pour $x \neq 0, -1$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq 0 \iff \frac{1}{x(x+1)} \leq 0.$$

$$\mathcal{S} =]-1; 0[.$$

2. Donner les solutions générales de l'équation différentielle $y' + 2y = 3 \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

— Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_H : x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

— Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) &= \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu \cos(x) - \lambda \sin(x) \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$y_p' + 2y_p = 3 \cos(x) - \sin(x)$$

$$(\mu + 2\lambda) \cos(x) + (-\lambda + 2\mu) \sin(x) = 3 \cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu + 2\lambda = 3 \\ 2\mu - \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$.

— Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto \cos(x) + \sin(x) + \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' + 2y' + 4y = 0$.

$(E_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ a deux solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto e^{-x} \left[k_1 \cos(x\sqrt{3}) + k_2 \sin(x\sqrt{3}) \right], (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. Déterminer les solutions complexes de l'équation $y'' - (2+i)y' + (1+i)y = 0$.

$(E_c) : r^2 - (2+i)r + (1+i) = 0$ a deux solutions $1+i$ et 1 .

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{ x \mapsto K_1 e^{(1+i)x} + K_2 e^x, (K_1; K_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Équations différentielles linéaires

1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+2}{x+3}$.

$$\text{Pour } x \neq -1, -3, \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+2}{x+3} \iff \frac{-2}{(x+1)(x+3)} \geq 0.$$

$$\mathcal{S} =]-3; -1[.$$

2. Donner les solutions générales de l'équation différentielle $(x-1)y' - xy = 2 + x + 2x^2$ sur $]1; +\infty[$.

- Comme $x-1 \neq 0$ sur $]1; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ et les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_H : x \mapsto \lambda(x-1)e^x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]1; +\infty[, \quad y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} (x-1)y_p' - xy_p &= 2 + x + 2x^2 \\ (x-1)a - x(ax+b) &= 2 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

$$-ax^2 + (a-b)x - a = 2 + x + 2x^2 \iff \begin{cases} -a = 2 \\ a-b = 1 \\ -a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \mapsto -2x - 3$.

- Les solutions générales sur $]1; +\infty[$ sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto -2x - 3 + \lambda(x-1)e^x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' + 14y' + 49y = 0$.

$$(E_c) : r^2 + 14r + 49 = 0 \text{ a une solution double : } -7.$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (k_1x + k_2)e^{-7x}, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

4. Déterminer les solutions complexes de l'équation $y'' - 2(1+i)y' + 2iy = 0$.

$$(E_c) : r^2 - 2(1+i)r + 2i = 0 \text{ a une racine double } 1+i.$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto (K_1x + K_2)e^{(1+i)x}, (K_1; K_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Équations différentielles linéaires 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(x^2 + 2x + 5)y' + y = x^2 + 3x + 5$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 > 0$ donc sur $I \subset \mathbb{R}$,

$$y_H : x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{e^{\arctan(\frac{x+1}{2})}}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax + b$.

y_p est solution si, et seulement si $a(x^2 - 3x + 2) + ax + b = x^2 - 2x + 2$ i.e. $a = 1$ et $b = 0$.

Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

$$y : x \mapsto x + \frac{\lambda}{\sqrt{e^{\arctan(\frac{x+1}{2})}}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = \text{ch}(2x)$.

L'équation caractéristique admet -1 et 2 comme racine simple donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_H : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto x(\text{Ach}(2x) + \text{Bsh}(2x))$.

Commentaires : On pourrait aussi chercher une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto xAe^{2x} + Be^{-2x}$.

On trouverait alors $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}x e^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}$.

y_p est solution si, et seulement si $y_p'' - y_p' - 2y_p = \text{ch}(2x)$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax \text{ch}(2x) + Bx \text{sh}(2x) \\ y_p'(x) &= (A + 2Bx) \text{ch}(2x) + (B + 2Ax) \text{sh}(2x) \\ y_p''(x) &= (4Ax + 4B) \text{ch}(2x) + (4A + 4Bx) \text{sh}(2x) \\ \text{ch}(2x) &= ((2A - 2B)x + 4B - A) \text{ch}(2x) + (\dots \text{inutile ou seulement pour vérifier} \dots) \text{sh}(2x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ -A + 4B = 1. \end{cases} &\Leftrightarrow A = B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Une solution particulière pourra donc être $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}x(\text{ch}(2x) + \text{sh}(2x)) = \frac{1}{3}x e^{2x}$.

Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

$$y : x \mapsto \left(\frac{1}{3}x + \lambda\right) e^{2x} + \mu e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Commentaires : Avec l'autre solution particulière, on aurait eu

$$y : x \mapsto \left(\frac{1}{6}x + \lambda'\right) e^{2x} + \mu' e^{-x} + \frac{1}{8}e^{-2x}, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}.$$

Ces deux formes ont l'air différent et pourtant elles engendrent bien le même ensemble de solutions.

Équations différentielles linéaires 2

1. Résoudre sur $]2; +\infty[$, l'équation différentielle $(x^2 - 3x + 2)y' + y = x^2 - 2x + 2$.

Sur $I \subset]2; +\infty[$, comme, $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$ est continue, on obtient :

$$y_H : x \mapsto \lambda \underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{>0}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax + b$.

y_p est solution si, et seulement si $a(x^2 + 2x + 5) + ax + b = x^2 + 3x + 5$ i.e. $a = 1$ et $b = 0$.

Les solutions générales sur $]2; +\infty[$ sont donc de la forme

$$y : x \mapsto x + \lambda \frac{x-1}{x-2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x e^x$.

L'équation caractéristique admet 1 comme racine double donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_H : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto x^2(ax + b) e^x$.

y_p est solution si, et seulement si $y_p'' - 2y_p' + y_p = x e^x$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (ax^3 + bx^2) e^x \\ y_p'(x) &= (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx) e^x \\ y_p''(x) &= (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b) e^x \\ x e^x &= (6ax + 2b) e^x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière pourra donc être $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 e^x$.

Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

$$y : x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \lambda x + \mu \right) e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Méthode de variation de la constante d'ordre 2

On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x). \quad (\text{E})$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée : $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0. \quad (E_0)$

I. Calculs préliminaires :

1. Déterminer une primitive sur I de $f : x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$.
2. Déterminer une primitive sur I de la fonction $g : x \mapsto g(x) = (1-x^2)\ln x$.

II. Résolution de (E_0) :

3. Montrer que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0) .
4. Soit $y : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I . On définit la fonction z par :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0. \quad (E')$$

5. Résoudre l'équation différentielle (E') .
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) .

III. Résolution de l'équation (E) :

7. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p : x \mapsto y_p(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1),$$

où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad x\lambda'(x) + (x^2 - 1)\mu'(x) = 0. \quad (\text{Lag}_1)$$

- (a) Exprimer y'_p et y''_p en fonction de λ et μ .
- (b) Montrer que y_p est solution de (E) si, et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2 + 1)\ln x. \quad (\text{Lag}_2)$$

- (c) Pour $x \in I$, montrer que $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.
- (d) En déduire une expression des fonctions λ et μ puis d'une solution particulière de (E) .

8. Donner l'ensemble des solutions de (E) .

Méthode de variation de la constante d'ordre 2

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = (1+x^2) \ln(x). \quad (E)$$

I. Calculs préliminaires :

1. D'après la méthode standard de décomposition en éléments simples, on multiplie l'expression par x avant d'évaluer en 0. On trouve alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{cx+d}{1+x^2}.$$

La méthode est identique pour l'élément de deuxième espèce : on multiplie par $1+x^2$ avant d'évaluer en i et d'égaliser parties réelle et imaginaire :

$$\frac{2}{i} = ic + d \iff -2i = ic + d \iff c = -2 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

On trouve finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.$$

Sur I , le dénominateur ne s'annule pas donc $f : x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$ est continue.

Une primitive sur I est donc

$$F : x \mapsto 2\ln(x) - \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

Commentaires : Point de points sans préciser la continuité !

2. À l'aide d'une intégration par parties, on vérifiera que $G : x \mapsto \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \ln(x) - x + \frac{1}{9}x^3$ convient.

II. Résolution de (E_0)

3. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2} y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2} y_1(x) = 0 - \frac{2x}{1+x^2} \times 1 + \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Donc, y_1 est solution de (E_0) .

Commentaires : Dérivabilité avant la dérivée !

4. Comme $x \neq 0$ sur I , z , quotient de fonctions deux fois dérivables et de dénominateur ne s'annulant pas sur $I =]0; +\infty[$ est également deux fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\ y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } y \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0 \\
&\Leftrightarrow 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow xz''(x) + 2 \frac{1+x^2 - x^2}{1+x^2} z'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x(z')'(x) + \frac{2}{1+x^2} z'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow z' \text{ est solution de } xu'(x) + \frac{2}{1+x^2} u = 0. \quad (E')
\end{aligned}$$

Donc, y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de (E') .

5. Comme $x \neq 0$, la solution générale de (E') est $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$, fonction continue sur I .

D'après (1), la solution générale de (E') est donc :

$$x \mapsto \lambda e^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \lambda \frac{1+x^2}{x^2} = \lambda \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. z' est donc de la forme $x \mapsto \lambda \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ i.e. z est de la forme

$$z : x \mapsto \lambda \left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin, $y = xz$ est de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda(x^2 - 1) + \mu x, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

III. Résolution de (E)

7. (a) y_p est deux fois dérivable sur I comme produit et somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in I, \quad y_p'(x) = \cancel{x\lambda'(x)} + \lambda(x) + \underbrace{\cancel{\mu'(x)(x^2-1)}}_{=-x\lambda'(x)} + 2x\mu(x).$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc, } \forall x \in I, \quad y_p'(x) &= \lambda(x) + 2x\mu(x) \\
\text{et, } y_p''(x) &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x).
\end{aligned}$$

- (b) y_p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
(x^2 + 1)\ln(x) &= y_p'' - \frac{2x}{1+x^2} y_p' + \frac{2}{1+x^2} y_p \\
(x^2 + 1)\ln(x) &= \lambda' + 2\mu + 2x\mu' - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda + 2x\mu) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda x + \mu(x^2 - 1)) \\
(x^2 + 1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu' + \lambda \underbrace{\frac{-2x+2x}{1+x^2}}_{=0} + \mu \underbrace{\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2}}_{=0} \\
(x^2 + 1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu'.
\end{aligned}$$

Donc, y_p est solution de (E) si, et seulement si $\lambda' + 2x\mu = (x^2 + 1)\ln(x)$.

- (c) Soit $x \in I$, le couple $(\lambda'(x); \mu'(x))$ est donc solution du système :

$$\begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2 - 1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2)\ln x \end{cases} \quad \text{de déterminant } 1 + x^2 \neq 0.$$

On trouve alors $\lambda'(x) = (1 - x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

(d) D'après (2), on a déjà :

$$\forall x \in I, \quad \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \ln(x) - x + \frac{x^3}{9}.$$

Déterminons une primitive de μ' sur I : Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , on peut intégrer par parties et on a :

$$\forall x \in I, \quad \int^x t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]^x - \int^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C. \quad (C \in \mathbb{R})$$

On considère la primitive pour laquelle $C = 0$ et on trouve :

$$\forall x \in I, \quad \mu(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$\begin{aligned} y_p : x \mapsto y_p(x) &= \lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1) \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) \ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \left(\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}\right) (x^2 - 1) \\ &= \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} x^2\right) \ln(x) - \frac{x^2}{4} \left(3 + \frac{5}{9} x^2\right). \end{aligned}$$

8. D'après ce qui précède, la solution générale de (E) sur I est de la forme :

$$y : x \mapsto \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} x^2\right) \ln(x) - \frac{x^2}{4} \left(3 + \frac{5}{9} x^2\right) + \lambda(x^2 - 1) + \mu x, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Nombres complexes et équations différentielles

27 juin 2025

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 – L’objectif de l’exercice est de déterminer toutes les fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \quad (\text{E})$$

A. Soit f une solution du problème.

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1. (a) Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle

$$y'' + y = \cos(x). \quad (\text{E}_1)$$

(b) Déterminer les solutions réelles de (E_1) .

(c) En déduire qu’il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x).$$

2. (a) Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle

$$y'' - y = x. \quad (\text{E}_2)$$

(b) Déterminer les solutions réelles de (E_2) .

(c) En déduire qu’il existe un réel β tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \beta \operatorname{sh}(x) - x.$$

3. Déduire des questions précédentes la fonction f .

B. Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l’équation (E).

Exercice 2 – On considère l’application complexe $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{z^2}{z - 2i}.$$

1. Déterminer l’ensemble de définition $\mathcal{D}$ de ϕ .

2. (a) Déterminer les racines carrées de $8 - 6i$.

(b) En déduire les antécédents de $1 + i$ par ϕ .

3. Soit $b \in \mathbb{C}$.

Discuter, selon les valeurs de b , le nombre d’antécédents de b par ϕ .

4. Déterminer l’ensemble $\mathcal{E}$ des points d’affixe z tels que $\phi(z) \in i\mathbb{R}$.

Problème 3 –

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit $t \in [0; \pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π -périodique. Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t) \, dt = \int_0^a f(t) \, dt,$$

puis en déduire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{2\pi+a} f(t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \, dt.$$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π -périodique. Montrer que :

$$\int_0^\pi f(t) \, dt = \int_{-\pi}^0 f(t) \, dt, \quad \text{puis} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 2 \int_0^\pi f(t) \, dt.$$

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Justifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_0^a f(t) \, dt.$$

Partie II : Deux calculs d'intégrales

On considère, pour $r \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$ les intégrales :

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt \quad \text{et} \quad B(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt.$$

5. Justifier l'existence de $A(r)$ et $B(r)$.
6. Calculer $B(r)$.
7. Montrer que $A(r) = 2 \int_0^\pi \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt$.
8. Soit $a \in]0; \pi[$. On pose :

$$I_a(r) = \int_0^a \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt.$$

- (a) Montrer, via le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, que $I_a(r)$ s'écrit sous la forme :

$$I_a(r) = \frac{2}{r+1} \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} \, du,$$

où α est une constante à exprimer en fonction de r .

(b) Déterminer deux réels A, B tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} = \frac{A}{u^2 + \alpha^2} + \frac{B}{u^2 + 1}.$$

(c) En déduire que :

$$I_a(r) = \frac{1}{r} \left(\arctan \left(\frac{\tan \left(\frac{a}{2} \right)}{\alpha} \right) + \frac{a}{2} \right).$$

(d) En distinguant les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, déterminer $\lim_{a \rightarrow \pi^-} I_a(r)$.

(e) Conclure que :

$$A(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0; 1[, \\ \frac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Partie III : Indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma : t \mapsto x(t) + i y(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0; 1])$, on appelle indice de z par rapport au lacet γ , et on note $\text{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

9. Justifier que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0; 1])$.
10. Dans cette question uniquement, on pose : $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ et $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \neq 1$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.
 - (a) Vérifier que γ et z vérifient les hypothèses précédentes et calculer $\text{Ind}_\gamma(0)$.
 - (b) On suppose $z \neq 0$. À l'aide du changement de variable $u = -2\pi t + \varphi$, montrer que :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{r - e^{it}} \quad \text{avec } r = \frac{1}{\rho}.$$

- (c) Montrer que $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} (A(r) - i B(r))$.
- (d) En déduire la valeur de $\text{Ind}_\gamma(z)$ selon les valeurs de z .
11. On considère à présent une application γ quelconque vérifiant les hypothèses précisées au début de cette partie.

On veut montrer dans cette question que $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. On pose pour ceci :

$$F(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right).$$

(a) Justifier la dérivabilité de $G : x \mapsto \frac{F(x)}{\gamma(x) - z}$ pour tout $x \in [0; 1]$ et montrer que :

$$\forall x \in [0; 1], G'(x) = 0.$$

- (b) En déduire que $F(0) = F(1)$ puis que $\exp(2i\pi \text{Ind}_\gamma(z)) = 1$.
- (c) Conclure.

Nombres complexes et équations différentielles

Exercice 1 – L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \quad (\text{E})$$

A. Soit f une solution du problème.

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1. (a) Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(x). \quad (\text{E}_1)$$

Correction : Par composée, la fonction $x \mapsto -x$, et combinaisons linéaires de fonctions deux fois dérivables, la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) &= \frac{f''(x) + f''(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{f''(x) + f(-x)}{2} + \frac{f''(-x) + f(x)}{2} \end{aligned}$$

Comme f est solution de (E), on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{x + \cos(x)}{2} + \frac{-x + \cos(-x)}{2} \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

La fonction g est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) .

- (b) Déterminer les solutions réelles de (E_1) .

Correction : (E_1) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont les solutions homogènes sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y_H : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Commentaires : Lorsque vous décrivez l'équation, à ne choisir qu'un mot c'est « linéaire » le plus important. C'est de lui que découle tout le reste : la méthode et la forme des solutions.

Comme $x \mapsto \cos(x)$ est solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x(C \cos(x) + D \sin(x)), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) &= C \cos(x) + D \sin(x) + x(D \cos(x) - C \sin(x)) \\ y_p''(x) &= -C \sin(x) + D \cos(x) + (-C \sin(x) + D \cos(x)) + x(-C \cos(x) - D \sin(x)) \\ &= -2C \sin(x) + 2D \cos(x) - x(C \cos(x) + D \sin(x)) \\ y_p''(x) + y_p(x) &= 2D \cos(x) - 2C \sin(x) \end{aligned}$$

Comme $y_p''(x) + y_p(x) = \cos(x)$ pour tout x réel, C et D sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2C &= 0 \\ 2D &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C &= 0 \\ D &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière est :

$$y_p : x \mapsto \frac{x}{2} \sin(x).$$

Commentaires : *On a tout à fait le droit d'être malin et de lire un peu plus loin pour écrire une phrase du genre « La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x \sin(x)$ est clairement une solution particulière de (E) ».*

Les solutions générales de (E_1) sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x).$$

Correction : Par construction, g est une fonction paire donc $B = 0$ et le résultat demandé.

2. (a) Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' - y = x. \quad (E_2)$$

Correction : Le raisonnement est identique à celui de la question (1) :

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) - h(x) &= \frac{f''(x) - f''(-x)}{2} - \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f''(x) + f(-x)}{2} - \frac{f''(-x) + f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Comme f est solution de (E), on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{x + \cos(x)}{2} - \frac{-x + \cos(-x)}{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

La fonction h est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2) .

(b) Déterminer les solutions réelles de (E_2) .

Correction : (E_2) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont les solutions homogènes sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y_H : x \mapsto A \cosh(x) + B \sinh(x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $y_p : x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E_2) .

Les solutions générales de (E_1) sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto A \cosh(x) + B \sinh(x) - x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel β tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \beta \sinh(x) - x.$$

Correction : Par construction, h est une fonction impaire donc $A = 0$ et le résultat demandé.

3. Déduire des questions précédentes la fonction f .

Correction : En remarquant que $f = g + h$, on a :

$$f : x \mapsto \alpha \cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x) + \beta \sinh(x) - x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

B. Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l'équation (E).

Correction : La fonction f sous la forme ci-dessus est clairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) + f(-x) &= -\alpha \cos(x) + \cos(x) - \frac{1}{2}x \sin(x) + \beta \sinh(x) + \alpha \cos(-x) - \frac{1}{2}x \sin(-x) + \beta \sinh(-x) + x \\ &= x + \cos(x). \end{aligned}$$

Les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l'équation (E).

Exercice 2 – On considère l'application complexe $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{z^2}{z - 2i}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de ϕ .

Correction : $\phi(z)$ est défini si, et seulement si $z - 2i \neq 0$ i.e. $z \neq 2i$.

L'ensemble de définition de ϕ est donc $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

2. (a) Déterminer les racines carrées de $8 - 6i$.

Correction : Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z^2 = 8 - 6i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i \text{ et } |z|^2 = |8 - 6i| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines carrées de $8 - 6i$ sont donc $3 - i$ et $-3 + i$.

(b) En déduire les antécédents de $1 + i$ par ϕ .

Correction : Déterminons les antécédents de $1 + i$:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{D}, \quad \phi(z) = 1 + i &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow z^2 = (1 + i)(z - 2i) \text{ car } z \neq 2i \\ &\Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z + (-2 + 2i) = 0 \quad (E_1) \end{aligned}$$

(E_1) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_1 = 8 - 6i = (3 - i)^2$.

(E_1) admet deux solutions distinctes : $\frac{(1 + i) - (3 - i)}{2} = -1 + i$ et $\frac{(1 + i) + (3 - i)}{2} = 2$.

Par conséquent, $1 + i$ admet deux antécédents par ϕ : $-1 + i$ et 2 .

Commentaires : $\overline{z - 2i} = \overline{z} + 2i \neq z + 2i$!!!!

3. Soit $b \in \mathbb{C}$.

Discuter, selon les valeurs de b , le nombre d'antécédents de b par ϕ .

Correction : Soit $b \in \mathbb{C}$. La démarche est identique à celle de la question précédente.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{D}, \quad \phi(z) = b &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = b \\ &\Leftrightarrow z^2 = b(z - 2i) \text{ car } z \neq 2i \\ &\Leftrightarrow z^2 - bz + 2ib = 0 \quad (E_2) \end{aligned}$$

(E_2) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_2 = b^2 - 4(2ib) = b(b - 8i)$. Conclusion,

- Si $b \in \{0, 8i\}$, $\Delta_2 = 0$, donc b admet un seul antécédent par ϕ .
- Si $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$, $\Delta_2 \neq 0$, donc b admet deux antécédents distincts par ϕ .

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $\phi(z) \in i\mathbb{R}$.

Correction : Soit $z \in \mathcal{D}$ i.e. $z \neq 2i$ et $\bar{z} \neq -2i$.

$$\begin{aligned}
 \phi(z) \in i\mathbb{R} &\iff \phi(z) = -\overline{\phi(z)} \iff \frac{z^2}{z-2i} = -\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}+2i} \\
 &\iff z^2(\bar{z}+2i) + \bar{z}^2(z-2i) = 0 \\
 &\iff z|z|^2 + 2iz^2 + \bar{z}|z|^2 - 2i\bar{z}^2 = 0 \\
 &\iff (z+\bar{z})|z|^2 + 2i(z^2 - \bar{z}^2) = 0 \\
 &\iff (z+\bar{z})|z|^2 + 2i(z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \\
 &\iff (z+\bar{z})(z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z}) = 0 \\
 &\iff (z+\bar{z})((z-2i)\overline{(z-2i)} - 4) = 0 \\
 &\iff z+\bar{z} = 0 \text{ ou } |z-2i| = 2.
 \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc l'ensemble des points de l'axe des imaginaires purs et du cercle de centre $\Omega(2i)$ et de rayon 2.

On vérifiera que le point d'affixe $2i$ ne fait pas partie de cet ensemble.

Commentaires : On pouvait aussi trouver $\mathcal{E}$ en passant par la forme algébrique mais c'est moins joli : Soit $z = x + iy \in \mathcal{D}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \phi(z) = \frac{z^2}{z-2i} &= \frac{(x+iy)^2}{x+i(y-2)} = \frac{[(x^2-y^2) + 2ixy][x-i(y-2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]} \\
 &= \frac{[(x^2-y^2)x + 2xy(y-2)] + i[2x^2y - (x^2-y^2)(y-2)]}{x^2 + (y-2)^2} \\
 &= \frac{[(x^2+y^2-4y)x] + i[2x^2y - (x^2-y^2)(y-2)]}{x^2 + (y-2)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 M(z) \in \mathcal{E} &\iff \phi(z) \in i\mathbb{R} \\
 &\iff \operatorname{Re}(\phi(z)) = 0 \\
 &\iff \frac{(x^2+y^2-4y)x}{x^2+(y-2)^2} = 0 \\
 &\iff (x^2+y^2-4y)x = 0 \text{ et } x^2+(y-2)^2 \neq 0 \\
 &\iff [x^2+y^2-4y = 0 \text{ ou } x = 0] \text{ et } (x, y) \neq (0, 2) \\
 &\iff [x^2+(y-2)^2 = 2^2 \text{ ou } x = 0] \text{ et } (x, y) \neq (0, 2)
 \end{aligned}$$

On retrouve le même ensemble.

Problème 3 –

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit $t \in [0; \pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Correction : Pour $t \in [0; \pi[$, $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est bien défini et, avec $1 + u^2 \neq 0$, on a :

$$\frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos(t)$$

et

$$\sin(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Commentaires : C'est quand même bien de parler de la bonne définition de u !

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π -périodique. Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t) \, dt = \int_0^a f(t) \, dt,$$

puis en déduire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{2\pi+a} f(t) \, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \, dt.$$

Correction : Soit $a \in \mathbb{R}$. On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1 : u = t - 2\pi$ i.e. $du = dt$, ce qui donne :

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t) \, dt = \int_0^a f(u + 2\pi) \, du = \int_0^a f(u) \, du = \int_0^a f(t) \, dt.$$

On a alors, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_a^{2\pi+a} f(t) \, dt &= \int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^{2\pi} f(t) \, dt + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t) \, dt \\ &= \underbrace{\int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^a f(t) \, dt}_{=0} + \int_0^{2\pi} f(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π -périodique. Montrer que :

$$\int_0^\pi f(t) \, dt = \int_{-\pi}^0 f(t) \, dt, \quad \text{puis} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 2 \int_0^\pi f(t) \, dt.$$

Correction : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π -périodique. En effectuant le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1 : u = -t$ i.e. $du = -dt$, on obtient :

$$\int_0^\pi f(t) \, dt = - \int_0^{-\pi} f(-u) \, du = \int_{-\pi}^0 f(u) \, du = \int_{-\pi}^0 f(t) \, dt.$$

De plus, à l'aide de la question précédente pour $a = -\pi$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t) \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \\ &= \int_{-\pi}^0 f(t) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \, dt \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= 2 \int_0^{\pi} f(t) \, dt \quad (\text{résultat précédent}).\end{aligned}$$

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Justifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_0^a f(t) \, dt.$$

Correction : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, elle l'est donc sur tout intervalle $[0; a]$ et l'intégrale $\int_0^a f(t) \, dt$ est correctement définie.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et en particulier en $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

ce qui s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_0^a f(t) \, dt.$$

Partie II : Deux calculs d'intégrales

On considère, pour $r \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$ les intégrales :

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt \quad \text{et} \quad B(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} \, dt.$$

5. Justifier l'existence de $A(r)$ et $B(r)$.

Correction : Soit $r \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$. On considère l'application $t \mapsto \frac{1}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$ définie sur $[0; 2\pi]$.

On constate que le dénominateur ne s'annule pas.

En effet, ce dernier a pour discriminant $\Delta = -4 \sin^2(t)$, ce qui est toujours strictement négatif sauf pour $t = 0, \pi$ ou 2π .

— Or si $t = 0$ ou 2π , alors l'expression s'annule pour $r = 1$ ce qui est impossible avec $r \in [0; 1[$.

— De même, si $t = \pi$, alors l'expression s'annule pour $r = -1$ ce qui est également impossible.

Au final, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0; 2\pi]$, l'application considérée est continue sur $[0; 2\pi]$, et il en est de même, d'après les théorèmes sur les produits de fonctions continues des deux applications $t \mapsto \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$ ainsi que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$.

Commentaires : C'est bien la non nullité du dénominateur qu'il fallait montrer.

Encore trop d'élèves oublient de préciser que le dénominateur et le numérateurs sont continues.

Ces deux dernières étant continues, $A(r)$ et $B(r)$ sont bien définies.

6. Calculer $B(r)$.

Correction :

— Si $r \neq 0$, alors

$$B(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt = \frac{1}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt = \frac{1}{2r} \left[\ln(u(t)) \right]_0^{2\pi} = 0$$

car $u(0) = u(2\pi)$.

— Si $r = 0$, alors $B(r) = \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = \left[-\cos(t) \right]_0^{2\pi} = 0$.

Donc, $\forall r \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $B(r) = 0$.

7. Montrer que $A(r) = 2 \int_0^\pi \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt$.

Correction : Comme $t \mapsto \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique sur cet ensemble invariant par translations, d'après la question (3), on en déduit :

$$A(r) = 2 \int_0^\pi \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt.$$

8. Soit $a \in]0; \pi[$. On pose :

$$I_a(r) = \int_0^a \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt.$$

(a) Montrer, via le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, que $I_a(r)$ s'écrit sous la forme :

$$I_a(r) = \frac{2}{r+1} \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} du,$$

où α est une constante à exprimer en fonction de r .

Correction : On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1 : u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Avec,

$$\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad dt = \frac{2}{1 + u^2} du,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_a(r) &= 2 \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{r(1+u^2) - (1-u^2)}{r^2(1+u^2) - 2r(1-u^2) + (1+u^2)} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 2 \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{(r+1)u^2 + (r-1)}{u^2(r+1)^2 + (r-1)^2} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{2}{r+1} \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} du \quad \text{avec } \alpha = \frac{r-1}{r+1}. \end{aligned}$$

(α est bien définie car $r+1 \neq 0$.)

(b) Déterminer deux réels A, B tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} = \frac{A}{u^2 + \alpha^2} + \frac{B}{u^2 + 1}.$$

Correction : En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve :

$$A = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Commentaires : *Ce n'est pas une décomposition en éléments simples mais juste une réécriture plus pratique pour l'intégration qui suit.*

On pouvait aussi trouver A et B en résolvant un système :

- En multipliant les deux expressions par u^2 et en prenant la limite en $+\infty$: $1 = A + B$.
- Pour $u = 0$: $\frac{1}{\alpha} = \frac{A}{\alpha^2} + B$.

Le couple (A ; B) est alors solution du système $\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{1}{\alpha^2} A + B = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$.

On trouve, bien sûr, le même couple solution.

(c) En déduire que :

$$I_a(r) = \frac{1}{r} \left(\arctan \left(\frac{\tan(\frac{a}{2})}{\alpha} \right) + \frac{a}{2} \right).$$

Correction : Cette décomposition nous ramène à des termes facilement intégrables :

$$\begin{aligned} I_a(r) &= \frac{2}{r+1} \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)} du \\ &= \frac{2}{(r+1)(\alpha+1)} \left(\int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{\alpha}{u^2 + \alpha^2} du + \int_0^{\tan(\frac{a}{2})} \frac{1}{u^2 + 1} du \right) \\ &= \frac{2}{(r+1)(\alpha+1)} \left(\arctan \left(\frac{\tan(\frac{a}{2})}{\alpha} \right) + \arctan \left(\tan \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Comme $a \in]0; \pi[$, $\arctan \left(\tan \left(\frac{a}{2} \right) \right) = \frac{a}{2}$.

De plus, en remarquant que $\alpha + 1 = \frac{2r}{r+1}$, on déduit :

$$I_a(r) = \frac{1}{r} \left(\arctan \left(\frac{\tan(\frac{a}{2})}{\alpha} \right) + \frac{a}{2} \right).$$

(d) En distinguant les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, déterminer $\lim_{a \rightarrow \pi^-} I_a(r)$.

Correction :

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \arctan \left(\frac{\tan(\frac{a}{2})}{\alpha} \right) = -\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{a \rightarrow \pi^-} I_a(r) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \arctan \left(\frac{\tan(\frac{a}{2})}{\alpha} \right) = +\frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{a \rightarrow \pi^-} I_a(r) = \frac{\pi}{r}$.

(e) Conclure que :

$$A(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0; 1[, \\ \frac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Correction : D'une part, comme $r \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, on a :

$$\alpha = \frac{r-1}{r+1} < 0 \iff -1 < r < 1 \iff r \in [0; 1[.$$

D'autre part, l'application $t \mapsto \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question (4), on a :

$$\lim_{a \rightarrow \pi^-} \int_0^a \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt = \int_0^\pi \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} dt = \frac{1}{2} A(r).$$

Enfin, avec le résultat de la question (8d) on obtient :

$$A(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0; 1[\\ \frac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Partie III : Indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma : t \mapsto x(t) + iy(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0; 1])$, on appelle indice de z par rapport au lacet γ , et on note $\text{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

9. Justifier que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0; 1])$.

Correction : Puisque γ est de classe $\mathcal{C}^1$, γ' est continue sur $[0; 1]$.

De même, $t \mapsto \gamma(t) - z$ est continue car γ est dérivable donc continue.

Par ailleurs : $\forall t \in [0; 1], \gamma(t) \neq z$ (sinon $z \in \gamma([0; 1])$, ce qui contredirait l'hypothèse).

Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, on en déduit que $t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ est continue sur $[0; 1]$, donc l'intégrale est définie, ce qui justifie l'existence de $\text{Ind}_\gamma(z)$.

10. Dans cette question uniquement, on pose : $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ et $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \neq 1$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

(a) Vérifier que γ et z vérifient les hypothèses précédentes et calculer $\text{Ind}_\gamma(0)$.

Correction : La fonction γ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$.

D'autre part, comme $\forall t \in [0; 1], |\gamma(t)| = 1$ et $|z| = \rho \neq 1$, alors $z \notin \gamma([0; 1])$.

Les hypothèses sont donc bien vérifiées.

Puisque : $\forall t \in [0; 1], \gamma'(t) = 2i\pi\gamma(t)$, on a :

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 2i\pi dt = 1.$$

Commentaires : γ est à valeurs complexes donc pas de $\ln(\gamma)$ ou trucs du genre.

(b) On suppose $z \neq 0$. À l'aide du changement de variable $u = -2\pi t + \varphi$, montrer que :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{r - e^{it}} \quad \text{avec } r = \frac{1}{\rho}.$$

Correction : Soit $z \neq 0$. Par définition :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t} - z} dt.$$

On remplace z par $\frac{1}{r} e^{i\varphi}$ en posant $r = \frac{1}{\rho}$ car $\rho = |z| \neq 0$.

On a alors :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t} - \frac{1}{r} e^{i\varphi}} dt = r \int_0^1 \frac{e^{2i\pi t}}{r e^{2i\pi t} - e^{i\varphi}} dt.$$

Posons $u = -2\pi t + \varphi$. On a donc $du = -2\pi dt$ i.e. $dt = -\frac{1}{2\pi} du$ et les bornes deviennent $u(0) = \varphi$, $u(1) = \varphi - 2\pi$. Par changement de variable $\mathcal{C}^1$,

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \frac{du}{r - e^{iu}}.$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{r - e^{iu}}$ est 2π -périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$ donc, d'après la question (2), on obtient :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{r - e^{it}}.$$

(c) Montrer que $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} (A(r) - iB(r))$.

Correction : Il suffit de trouver la forme algébrique de $\frac{1}{r - e^{it}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r - e^{it}} &= \frac{r - e^{-it}}{(r - e^{it})(r - e^{-it})} \\ &= \frac{r - e^{-it}}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} = \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} - \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r \cos(t) + 1} i. \end{aligned}$$

On en déduit, par linéarité :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi} (A(r) - iB(r)).$$

(d) En déduire la valeur de $\text{Ind}_\gamma(z)$ selon les valeurs de z .

Correction : Comme $B(r) = 0$ d'après la question (6), et $A(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0; 1[, \\ \frac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1 \end{cases}$
d'après la question (8e)

Avec $|z| = \frac{1}{r}$, on obtient :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1, \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

11. On considère à présent une application γ quelconque vérifiant les hypothèses précisées au début de cette partie.

On veut montrer dans cette question que $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. On pose pour ceci :

$$F(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right).$$

(a) Justifier la dérivabilité de $G : x \mapsto \frac{F(x)}{\gamma(x) - z}$ pour tout $x \in [0; 1]$ et montrer que :
 $\forall x \in [0; 1], G'(x) = 0$.

Correction : D'après le théorème fondamental de l'analyse et par composition, F est dérivable sur $[0; 1]$ et :

$$\forall x \in [0; 1], F'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z} F(x) \quad \left(\Leftrightarrow F'(x)(\gamma(x) - z) - F(x)\gamma'(x) = 0 \right).$$

Alors, par quotient de dénominateur non nul, G est dérivable sur $[0; 1]$ et on a :

$$\forall x \in [0; 1], G'(x) = \frac{F'(x)(\gamma(x) - z) - F(x)\gamma'(x)}{(\gamma(x) - z)^2}.$$

D'après le résultat précédent, le numérateur est toujours nul et donc :

$$\forall x \in [0; 1], G'(x) = 0.$$

(b) En déduire que $F(0) = F(1)$ puis que $\exp(2i\pi \text{Ind}_\gamma(z)) = 1$.

Correction : D'après la question précédente, G est constante sur $[0; 1]$.

En particulier, on a $G(0) = G(1)$.

Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$, on trouve donc $F(0) = F(1)$, c'est-à-dire :

$$\exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt\right) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt\right) \iff 1 = \exp(2i\pi \text{Ind}_\gamma(z)).$$

(c) Conclure.

Correction : Comme $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2i\pi k$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2i\pi \text{Ind}_\gamma(z) = 2i\pi k$ i.e. $\text{Ind}_\gamma(z) = k$ car $2i\pi \neq 0$.

On a donc finalement :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0; 1]), \text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.$$

Commentaires : En mathématiques, l'indice d'un point par rapport à un lacet γ est intuitivement le nombre de tours (dans le sens trigonométrique) réalisé par le lacet autour du point. Intuitivement, placez-vous sur le point d'affixe z et parcourez le lacet (qui est fermé) du regard dans le sens trigonométrique jusqu'à revenir au point initial. Le nombre de tours sur vous-même que vous aurez faits est votre indice par rapport au lacet.

L'indice fournit le lien entre les aspects purement analytiques en analyse complexe et les propriétés topologiques du plan complexe.

Équations différentielles linéaires & Nombres Complexes II

1. Équations complexes

- Exponentielle complexe, propriétés.
- Racines carrées d'un complexe, existence d'exactly deux racines pour tout complexe non nul. Détermination directe par la forme polaire et/ou par le calcul sous la forme algébrique.
- Équations complexes du second degré. Discriminant complexe et expression des racines. Relations racines-coefficients : $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 z_2$ avec $z^2 - sz + p$.
- Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Stabilité par produit et inverse/conjugué. Somme des racines et factorisation de $z^n - 1$.
- Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe z . Expression à partir de la forme polaire de z .
- Caractérisation par les affixes de la colinéarité/alignement, de l'orthogonalité.
- Translation, rotation, homothétie. Définitions géométriques et applications complexes associées.

2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- Définition. Équation homogène associée. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
- Résolution de l'équation homogène.
- Ensemble des solutions de l'équation non homogène à l'aide d'une solution.
- Principe de superposition.
- Méthode de variation de la constante.
- Problème de Cauchy d'une équation différentielle d'ordre 1, existence et unicité.
- Les problème de raccord on été évoqués.

3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- Définition. Équation homogène associée. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
- Équation caractéristique associée.
- Ensemble des solutions complexes et réelles de l'équation homogène.
- Structure de l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.
- Principe de superposition.
- Recherche de la solution particulière lorsque le second membre est du type $P(x)e^{mx}$ où $P(x)$ est un polynôme, ou lorsque le second membre est trigonométrique.
- Problème de Cauchy. Unicité et existence de la solution (admis).

Questions de cours possibles [3] :

1. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
2. (★) Les racines n -ièmes de l'unité sont **exactement** de la forme $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
3. Caractérisation complexe de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs.
4. Caractérisation complexe d'un rectangle isocèle.
5. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ a pour écriture complexe : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
6. Équation d'ordre 1 avec second membre : structure de l'ensemble des solutions.
7. (★) Méthode de variation de la constante pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
8. Solutions complexes d'une EDL2 homogène à coefficients constants (énoncé complet et démonstration pour le cas $\Delta \neq 0$)

[3]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Les nombres réels

1. Inégalités

- Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.
- Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
- Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
- Valeur absolue. Inégalité triangulaire. Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq r$
- Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées.
- Majorant, minorant, maximum, minimum.
- Partie entière d'un nombre réel. Notation $[x]$.

2. Propriété de la borne supérieure

- Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Notations $\sup X$, $\inf X$.

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure)

On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.

- Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure)

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a; b] \subset X$.

3. Approximations décimales d'un réel.

- Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
- Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède^[1])
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton^[2] de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

De fait, vous savez presque tout sur les réels - mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ que vous ne connaissez pas, dite *propriété de la borne supérieure* et qui revêt pour les mathématiques du programme de PTSI une importance fondamentale.

[1]. **Archimède de Syracuse**, né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort en cette même ville en 212 av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Bien que peu de détails de sa vie soient connus, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité classique. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vis d'Archimède.

Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie, et a donné un encadrement de π d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Archimède est mort pendant le siège de Syracuse où il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

[2]. **Isaac Newton** (25 décembre 1642 - 20 mars 1727, ou 4 janvier 1643 - 31 mars 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du *calcul infinitésimal*. En optique, il a développé une théorie de la couleur fondée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il a aussi inventé le télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave appelé télescope de Newton.

En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui « mécanique newtonienne » ou encore « mécanique classique ».

Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Newton a montré que les mouvements des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes, il développa la loi universelle de la gravitation.

Son ouvrage *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, publié en 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences. C'est dans celui-ci qu'il décrit la loi universelle de la gravitation, formule les trois lois universelles du mouvement et jette les bases de la mécanique classique. Il a aussi effectué des recherches dans les domaines de la théologie et de l'alchimie.

Ce chapitre vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété, mais nous y introduirons aussi un minimum de vocabulaire topologique. En un mot, la topologie est la théorie très générale de la « proximités » des objets mathématiques les uns par rapport aux autres, mais nous nous contenterons d'y mettre un pied dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

CONTENU

I	Nombres entiers, décimaux, rationnels	736
I.1	Rappels sur les rationnels	736
I.2	L'ensemble des rationnels est insuffisant	737
I.3	L'ensemble des réels	737
II	Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$	739
II.1	Être inférieur à	739
II.2	Borne supérieure, borne inférieure	740
II.3	Fonctions bornées	745
III	Topologie de $\mathbb{R}$	746
III.1	La droite numérique achevée	746
III.2	Intervalles de $\mathbb{R}$	748
III.3	Voisinages	750
IV	Opérateurs réels	753
IV.1	Valeur absolue	753
IV.2	Partie entière	758
V	Notion de densité	763
V.1	Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$	763
V.2	Approximations décimales	764
	Feuille d'exercices n° 13 : Nombres réels	768
	Devoir en temps libre n° 13 : Partie entière	794
	Correction	795
	Programme du chapitre XIII	798

I/ Nombres entiers, décimaux, rationnels

I.1 Rappels sur les rationnels

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \dots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de *fraction irréductible* i.e. sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

L'égalité des produits en croix, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Muni de ces deux lois $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un *corps commutatif*. On vérifie également que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ sont des *groupes commutatifs*.

Exercice 1 : Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b} \text{ pour } (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \text{ distincts deux à deux.}$$

$$B = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Correction :

$$1. \frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b} = \frac{(a^2 + ab + b^2) - (a + b)^2}{a - b} = -\frac{ab}{a - b}.$$

$$2. \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)n^2(n-1)^2}{n(n-1)2(n-1)2(n+1)} = \frac{3n^2}{2}.$$

I.2 L'ensemble des rationnels est insuffisant

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les *irrationnels*, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des *nombres réels* noté $\mathbb{R}$.

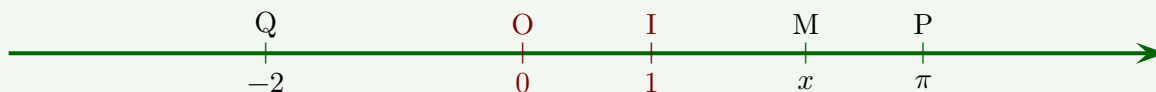
I.3 L'ensemble des réels

L'ensemble des réels est un ensemble plus difficile théoriquement à construire (théorie hors programme de PTSI). Intuitivement certains nombres que vous connaissez comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres qui ne font pas partie des rationnels. On pourrait alors définir $\mathbb{R}$ comme l'union des rationnels et des irrationnels.

En poussant plus loin, on se rendrait compte que tous ces irrationnels peuvent cependant tous être vus comme des limites de suites de rationnels (cf. [corollaire \(13.2\)](#)). L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors, pour le dire vite et de façon peu rigoureuse, l'ensemble des limites des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent.

Enfin, pour un point de vue plus géométrique mais tout aussi peu satisfaisant,

Définition 1 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite orientée est l'ensemble des *nombres réels*.



L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Les abscisses des points de la demi-droite $[OI)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+$.

Un peu d'histoire : En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de 2, π et e .

La notion de nombre réel émerge progressivement de la manipulation des rapports de grandeurs géométriques autres que les rapports d'entiers naturels depuis leur prise en compte par Eudoxe de Cnide au IV^{ème} siècle av. J.-C. Elle s'insère aussi dans l'approximation des solutions de problèmes algébriques et donne même lieu, au milieu du XIX^e siècle, à la mise en évidence de nombres transcendants. Mais la définition des nombres réels n'est formalisée que quelques décennies plus tard avec les constructions de Dedekind d'une part et de Cantor et Méray d'autre part.

L'ensemble des nombres réels, est alors un corps totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il est muni des quatre opérations arithmétiques satisfaisant les mêmes règles que celles sur les fractions et ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre. Mais il satisfait en plus la propriété de la borne supérieure qui fonde l'analyse réelle.

Enfin, cet ensemble est caractérisé par Hilbert comme le plus grand corps archimédien.

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable i.e. il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. (Hors-Programme)

1^{ère} méthode : En considérant que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres ayant un développement décimal illimité, on suppose le contraire et l'existence d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. Comme $[0; 1] \subset \mathbb{R}$, on raisonne plutôt avec ce dernier et on liste tous les éléments $[0; 1]$ dans l'ordre croissant par exemple.

On construit alors un nombre dont la 1^{ère} décimale n'est pas la 1^{ère} décimale du premier nombre, disons que l'on lui ajoute 1, la deuxième n'est pas la deuxième du 2^{ème} nombre, etc...

On aboutit à un nombre qui, par construction, n'apparaît pas dans la liste des éléments de $[0; 1]$ en bijection avec $\mathbb{N}$ et la contradiction.

Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2^{ème} méthode : On suppose encore le contraire et on va montrer que $[0; 1]$ n'est pas dénombrable ce qui suffira.

Si $[0; 1]$ était dénombrable alors on pourrait écrire $[0; 1] = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$.

Or, des 3 segments $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$, il y en a nécessairement un dont X_1 n'est pas élément. Notons le $I_1 = [a_1; b_1]$.

De même, des 3 segments $\left[a_1; a_1 + \frac{1}{9}\right]$, $\left[a_1 + \frac{1}{9}; a_1 + \frac{2}{9}\right]$ et $\left[a_1 + \frac{2}{9}; b_1\right]$ [3], il y en a au moins un dont X_2 n'est pas l'élément. On le note $I_2 = [a_2; b_2]$. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas dans I_2 .

En itérant le procédé, on construit ainsi une suite infinie de segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que :

Pour tout entier naturel n , $X_1, X_2, \dots, X_n$ ne sont pas dans $I_1, I_2, \dots, I_n$ et de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui tend vers 0.

D'après le théorème des intervalles fermés emboîtés (que l'on verra bientôt), il existe un nombre réel x dans $[0; 1]$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{x\}$.

Or, comme $x \in [0; 1] = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$, il existe donc un entier n tel que $x = X_n$.

Mais alors, par construction de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x = X_n$ n'est pas dans I_n , ce qui est absurde.

D'où le résultat.

[3]. $\frac{1}{9} = \frac{1}{3}(b_1 - a_1)$.

II/ Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ _____

II.1 Être inférieur à _____

Définition 2 : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « x est inférieur à y » et on note $x \leq y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}; \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Remarques :

- La relation $\geq$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.
- La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leq y$ et $x \neq y$.

ATTENTION

La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique.

Preuve :

Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$ donc $x \leq x$.

Antisymétrie : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x)$ entraîne $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $-(y - x) \in \mathbb{R}_+$ puis $y - x = 0 \iff x = y$.

Transitivité : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y$ et $y \leq z$ revient à écrire $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $z - y \in \mathbb{R}_+$.

$$\text{D'où } z - x = \underbrace{(z - y)}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{(y - x)}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+ \iff x \leq z.$$

Elle est totale : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x - y$ est positif ou négatif i.e. $x \leq y$ ou $x \geq y$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leq$ avec $+$ et $\times$) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
3. $a \leq b \iff -b \leq -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leq b \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

En particulier,

- $a \leq b \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, a + \lambda \leq b + \lambda$.
- $\forall \lambda > 0, a \leq b \iff \lambda a \leq \lambda b$ et $\forall \lambda < 0, a \leq b \iff \lambda a \geq \lambda b$.

ATTENTION

L'assertion 4 ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Preuve : On reprend l'idée de la démonstration du **théorème (1)**.

1. $b + d - (a + c) = \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{(d - c)}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+ \iff a + c \leq b + d.$
2. Avec $d \geq 0$ par transitivité et $a \geq 0$, on a $bd - ac = (b - a)d + a(d - c) \in \mathbb{R}_+ \iff ac \leq bd.$
3. $-a - (-b) = b - a \in \mathbb{R}_+ \iff -b \leq -a.$
4. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} \in \mathbb{R}_+ \iff \left(\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}\right)$ et (a et b de même signe).

On ne soustrait ni de divise des inégalités !

ATTENTION

$$\begin{cases} 1 \leq 3 \\ 2 \leq 5 \end{cases} \quad \text{mais} \quad 1 - 2 > 3 - 5.$$

On pourra cependant les ajouter membre à membre ou les multiplier si tous les membres sont strictement positifs.

Remarque : Sur $\mathbb{C}$, il existe des relations d'ordre (lexicographique, ...), mais non compatibles avec les opérations.

Par exemple,

- Si $i \geq 0$ alors $i \times i \geq 0 \times i$ d'où $-1 \geq 0$. Absurde !
- Si $i \leq 0$ alors $-i \geq 0$. $(-i) \times (-i) \geq 0 \times (-i)$ d'où $-1 \geq 0$. Absurde aussi !

Exercice 2 : Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Montrer que leur distance est majorée par $\frac{|b-a|^3}{8ab}$.

Correction :

1. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \geq 0$ donc $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$
2. Par symétrie, on peut supposer que $a \leq b$.

$$\text{D'où } \frac{(b-a)^2}{8b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(b-a)^2}{8a}.$$

$$d\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \leq \frac{(b-a)^2}{8a} - \frac{(b-a)^2}{8b} \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{(b-a)^3}{8ab}.$$

II.2 Borne supérieure, borne inférieure

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$.
- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x$.
- A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in A, \forall x \in A, x \leq b$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$.

Exemple 1 : L'intervalle $[0; 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1. $0 \in [0; 1[$ et $\forall x \in [0; 1[, 0 \leq x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0; 1[$.
2. Supposons qu'il existe $M \in [0; 1[$ qui en soit le plus grand élément. Alors $M' = \frac{M+1}{2}$ vérifie, $M < M'$ et $M' \in [0; 1[$ ce qui contredit la « maximalité » de M.



Il n'existe donc pas de plus grand élément dans $[0; 1[$.

L'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée.

Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de celui-ci. Il est donc hors de propos de la démontrer.

Définition 3 (Borne supérieure) : +

- Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$.

On appelle *borne supérieure* de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A.

- Soit B une partie minorée de $\mathbb{R}$.

On appelle *borne inférieure* de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B.

Notons que l'unicité de la borne supérieure (*resp.* inférieure) est une conséquence de l'unicité du plus petit élément (*resp.* plus grand élément) d'un ensemble. On pourra donc parler de LA borne supérieure mais jamais du majorant mais d'UN majorant. La borne supérieure nous apporte l'unicité qu'il nous manquait.

ATTENTION | Les bornes inférieure et supérieure n'ont aucune raison d'exister.

Dans le cas des parties bornées, l'existence découle du théorème suivant qui est une conséquence de la construction de $\mathbb{R}$, une propriété intrinsèque dont nous verrons l'origine plus tard :

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leq 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

- Si $\alpha^2 < 2$, alors il existe un entier n tel que $\alpha + \frac{1}{n} \in A$ car $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{1}{n} \underbrace{\left(2\alpha + \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} < 2$ pour n assez grand, ce qui contredit le fait que α soit une borne supérieure.
- Si $\alpha^2 > 2$, alors il existe un entier n tel que $\alpha - \frac{1}{n}$ reste un majorant de A car $\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{1}{n} \underbrace{\left(2\alpha - \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} > 2$ pour n assez grand, ce qui contredit le fait que α soit la plus petite borne supérieure.
- Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha = \sqrt{2}$, or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, contradiction.

Conclusion, A ne possède pas de borne supérieure.

ATTENTION

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

Réciproquement, si A possède un plus grand élément a , alors $a = \max(A) = \sup(A)$.

Preuve : En effet, soit $a = \max(A)$:

- Pour tout $b \in A$, on a $b \leq a$, donc a est un majorant de A qui est, en particulier, majorée. La borne supérieure est donc correctement définie. Comme c'est le plus petit des majorants, on a :

$$\sup(A) \leq a.$$

- Réciproquement, $\sup(A)$ est aussi un majorant de A donc majore tout élément de A , y compris son plus grand élément donc $a \leq \sup(A)$ et l'égalité.

Exercice 3 : Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{2, 4\}$				
$A =]1 ; 5]$				
$A = \{x \in \mathbb{Q}_+ / x^2 \leq 2\}$				
$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$A = \left\{\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}\right\}$				

Commentaires : La propriété de la borne supérieure est un pur résultat d'EXISTENCE et ne raconte rien d'intéressant sur la VALEUR des bornes supérieures.

Telle borne supérieure existe, c'est magique, mais la propriété n'en dit pas plus.

Pour montrer que $\sup([0, 1]) = 1$, nous n'avons pas eu besoin de la propriété de la borne supérieure car nous avions à l'avance une idée très claire de la valeur de cette borne, mais il arrivera souvent que nous n'ayons aucune idée précise de ce genre.

La propriété de la borne supérieure sera alors notre lueur dans l'obscurité, la petite magie qui fera surgir des êtres de nulle part et nous permettra d'avancer. L'exemple le plus flagrant est la démonstration du théorème de la limite monotone : « tout suite croissante et majorée de réels converge dans $\mathbb{R}$. » Nous verrons cela plus loin.

Un autre exemple est la définition correcte de la racine carrée : « La racine carrée d'un réel positif a est, par définition, l'unique réel positif r pour lequel $r^2 = a$. »

Cette définition est un théorème d'existence et d'unicité avant d'être une définition. L'unicité est claire, car pour tous $r, r' \geq 0$, si $r^2 = r'^2$, alors $r = \pm r'$, donc $r = r'$ par positivité.

Mais l'existence, qui nous la garantit ? Si vous y réfléchissez bien, vous avez accepté l'existence des racines carrées sans même vous en rendre compte alors qu'elle n'a rien d'évident, et elle découle en fait de la propriété de la borne supérieure.

Preuve : Fixons $a \geq 0$. L'ensemble $R = \{r \geq 0 / r^2 \leq a\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

En effet,

— R est non vide car il contient 0.

— R est majoré par $a+1$ car pour tout $r \in R$: $r^2 \leq a \leq a+1 \stackrel{a+1 \geq 1}{\leq} (a+1)^2$, donc $(a+1-r)(a+1+r) \geq 0$ et $a+1-r \geq 0$.

Enfin, $r \leq a+1$.

D'après le **théorème (3)**, l'ensemble R possède une borne supérieure que l'on note dorénavant $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{a} = \sup \{r \geq 0 / r^2 \leq a\}.$$

Ceci est la vraie définition propre de la racine carrée.

Remarque : Si on partait du principe qu'on connaissait les racines carrées, alors évidemment $R = [0; \sqrt{a}]$. Dans notre cas contraire, on aura posé $\sqrt{a} = \sup(R)$.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M = \sup A &\iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall b < M, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4 : Sur le même modèle, écrire une caractérisation de la borne inférieure.

Correction : Soit B une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m = \inf(B) &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall m' \text{ minorant de } B, m' \leq m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall m < b, b \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B, m \leq x \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_\varepsilon \in B \text{ tel que } x_\varepsilon < m + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Corollaire 4.1 (Borne inférieure d'une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$) :

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Preuve : Il suffit en effet d'effectuer une symétrie par rapport à 0 pour échanger les nombres positifs et négatifs, pour transformer une partie majorée en partie minorée et une borne supérieure en borne inférieure.

Plus formellement, soit B une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On considère $A = \{-b, b \in B\}$ qui est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet une borne supérieure S .

Montrons que $-S$ est une borne inférieure de B .

Pour tout élément b de B , $-b \leq S \Leftrightarrow -S \leq b$. $-S$ est donc un minorant de B .

Pour tout ε strictement positif, il existe un $a \in A$ tel que $S - \varepsilon < a \Leftrightarrow -a < -S + \varepsilon$. Comme $-a \in B$, $-S + \varepsilon$ ne minore pas B pour tout $\varepsilon > 0$ i.e. $-S$ est le plus grand des minorants de B .

C'est donc la borne inférieure de B .

Méthode 1 (Utilisation courante de la borne supérieure) :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

1. Pour montrer que $\sup(A) \leq M$, il suffit de montrer : $\forall a \in A, a \leq M$
2. Pour montrer que $\sup(A) \geq M$, il suffit de montrer : $\exists a_0 \in A, a_0 \geq M$;

Preuve :

1. C'est l'utilisation la plus courante de la borne supérieure et souvent désignée sous le nom de *passage à la borne supérieure*.

Il suffit de montrer que M est un majorant de A . Par définition, $\sup(A)$ étant le plus petit, on aura, par définition, je le répète, $\sup(A) \leq M$.

C'est une condition nécessaire et suffisante.

2. C'est simplement de la transitivité de $\leq$ ou encore M n'est pas un majorant de A donc il est plus petit que n'importe lequel des majorants de A . En particulier, $\sup(A)$:

$$M \leq a_0 \leq \sup(A).$$

Attention, c'est simplement une condition suffisante. Par exemple, pour prouver que $\sup([2; 3]) \geq 3$, on ne pourra pas trouver de $a \in [2; 3]$ tel que $a \geq 3$. On raisonnera ici par la contradiction en supposant $\sup([2; 3]) < 3$.

Exemple 2 : L'intervalle $[0; 1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall x \in [0; 1[, x \leq 1$ donc $[0; 1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0; 1[)$ existe d'après le **théorème (3)** et on a :

$$\sup([0; 1[) \leq 1.$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0; 1[$.

On sait déjà que $1 - \varepsilon \in [0; 1[$, de même que $\frac{(1 - \varepsilon) + 1}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0; 1[$.



La réunion des points 1 et 2, montre que 1 est un majorant de $[0; 1[$ et que c'est le plus petit. Le réel 1 est donc la borne supérieure de $[0; 1[$.

Exercice 5 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées telles que $A \subset B$.

Montrer que $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Correction : $\inf(B)$ est un minorant de B donc un minorant de A, par conséquent $\inf(B) \leq \inf(A)$ car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

De même, $\sup(B)$ majore B, donc majore A également, d'où $\sup(A) \leq \sup(B)$ car $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.

II.3 Fonctions bornées

Définition 4 (Fonction bornées) : Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne supérieure* de f sur I, notée $\sup_I(f)$, le réel

$$\sup_I(f) = \sup \{f(x), x \in I\}.$$

- Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne inférieure* de f sur I , notée $\inf_I(f)$, le réel

$$\inf_I(f) = \inf \{f(x), x \in I\}.$$

— Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 6 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f + g$ est majorée et

$$\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g. \quad (\text{XII.1})$$

2. Donner un exemple où l'inégalité (XII.1) est stricte.

3. Démontrer que si f est majorée et g bornée alors $\sup_I(f + g) \geq \sup_I f + \inf_I g$.

Correction :

1. Soit $x \in I$. On a, $f(x) + g(x) \leq \sup_I f + \sup_I g$.

Donc $f + g$ est majorée sur I et on a $\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g$.

2. Il suffit de prendre, par exemple, $f = \cos$ et $g = \sin$ sur $I = \mathbb{R}$.

Alors $\sup_{\mathbb{R}}(f + g) = \sup_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} < 2 = \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$.

3. Pour tout x de I , $f(x) = f(x) + g(x) - g(x)$.

Donc $f(x) \leq \sup_I(f + g) - \inf_I g$ puis $\sup_I f \leq \sup_I(f + g) - \inf_I g$.

Enfin, $\sup_I(f + g) \geq \sup_I f + \inf_I g$.

III/ Topologie de $\mathbb{R}$

III.1 La droite numérique achevée

La propriété de la borne supérieure est un outil puissant mais présente tout de même un gros inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « Toute partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. »

Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ?

Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en ! Donnons-nous pour cela deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ (par exemple i et $-i$) et notons les $+\infty$ et $-\infty$. Peu importe qui ils sont, ce qui compte, ce sont les règles de calcul que nous allons leur imposer. En principe, ces règles devraient vous paraître naturelles.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé *droite numérique achevée*.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leq$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \circ (+\infty) + x &= x + (+\infty) = +\infty. & \circ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty. \\ \circ (-\infty) + x &= x + (-\infty) = -\infty. & \circ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Prolongement de la multiplication :

$$\begin{aligned} \circ \frac{1}{+\infty} &= \frac{1}{-\infty} = 0. \\ \circ \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, & \quad x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ & \quad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque restent indéfinis les opérations :

$$\bullet 0 \times (\pm\infty) \qquad \bullet (-\infty) + (+\infty) \qquad \bullet (-\infty) - (-\infty) \qquad \bullet \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans la section sur les limites.

Remarque : Ainsi définie, la droite réelle achevée n'est qu'une notation commode, qui permet d'éviter de séparer les cas entre un réel et l'infini dans les énoncés.

Par exemple, les intervalles ouverts seront ceux qui s'écrivent $]a; b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il n'est pas trop dur de montrer que les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous calculons dans $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui n'avaient pas de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir.

- L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure alors qu'il n'était pas majoré dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Comme $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\emptyset$ admet $-\infty$ pour borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) ! Plus généralement, la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté :

Proposition 5 :

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$).

En outre, si les bornes supérieure et inférieure existent dans $\mathbb{R}$ alors elles coïncident avec leur homologue dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve : Si A est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est terminé. Sinon, l'ensemble des majorants de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ est réduit à $\{+\infty\}$ i.e. il y a donc bien une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui n'a d'autre choix d'être $+\infty$.

Le raisonnement est identique pour la borne inférieure.

III.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre permet également de définir la notion d'intervalle.

En effet, qu'est-ce donc d'autre qu'un ensemble de valeurs à la fois inférieures et supérieures à deux bornes :

Définition 6 : Soient $(a; b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a; b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x \leq b\}$
- $]a; b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x \leq b\}$
- $[a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x < b\}$
- $]a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x < b\}$

On appelle *intervalle* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in I, x \leq y \implies [x; y] \subset I.$$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Exemples 3 :

— Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *segment* l'ensemble $[a; b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \\ \text{Si } a = b, & [a; a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a; b] = \emptyset \end{cases}$$

— $\emptyset$ et $\{a\}$ sont dits *intervalles triviaux* de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.

— $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.

— $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1; 1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.

— $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. corollaire (13.1)).

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles

$$[a; b], [a; b[,]a; b] \text{ et }]a; b[$$

pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Les intervalles $[a; b]$ et $]a; b[$ avec $(a; b) \in (\mathbb{R})^2$ sont respectivement dits *fermé* et *ouvert*.

Preuve : Commençons par démontrer que les ensembles décrits sont bien des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$. Sans perte de généralités, on ne le démontre que pour $[a; b]$, par exemple.

Soient $x, y \in [a; b]$ tels que $x \leq y$. Montrons que $[x; y] \subset [a; b]$.

Or, $\forall t \in [x; y], a \leq x \leq t \leq y < b$

Donc $t \in [a; b]$ et $[x; y] \subset [a; b]$ qui est bien un intervalle.

Réciproquement, considérons I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ et montrons que I est de l'un des quatre types précédents.

Comme I est un intervalle non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, il possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ que l'on note respectivement b et a .

On distingue plusieurs cas :

Cas où $a \in I$ et $b \in I$: Montrons que $I = [a; b]$.

- Comme I est un intervalle et que $a, b \in I$ alors $[a; b] \subset I$.
- Comme a minore I et b majore I , $\forall x \in I, a \leq x \leq b$ i.e. $I \subset [a; b]$.

Par double inclusion, $I = [a; b]$.

Cas où $a \in I$ et $b \notin I$: Montrons que $I = [a; b[$.

- Soit $x \in [a; b[$. Comme $x < b = \sup(I)$, x ne majore pas I : $\exists b' \in I$ tel que $x \leq b'$ i.e. $a \leq x \leq b'$ avec $a, b' \in I$.
- Comme I est un intervalle alors $x \in I$ et $[a; b[\subset I$.
- Réciproquement, soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I : $a \leq x \leq b$.
- Or, $x \in I$ alors que $b \notin I$.
- Donc $a \leq x < b$ i.e. $x \in [a; b[$ et $I \subset [a; b[$.

Par double inclusion, $I = [a; b[$.

Cas où $a \notin I$ et $b \in I$: On démontre de la même manière que $I =]a; b]$.

Cas où $a \notin I$ et $b \notin I$: On démontre enfin que $I =]a; b[$.

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\emptyset$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a; b]$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a; b[$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a; b[$ et $]a; b]$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} \quad \text{et} \quad]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\},$$

- les demi-droites ouvertes $]a; +\infty[$ ou $]-\infty; a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \quad \text{et} \quad]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\},$$

III.3 Voisinages

Comme on a pu le constater, la distinction souvent nécessaire entre un point fini et les deux infinis amène parfois, comme dans les théorèmes sur les limites, à considérer plusieurs cas.

Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne mais pour des études plus théoriques, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas. C'est là qu'entre en jeu la *topologie*^[4].

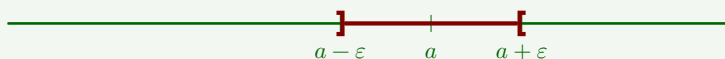
Le concept de voisinage n'est pas au programme de PTSI, mais nous ne le regretterons pas.

Définition 7 (Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle *voisinage* de a (dans $\mathbb{R}$), noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $V \subset \mathbb{R}$ qui contient :

- un intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$:

$$V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset V.$$



- un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ si $a = +\infty$:

$$V \in \mathcal{V}(+\infty) \iff \exists A \in \mathbb{R},]A; +\infty[\subset V.$$



- un intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ si $a = -\infty$:

$$V \in \mathcal{V}(-\infty) \iff \exists A \in \mathbb{R},]-\infty; A[\subset V.$$



Les voisinages peuvent être un tantinet compliqué mais, intuitivement, le point a est non seulement dans A , mais il lui reste un peu de place autour.

Exemples 5 :

- $]0; 1]$ est un voisinage de $0, 2$: prendre $\varepsilon = 0, 1$ par exemple.
- $]0; 1]$ est un voisinage de $0, 98$: prendre $\varepsilon = 0, 01$ par exemple.
- $]0; 1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[$ déborde à droite.
- $]0; 1[$ est voisinage de tous ses points : $\forall a \in]0; 1[$, il suffit de prendre $\varepsilon = \min \{a, 1 - a\}$ (la plus petite des distances de a aux bornes de $]0; 1[$).

D'une manière générale, les voisinages permettent de donner un sens à la notion de localité de certaines propriétés comme la continuité, la dérivabilité, ...

[4]. En mathématiques, le mot *topologie* désigne l'étude des propriétés de continuité des fonctions, de limite des suites, ...

Définition 8 (Propriété vraie dans un voisinage) : Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\mathcal{P}$ est *vraie au voisinage de a* lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall x \in V_a, \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I . On dira, par exemple, que a est un maximum local de f sur I si, et seulement si il existe un voisinage V_a de a tel que f admette un maximum global sur $I \cap V_a$.

Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :

$$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a), V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a).$$

2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :

$$\forall (a; b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a \neq b \implies \exists V_a \in \mathcal{V}(a), \exists V_b \in \mathcal{V}(b) \text{ tels que } V_a \cap V_b = \emptyset.$$

Preuve :

1. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_1 et V_2 deux voisinages de a .

Cas où $a \in \mathbb{R}$: Il existe deux réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ pour lesquels $]a - \varepsilon_1; a + \varepsilon_1[\subset V_1$ et $]a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2[\subset V_2$.

En posant $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, il est clair que $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset V_1 \cap V_2$.

Donc, $V_1 \cap V_2$ est bien un voisinage de a .

Cas où $a = +\infty$: Il existe deux réels A_1, A_2 pour lesquels $]A_1; +\infty[\subset V_1$ et $]A_2; +\infty[\subset V_2$.

En posant $A = \max \{A_1, A_2\}$, il est clair que $]A; +\infty[\subset V_1 \cap V_2$.

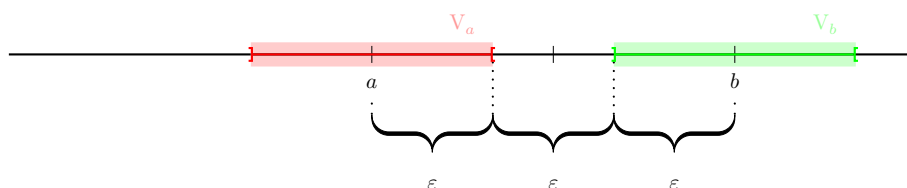
Donc, $V_1 \cap V_2$ est bien un voisinage de a .

Cas où $a = -\infty$: Identique à précédemment.

2. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ deux réels distincts. Sans perte de généralités, on peut supposer $a < b$.

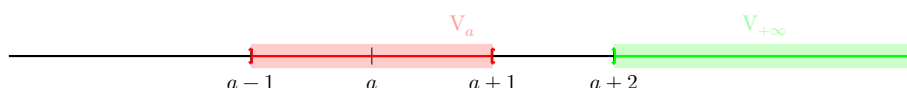
Cas où $a, b \in \mathbb{R}$: Posons $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, puis $V_a =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ et $V_b =]b - \varepsilon; b + \varepsilon[$.

Comme voulu, V_a est un voisinage de a , V_b un voisinage de b et $V_a \cap V_b = \emptyset$.



Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: Il suffit de poser $V_a =]a - 1; a + 1[$ et $V_{+\infty} =]a + 2; +\infty[$.

Comme voulu, V_a est un voisinage de a , $V_{+\infty}$ un voisinage de $+\infty$ et $V_a \cap V_{+\infty} = \emptyset$.



Remarque : Une autre manière de voir l'assertion (2) est d'écrire : Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $a < b$ alors il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que :

$$\forall x \in V_a \text{ et } y \in V_b, x < y.$$

Ce théorème permettra, entre autre, de démontrer l'unicité de la limite d'une suite ou d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Une dernière notion qui nous sera utile par la suite avant de nous arrêter :

Définition 9 (Ouvert) : Soit U une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que U est un *ouvert* si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall a \in U, \left\{ \begin{array}{l} \exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset U. \\ \text{ou} \\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset U. \end{array} \right.$$

Intuitivement, tous les points de U ont un peu de place autour d'eux.

Exemples 6 :

- $\emptyset$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U , il y a alors dans U un intervalle entier $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b; c[$ est ouvert !

$$\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b < a < c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min \left\{ \frac{a-b}{2}, \frac{c-a}{2} \right\} \right).$$

- $\mathbb{R}$ est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier, toute réunion d'intervalles ouverts est ouverte.

Dernière petite remarque complètement hors-programme avant de quitter ce paragraphe. C'est précisément l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ qui s'appelle une *topologie*. Celui-ci devient alors un *espace topologique*.

Doter $\mathbb{R}$ ou un ensemble d'une topologie revient donc à le munir de tous les outils nécessaires à l'étude des limites, de la continuité, de la dérivabilité,... en un mot, tous les outils nécessaires pour faire de l'analyse !

IV/ Opérateurs réels

IV.1 Valeur absolue

La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une *norme* :

Définition 10 (Valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

La *valeur absolue* de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x; -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque : Une partie A est bornée si, et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, |x| \leq M.$$

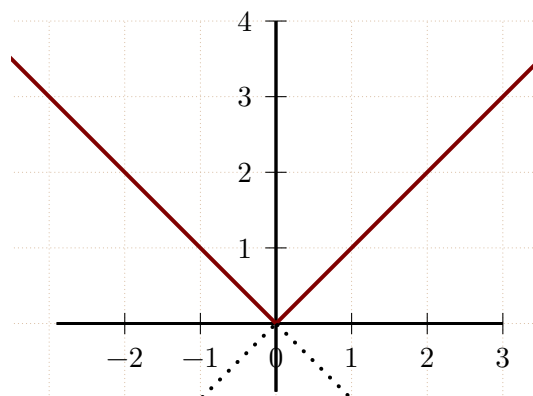


Figure XII.1 - $x \mapsto |x|$.

Méthode 2 (Équation avec la valeur absolue) :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x - a| = r \iff x - a = r \quad \text{ou} \quad x - a = -r.$
2. $|x - a| \leq r \iff -r \leq x - a \leq r \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - a \leq r \\ x - a \geq -r \end{cases}.$
3. $|x - a| \geq r \iff x - a \geq r \quad \text{ou} \quad x - a \leq -r.$

Exemple 7 : Écrire $|x - 3| - |x + 2|$ sans valeurs absolues.

On se ramène à la définition :

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Le mieux est de représenter la situation par un tableau :

x	-2		3	
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$ x - 3 - x + 2 $	5	$1 - 2x$		-5

$$|x - 3| - |x + 2| = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ 1 - 2x & \text{si } x \in [-2, 3[\\ -5 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

Exemple 8 : Résolution de l'équation $|x - 4| = 2x + 10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$|x - 4| = 2x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2x + 10 & \text{si } x \geq 4 \\ \text{ou} \\ 4 - x = 2x + 10 & \text{si } x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -14 & \text{si } x \geq 4 \\ \text{ou} \\ x = -2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Comme $-14 \notin [4, +\infty[$, il ne subsiste qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Exemple 9 : Résolution de l'inéquation $|x - 2| < \frac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

On remarque que l'inéquation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}_-^*$ car $\frac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x - 2| \geq 0$. On restreint donc notre résolution à $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{3}{x} &\Leftrightarrow -\frac{3}{x} < x - 2 < \frac{3}{x} \quad x > 0 \Leftrightarrow -3 < x(x - 2) < 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 - 2x - 3 \\ \text{et} \\ (x + 1)(x - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \Delta = -8 < 0 \\ \text{et} \\ x \in]-1; 3[\cap \mathbb{R}_+^* \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{S} =]0; 3[$.

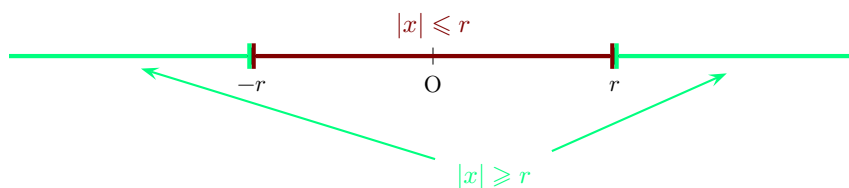


Figure XII.2 - $|x| \leq r$ et $|x| \geq r$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x - 5| = 3.$

2. $|4x - 5| \leq 3.$

3. $|2x - 7| > 1.$

Tout de suite, quelques propriétés évidentes mais importantes à retenir :

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$

La valeur absolue est positive.

2. $|x| = 0 \iff x = 0$

La valeur absolue est définie.

3. $|-x| = |x|$

La valeur absolue est paire.

4. $-|x| \leq x \leq |x|.$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$

La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

En particulier,

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x - y| = |y - x|$.
- Du lien avec la racine carrée, on démontre aussi que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| |y| \quad \text{et} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) :

Pour tous réels x et y , on a :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|. \quad (\text{XII.2})$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

Remarque : Si $x \neq 0$, dire que x et y sont de même signe est équivalent à dire qu'il existe un réel λ positif tel que $x = \lambda y$ puisque $x = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)}_{\geq 0} y$. Si $x = 0$, $\lambda = 0$ convient.

On retrouve ainsi, écrite plus simplement, la même condition d'égalité que pour l'inégalité triangulaire complexe.

Preuve : Soient x et y deux réels. On a :

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

D'après la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Pour la première inégalité, il suffit alors de remarquer que :

- $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x + y|$,
- et $|y| = |x + y - x| \leq |x + y| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x + y|$.

En conclusion, $|x + y|$ est supérieur aux deux nombres $|x| - |y|$ et $-(|x| - |y|)$ donc à leur max i.e.

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Par parité de la valeur absolue et en substituant $-y$ à y , on a aussi $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$. D'où le résultat escompté :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Enfin, il y a égalité si, et seulement si $xy = |x||y| \geq 0$ si, et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 8 : Résoudre l'équation $|x + y| + y = |x - y| - y$.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Les propriétés (1), (2) et (XII.2) font de la valeur absolue une *norme* sur $\mathbb{R}$.

Soit E un ensemble. On dira qu'une application $N : E \mapsto \mathbb{R}_+$ est une norme (sur E) si, et seulement si

Séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$.

Absolue homogénéité : $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire : $\forall (x; y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Ainsi doté, on dit que l'ensemble $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est un *espace normé*.

Un espace normé est, en particulier, un espace topologique puisque la norme permet de redéfinir les ouverts précédents.

Par exemple, $\forall a \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < \varepsilon\}$.

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

ATTENTION | La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

- Pour la continuité, on utilise la relation (XII.2) sous la forme :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

— Pour la dérivabilité, le plus simple est d'écrire :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En 0, la courbe de la valeur absolue admet donc deux demies-tangentes d'équation $y = -x$ et $y = x$. Elle n'y est donc pas dérivable.

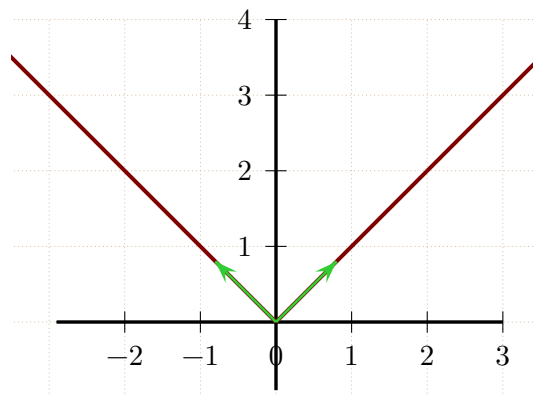


Figure XII.3 – Courbe représentative de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Une autre manière de définir ou de voir $|x|$ est d'écrire $|x| = d(O, M)$ où M est le point de l'axe réel d'abscisse x .

Définition 11 (Distance) : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle *distance* entre x et y , noté $d(x; y)$, le réel $|x - y|$.

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, d(x; y) = |x - y|.$$

Plus généralement, soit E un ensemble. On dira qu'une application $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$ est une distance (sur E) si, et seulement si

$$\text{Symétrie : } \forall (x; y) \in E^2, d(x; y) = d(y; x).$$

$$\text{Séparation : } \forall (x; y) \in E^2, d(x; y) = 0 \iff x = y.$$

$$\text{Inégalité triangulaire : } \forall (x; y; z) \in E^3, d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z).$$

On dira alors que $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique. En particulier, les espaces normés sont des espaces métriques.

De plus et on peut redéfinir les ouverts de $\mathbb{R}$ à partir de la distance :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} / d(x; a) < \varepsilon\}.$$

Un espace métrique est donc aussi un espace topologique.

ATTENTION

Si tous les espaces normés peuvent être munis d'une distance en posant $d(x; y) = |x - y|$, toutes les distances ne dérivent pas d'une norme *i.e.* tous les espaces métriques ne sont pas des espaces normés.

Exercice 9 : Compléter le tableau suivant (NB : $\varepsilon > 0$) :

Valeur absolue	Distance	Inégalités	Intervalle(s)
$ x - 2 \leq 3$			
	$d(x, -1) \geq 5$		
		$1 \leq x \leq 2$	
			$] - 5, 9[$
		$10 < x < 11$	
$ x + 1 \leq -1$			
	$d(x, a) \leq \varepsilon$		

IV.2 Partie entière

Théorème 11 ($\mathbb{R}$ est archimédien) :
L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad y < nx$.

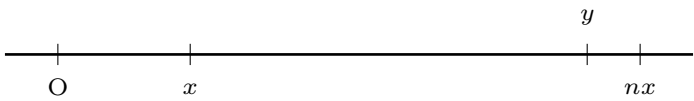


Figure XII.4 – $\mathbb{R}$ est archimédien.

Preuve : Si $y < x$, il suffit de prendre $n = 1$.
Considérons alors le cas $x \leq y$ et supposons le contraire de notre propriété i.e.
$$\forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y.$$

On considère alors $A = \{nx / n \in \mathbb{N}\}$.
— A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car elle contient $1x = x$.
— D'après notre hypothèse, elle est aussi majorée par y .
D'après le **théorème (3)**, A admet donc une borne supérieure $a = \sup(A)$.
Comme $a - x < a$, alors, par définition de a , $a - x$ n'est pas un majorant de A i.e. il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a - x < n_0x \iff a < (n_0 + 1)x$.
Comme $(n_0 + 1)x \in A$, ceci contredit la définition de a .
La partie A ne peut être majorée donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $y < nx$.

Corollaire 11.1 :
Pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < x^n$.

Preuve : Si $y \leq 0$, le résultat est immédiat avec $n = 0$ ou $n = 1$.

Supposons $y > 0$. Alors $y' = \ln(y) \in \mathbb{R}$ et $x' = \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la propriété d'Archimède précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$y' < nx' \iff \ln(y) < n \ln(x) = \ln(x^n).$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $y < x^n$.

Définition/Théorème 12 (Partie entière) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leq x < p + 1. \quad (\text{XII.3})$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, est appelé *partie entière* de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

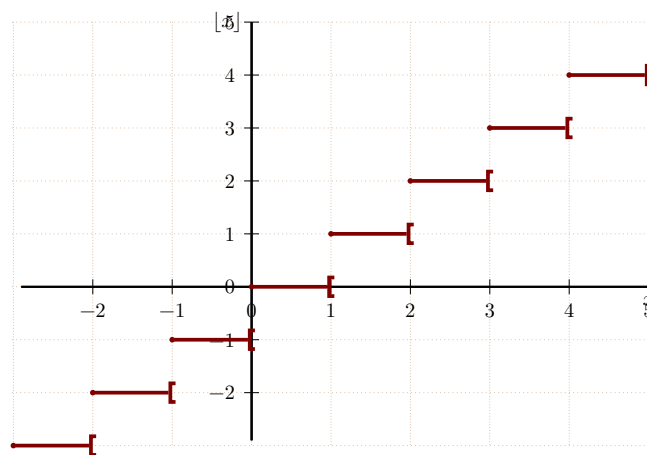


Figure XII.5 - $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Notamment, $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Preuve :

Existence : Si $x = 0$ il suffit de prendre $p = 0$.

Sinon, posons $A = \{n \in \mathbb{Z} / x < n + 1\}$.

A est non vide. En effet,

- Si $x < 0$ alors $0 \in A$.
- Si $x > 0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe au moins un entier n tel que $x < n \times 1 = n < n + 1$ i.e. A possède au moins un élément.

Dans tous les cas, A est donc non vide.

De plus, A est minoré par $x - 1$ donc A possède une borne inférieure $c = \inf(A)$. Montrons que $c \in A$ i.e. $c = \min(A) \in \mathbb{Z}$.

Par définition de c , le réel $c + \frac{1}{2}$ ne minore pas A donc il existe un entier $p \in A$ tel que $c \leq p < c + \frac{1}{2}$.

Si $c \neq p$, alors p ne minore pas A i.e. il existe $n_1 \in A$ tel que $c \leq n_1 < p < c + \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde car p et n_1 sont deux entiers distincts dans un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $p = c = \inf(A) \in A$. Donc $c = \min(A)$. En particulier, $c \in \mathbb{Z}$.

De plus, $c - 1 < c$ donc $c - 1 \notin A \iff x \geq (c - 1) + 1 = c$.

En conclusion, $c \leq x < c + 1$.

Unicité : On suppose le contraire et deux entiers p_1 et p_2 tels que :

$$p_1 \leq x < p_1 + 1 \quad (\text{XII.4})$$

$$p_2 \leq x < p_2 + 1 \iff -p_2 - 1 < -x \leq -p_2 \quad (\text{XII.5})$$

En sommant (XII.4) et (XII.5), on obtient :

$$p_1 - p_2 - 1 < 0 < p_1 - p_2 + 1 \iff |p_1 - p_2| < 1. \quad (\text{XII.6})$$

Les deux entiers p_1 et p_2 dont la distance mutuelle est strictement inférieure à 1 sont donc égaux i.e. $p_1 = p_2$ et l'unicité.

Exemples 10 : $[5] = 5$, $[-2] = -2$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$, $[e] = 2$, $[-e] = -3$.

ATTENTION | $[-7, 3] = -8$ et non -7 .

Exemple 11 : Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $n \in \mathbb{Z}$, a-t-on $x - nT \in [0; T[$?

$$x - nT \in [0; T[\iff 0 \leq x - nT < T \iff n \leq \frac{x}{T} < n + 1.$$

Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ convient.

À retenir, donc : $x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0; T[$.

Exemples 12 : Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

— À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{n} < \varepsilon$?

Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$.

— À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$?

C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$.

— À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$?

C'est vrai si et seulement si $2^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max \left\{ 0, \left\lfloor -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1 \right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

De la démonstration, on obtient une caractérisation très importante de la partie entière :

Corollaire 11.2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \leq x \implies k \leq \lfloor x \rfloor.$$

Méthode 3 (Utilisation de la partie entière) :

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $k \leq \lfloor x \rfloor$, il suffit de montrer que $k \leq x$.

En effet, si $k \leq x$ alors k est un entier inférieur à x . Il est donc plus petit que le plus grand entier inférieur à x soit $k \leq \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

À-t-on $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1. — Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
— La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
2. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est :
— croissante sur $\mathbb{R}$,
— constante sur tout intervalle de la forme $[n; n + 1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
— continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
— continue à droite mais discontinue à gauche en tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

1. Montrons l'assertion (1) :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.— $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor + k \leq x + k$. $\lfloor x \rfloor + k$ étant un entier inférieur à $x + k$, et $\lfloor x + k \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a :

$$\lfloor x \rfloor + k \leq \lfloor x + k \rfloor. \quad (\text{XII.7})$$

— $\lfloor x + k \rfloor \leq x + k$ donc $\lfloor x + k \rfloor - k \leq x$. $\lfloor x + k \rfloor - k$ étant un entier inférieur à x , et $\lfloor x \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a :

$$\begin{aligned} \lfloor x + k \rfloor - k &\leq \lfloor x \rfloor \\ \lfloor x + k \rfloor &\leq \lfloor x \rfloor + k \end{aligned} \quad (\text{XII.8})$$

De (XII.7) et (XII.8), on obtient finalement le résultat :

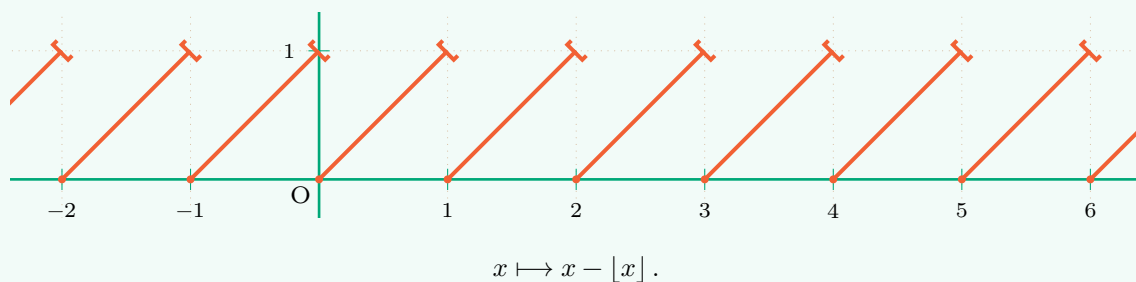
$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

2. Le raisonnement est identique pour montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$:Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.Alors, $\lfloor x \rfloor \leq x < y$. $\lfloor x \rfloor$ est donc un entier inférieur à y . Il est inférieur au plus grand d'entre eux soit $\lfloor y \rfloor$ et on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Toutes les autres propriétés découlent de ces deux propriétés.

Exercice 11 : Représenter la fonction $d : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.**Correction :** La fonction d est 1-périodique et, $\forall x \in [0; 1[, d(x) = x$.On en déduit la courbe sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteur $k\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

V/ Notion de densité

V.1 Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a; b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre un peu à la manière d'une fermeture-éclair mais partout et aussi près les uns des autres que l'on veut.

Visualisez bien le paradoxe : $\mathbb{Q}$ est grand dans $\mathbb{R}$ mais son complémentaire aussi. Contre-intuitif s'il en est !

Preuve : Nous devons montrer que $]a; b[$ contient un rationnel et un irrationnel.

Soient x et y deux éléments de $]a; b[$.

1. Si l'un d'eux est rationnel et l'autre irrationnel, il n'y a rien à montrer
2. S'ils sont tous deux rationnels tels que $x < y$, il suffit d'exhiber un irrationnel entre eux :

$$\text{Posons } z = x + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x).$$

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, il est clair que $z \in]x; y[$.

De plus, z ne peut être rationnel car sinon on aurait $\sqrt{2} = \frac{2(z - x)}{y - x} \in \mathbb{Q}$.

3. S'ils sont tous deux irrationnels tels que $x < y$, il suffit de trouver un rationnel entre eux :

Remarquons que si l'on veut être sûr de trouver un rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ à l'intérieur de $]x; y[$, il est naturel de chercher un entier q tel que la distance $y - x$ soit supérieure à $\frac{1}{q}$ ^[5] i.e.

$$0 < \frac{1}{q} < y - x \iff \frac{1}{y - x} < q.$$

On pose donc $q = \left\lfloor \frac{1}{y - x} \right\rfloor + 1$.

En particulier, $0 < \frac{1}{q} < y - x \iff 1 < q(y - x)$.

Avec $q > 0$, chercher maintenant p tel que $x < \frac{p}{q} < y$ revient à chercher $qx < p < qy$.

On pose alors $p = [qx] + 1 \in \mathbb{Z}$ pour avoir successivement :

$$\begin{aligned} qx < p &= [qx] + 1 \leq qx + 1 \\ qx < p &< qx + q(y - x) \\ qx < p &< qy. \end{aligned}$$

D'où $x < \frac{p}{q} < y$.

Comme $z = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, il répond bien à la question.

Corollaire 13.1 :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,$

— $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.

— $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est *adhérent* à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu partout sans être forcément tout.

Preuve : Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Il suffit d'appliquer le **théorème (13)**.

Corollaire 13.2 :

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Preuve : Soit x un nombre réel.

Si $x \in \mathbb{Q}$, il suffit de prendre la suite de rationnels constante à x .

Sinon, d'après le **théorème (13)**, pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $]x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}[$ contient un rationnel y_n et un irrationnel z_n .

On construit ainsi deux suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ayant pour limite x . L'une de rationnels, l'autre d'irrationnels.

Exemples 13 (Parties denses dans $\mathbb{R}$) :

- L'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ (cf. corollaire (13.3)).
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

V.2 Approximations décimales

Définition/Théorème 13 (Approximation décimale d'un réel) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par défaut* de x à la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leq x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x à la précision 10^{-n} .

Remarque : $p_0 = \lfloor x \rfloor$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \iff \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Exemple 14 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

— $1^2 \leq x^2 < 2^2$ donc $1 \leq x < 2$ à 10^0 près et

$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \text{ (partie entière de } x \text{)}.$$

— $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leq (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leq x < 1,5$ à 10^{-1} près et

$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

— $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leq (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leq x < 1,42$ à 10^{-2} près et

$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$

— ...

On construit ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des approximations décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près.

Exemple 15 : $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Corollaire 13.3 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la suite $\left(p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ des approximations décimales par défaut de x .

Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{D}$ et on a :

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \iff 0 \leq x - p_n < \frac{1}{10^n}.$$

Comme, $\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = 0$, d'après la théorème d'encadrement la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

En particulier, pour $n > \left\lceil \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil + 1$, $|x - p_n| < \varepsilon$: $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Contre-Exemple 16 :

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 14 (Décimale) : Soient $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Pour tout entier naturel n non nul, le nombre $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$ est un entier compris entre 0 et 9 appelé $n^{\text{ème}}$ décimale de x .

Preuve : On a :

$$10^n p_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n p_n + 1. \quad (\text{XII.9})$$

Et de l'encadrement

$$10^{n-1} p_{n-1} = \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leq 10^{n-1} x < 1 + \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = 1 + 10^{n-1} p_{n-1}$$

en multipliant par 10 on a aussi :

$$10^n p_{n-1} \leq 10^n x < 10 + 10^n p_{n-1}.$$

En multipliant par (-1) ,

$$\begin{aligned} -10^n p_{n-1} - 10 &< -10^n x \leq -10^n p_n \\ (\text{XII.9}) + (\text{XII.10}) \quad 10^n(p_n - p_{n-1}) - 10 &< 0 < 10^n(p_n - p_{n-1}) + 1 \end{aligned} \quad (\text{XII.10})$$

On en déduit,

$$d_n - 10 < 0 < d_n + 1.$$

Par conséquent, d_n est un entier vérifiant $-1 < d_n < 10$ i.e. $0 \leq d_n \leq 9$.

Remarque : $p_n - p_{n-1} = d_n 10^{-n}$, ce qui entraîne, par télescopage, que :

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 + \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} \\ &= p_0, d_1 d_2 \dots d_n. \end{aligned}$$

Comme la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , on écrit alors :

$$x = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = p_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Figure XII.6 – Développement décimal infini du réel x .

En conclusion :

À retenir 1 (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leq$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$d(x; y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

En particulier, tout réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels ou de décimaux.

Nombres réels

I/ Calculs dans $\mathbb{R}$ _____

Exercice 1 (Enfantin) : Simplifier (factoriser) les expressions suivantes. On prendra bien garde à justifier l'existence de celles-ci et quelles valeurs donner $a \in \mathbb{R}$ pour leur bonne définition.

$$A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{12} + \sqrt{18}}.$$

$$E = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}.$$

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}\sqrt{2}.$$

$$F = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$$

$$C = \sqrt{(a+1)^2 - 4a} + \sqrt{(a-1)^2 + 4a}.$$

$$G = (\sqrt{3} + 1)\sqrt[3]{9 - 5\sqrt{3}} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{9 + 5\sqrt{3}}.$$

$$D = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}.$$

Correction :

$$A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{12} + \sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{-6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$B = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}_{>0}}\sqrt{2} = \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}$$

$$= 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2\sqrt{4 - 3} = 2.$$

$$C = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a+1)^2} = \begin{cases} 2a & \text{si } a \in [1; +\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [-1; 1] \\ -2a & \text{si } a \in]-\infty; -1]. \end{cases}$$

$$D = \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a}-1}_{a \in \mathbb{R}_+}\right)^2} + \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a}+1}_{a \in \mathbb{R}_+}\right)^2} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in [0; 1] \\ 2\sqrt{a} & \text{si } a \in [1; +\infty[. \end{cases}$$

$$E = \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a-1}+1}_{a \geq 1}\right)^2} + \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a-1}-1}_{a \geq 1}\right)^2} = \begin{cases} 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in [2; +\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$F = \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{5}-2}_{\geq 0}\right)^2} + \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{5}+2}_{\geq 0}\right)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$G = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3(9-5\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3(9+5\sqrt{3})} = \sqrt[3]{4\sqrt{3}} - \sqrt[3]{4\sqrt{3}} = 0.$$

Les trois clés d'une bonne résolution :

1. Le domaine de définition
2. On compare à 0
3. On factorise
- (4.) Accessoirement, on vérifie ses solutions.

Exercice 2 : Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$.	8. $x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0$.
2. $(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1)$.	9. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
3. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.	10. $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$
4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$	11. $4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0$.
5. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$.	12. $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.	13. $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
7. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.	

Correction :

1. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right\}$.

2. Développer c'est mal sauf quand on ne sait rien faire d'autre :

$$(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1) \iff 4x^2 + x - 6 = 3x^2 - 6x - 8 \iff x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$.

3. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 2(x-1) \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \right) = 2(x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right) (x+2) = (x-1)(2x-1)(x+2)$.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ -2, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = (x+1)(x-2) \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta < 0}$. Donc, $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

5. $6x^4 - x^2 - 1 = (2x^2 - 1) \underbrace{(3x^2 + 1)}_{\Delta < 0} = (3x^2 + 1)(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$. Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6$ est un exemple de polynômes symétriques. Ceux-ci se factorisent en posant $X = x + \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ après avoir vérifié que 0 n'était pas solution et en remarquant que $X^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 &= x^2 \left(6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 (6X^2 - 12 - 13X + 12) = x^2 (6X^2 - 13X) \\ &= xX(6X - 13x) \quad (\text{On revient à } x) \\ &= (x^2 + 1)(6x^2 + 6 - 13x) \\ &= (x^2 + 1)(2x - 3)(3x - 2). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right\}$.

7. De même,

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 3x + 4 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= x^2 (X^2 - 2 + 3X + 4) = x^2 (X^2 + 3X + 2) \\
 &= x (X + 1) x (X + 2) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1) \quad (\text{On revient à } x) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{-1\}$.

8. À peine camouflé :

$$x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = (x^3 + \sqrt{2})(x^3 - \sqrt{3})$$

En reconnaissant $a^3 \pm b^3$, on factorise les deux facteurs.

$$\begin{aligned}
 &= (x + \sqrt[6]{2})(x^2 - x\sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[6]{3})(x^2 + x\sqrt[6]{3} + \sqrt[3]{3}) \\
 &= (x + \sqrt[6]{2}) \underbrace{(x^2 - x\sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2})}_{\Delta = -3\sqrt[3]{2} < 0} (x - \sqrt[6]{3}) \underbrace{(x^2 + x\sqrt[6]{3} + \sqrt[3]{3})}_{\Delta < 0}
 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{3}\}$.

9. $e^{2x} - 5e^x + 6 = (e^x - 2)(e^x - 3)$. Donc, $\mathcal{S} = \{\ln(2), \ln(3)\}$.

10. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln^2(x) - \ln(x) - 2 = (\ln(x) - 2)(\ln(x) + 1)$. Donc, $\mathcal{S} = \left\{e^2, \frac{1}{e}\right\}$.

11. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = (2\ln(x) + 1)(2\ln(x) + 3)$. Donc, $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right\}$.

12. $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$. Une somme d'exponentielle nulle ???

13. $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = (e^x - 1)(e^x - 3)(e^x + 2)$

Donc, $\mathcal{S} = \{0, \ln(3)\}$.

Exercice 3 : Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 \leq 10$.

2. $x^2 \geq 2$.

3. $2 < (2x - 3)^2 \leq \frac{25}{4}$

4. $(3x + 1)^2 \leq 2(3x + 1)(x + 1)$

5. $x^4 + x^2 - 1 \geq 0$

6. $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$

7. $e^{2x} - 2e^x - 8 > 0$

8. $e^{2x} + 6e^x + 8 \leq 0$

9. $x \geq \frac{1}{x}$

10. $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+2}{x+3}$

11. $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x+1}$

12. $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$

13. $\frac{2x-3}{x-2} - \frac{4x-1}{3x^2-2x-8} < \frac{65}{32}$

14. $\sqrt{3x^2-11x+21} < 2x-3$

15. $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geq 1$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geq \frac{3}{2}$

17. $x \leq 1 + \sqrt{x^2-2}$

18. $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2-x+3} = 6$

19. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

20. $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

21. $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$

Correction : **ATTENTION** aux domaines de définition !

1. $\mathcal{S} = [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$.

2. $\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$.

3. Comme $2 < u^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow u \in \left[-\frac{5}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \frac{5}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} 2 < (2x-3)^2 \leq \frac{25}{4} &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq 2x-3 < -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} < 2x-3 \leq \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{3-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3+\sqrt{2}}{2} < x \leq \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{4}; \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{2}}{2}; \frac{11}{4}\right]$.

4. $(3x+1)^2 \leq 2(3x+1)(x+1) \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) \leq 0$. Donc, $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

$$\begin{aligned} 5. \quad x^4 + x^2 - 1 &= \left(x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x^2 - \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}\right) \\ &= \left(x - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}; +\infty\right[$.

6. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$. Donc, $\mathcal{S} =]-\infty; 1[$.

7. $e^{2x} - 2e^x - 8 = (e^x - 4)(e^x + 2)$. Donc, $\mathcal{S} =]2\ln(2); +\infty[$.

8. Donc, $\mathcal{S} = \emptyset$.

9. $\mathcal{S} = [-1; 0[\cup]1; +\infty[$.

10. Pour $x \neq -1, -3$, $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{-2}{(x+1)(x+3)} \geq 0$. $\mathcal{S} =]-3; -1[$.

11. Pour ne pas faire de bêtises, le mieux est de factoriser et de résoudre, pour $x \neq 0, -1$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \leq 0.$$

$\mathcal{S} =]-1; 0[$.

12. Pour $x \neq \pm 1$, $\frac{x+5}{x^2-1} - 1 = \frac{-(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$. Un tableau de signes permet de conclure :

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$	
$-(x+2)(x-3)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$-\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Donc, $\mathcal{S} = [-2; -1[\cup]1; 3]$.

13. Comme $3x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(3x + 4)$, on ne résout l'inéquation que pour $x \neq 2, -\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-2} - \frac{4x-1}{(x-2)(3x+4)} &< \frac{65}{32} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-2} - \frac{4x-1}{(x-2)(3x+4)} - \frac{65}{32} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{32(2x-3)(3x+4) - 32(4x-1) - 65(x-2)(3x+4)}{(x-2)(3x+4)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 - 30x + 168}{(x-2)(3x+4)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3(x-4)(x+14)}{(x-2)(3x+4)} < 0 \end{aligned}$$

On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	-14	$-\frac{4}{3}$	2	4	$+\infty$	
$-3(x-4)(x+14)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-2)(3x+4)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$-\frac{3(x-4)(x+14)}{(x-2)(3x+4)}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Donc, $\mathcal{S} =]-\infty; -14[\cup]-\frac{4}{3}; 2[\cup]4; +\infty[$.

14. Comme $3x^2 - 11x + 21$ ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est correctement définie. Les deux membres étant positifs, cela impose $x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$. On compare leur carré sous cette condition :

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 11x + 21} < 2x - 3 &\Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 21 < 4x^2 - 12x + 9 \\ &\Leftrightarrow 0 < x^2 - x - 12 \\ &\Leftrightarrow 0 < (x+3)(x-4). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = (]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[) \cap]\frac{3}{2}; +\infty[=]4; +\infty[$.

15. Pour $x \in [0; 2]$, $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2-x} \leq \sqrt{x} - 1$

$$\Leftrightarrow 2 - x \leq x + 1 - 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x - 2\sqrt{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \left(\sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right).$$

Avec $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \in [0; 2]$, on obtient $\mathcal{S} = \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}; 2 \right]$.

16. Pour $x \in [0; 2]$, $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2-x} \leq -\left(\frac{3}{2} - \sqrt{x} \right) < 0$ car $x \leq 2$.

$$\Leftrightarrow 2 - x \geq \frac{9}{4} + x - 3\sqrt{x} \quad (\text{par décroissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_-)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 2x - 3\sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 2 \left(\sqrt{x} - \frac{3+\sqrt{7}}{4} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{3-\sqrt{7}}{4} \right).$$

Avec $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4} \right)^2 = \frac{8+3\sqrt{7}}{8} \in [0; 2]$, on obtient $\mathcal{S} = \left[\frac{8-3\sqrt{7}}{8}; \frac{8+3\sqrt{7}}{8} \right]$.

17. Pour $x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$, il est clair que parmi ces éléments tous ceux de $] -\infty; 1]$ sont solutions.

Pour $x \geq \sqrt{2} (> 1)$, $x - 1 \geq 0$ et par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x \leq 1 + \sqrt{x^2 - 2} \iff x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 2 \iff -2x + 1 \leq -2 \iff (\sqrt{2} <) \frac{3}{2} \leq x.$$

Donc, $\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$.

18. Pour ce genre d'équation où il peut être fastidieux de trouver d'abord les domaines de définition puis résoudre, on peut raisonner par analyse-synthèse *i.e.* résoudre sans se poser de questions en supposant l'existence de solutions puis, durant la synthèse, vérifier que ces dernières sont admissibles ou non.

Supposons donc l'existence de telles solutions. Alors nécessairement :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x - 4 \sqrt{\underbrace{x^2 - x + 3}_{>0 \text{ car } \Delta < 0}} &= 6 \iff (3x^2 - 3x - 6)^2 = 16(x^2 - x + 3) \\ &\iff 9x^4 - 18x^3 - 43x^2 + 52x - 12 = 0 \\ &\iff 3(x+2)(x-3) \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) = 0^{[6]} \\ &\iff (x+2)(x-3)(3x-1)(3x-2) = 0 \end{aligned}$$

On a donc 4 solutions potentielles qui doivent rendre positif le trinôme $x^2 - x + 3$. Ici, le discriminant étant négatif, elles conviennent toutes.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3\right\}$.

19. On ne raisonne que pour $x \in]-\infty; 3] \cap [-1; +\infty[= [-1; 3]$. Pour de tels x , on a :

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \iff \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} > 0$$

Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} &\iff \underbrace{3-x}_{\geq 0} > \frac{1}{4} + \underbrace{x+1}_{\geq 0} + \sqrt{x+1} \\ &\iff -2x + \frac{7}{4} > \sqrt{x+1} > 0 \\ &\iff 4x^2 - 7x + \frac{49}{16} > x + 1 \\ &\iff 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \iff x^2 - 2x + \frac{33}{64} > 0 \\ &\iff \left(x - \frac{2 - \frac{\sqrt{31}}{4}}{2}\right) \left(x - \frac{2 + \frac{\sqrt{31}}{4}}{2}\right) > 0 \\ &\iff \left(x - \frac{8 - \sqrt{31}}{8}\right) \left(x - \frac{8 + \sqrt{31}}{8}\right) > 0 \\ &\quad \quad \quad \in [-1; 3] \quad \quad \quad \in [-1; 3] \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left[-1; \frac{8 - \sqrt{31}}{8} \right[\cup \left[\frac{8 + \sqrt{31}}{8}; 3 \right]$.

20. D'abord les domaines de définition :

$$x \in \mathcal{D} = (]-\infty; -2[\cup [-1; +\infty[) \cap (]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[) =]-\infty; -2[\cup [-1; 1[\cup [2; +\infty[.$$

Pour ceux-ci, les deux membres étant positifs :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} &\leq \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \iff \frac{x+1}{x+2} \leq \frac{x-2}{x-1} \\ &\iff \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \\ &\iff \frac{3}{(x+2)(x-1)} \leq 0.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} =]-2; 1[\cap \mathcal{D} = [-1; 1[$.

21. Encore et toujours le domaine de définition. Après calculs, on trouve $\mathcal{D} = \left[-5; \frac{4}{3}\right]$.

Les expressions sous les racines étant positives, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned}\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x} &\iff 9-2x+2\sqrt{(6-x)(3-x)} = -2x+9+2\sqrt{(x+5)(4-3x)} \\ &\iff \sqrt{(6-x)(3-x)} = \sqrt{(x+5)(4-3x)} \quad (\text{Oui! c'est fait exprès}) \\ &\iff (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x) \\ &\iff 4x^2+2x-2=0 \\ &\iff (2x-1)(x+1)=0.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \cap \mathcal{D} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 4 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$ et $|y+1| \leq \frac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\frac{x}{y} + \frac{5}{6}\right| \leq \frac{2}{3}$.

Correction : Exercice trivial dont la difficulté n'est que votre capacité à manier correctement les inégalités :

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4} &\iff -\frac{1}{4} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \\ &\iff 0 < \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \quad (\text{XII.1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|y+1| \leq \frac{1}{2} &\iff -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2} \\ &\iff 0 < \frac{2}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq 2 \quad (\text{XII.2})\end{aligned}$$

On peut multiplier (XII.1) et (XII.2) car toutes deux positives,

$$\begin{aligned}&\iff \frac{1}{6} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{3}{2} \\ &\iff -\frac{4}{6} \leq -\frac{x}{y} - \frac{5}{6} \leq \frac{4}{6} \\ &\iff \left|\frac{x}{y} + \frac{5}{6}\right| \leq \frac{2}{3}. \quad (\text{XII.3})\end{aligned}$$

Exercice 5 : Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions

1. $|x + 3| = 5$
2. $|x + 3| \leq 5$
3. $|x^2 - 6x + 4| < 1$
4. $|x^2 + x - 3| = |x|$
5. $|x + 3| \leq |x^2 - 3|$
6. $|2x - 4| \leq |x + 2|$
7. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$
8. $|x + 2| + |2x - 1| + |x - 3| \leq 8$
9. $4x^2 - 7|x| + 3 = 0$
10. $x + |x| = \frac{2}{x}$
11. $\frac{x}{x+1} \leq |2x + 1| + 1$
12. $\sqrt{|x^2 - 4|} \leq |x - 1|$

Correction : On se rappellera que, d'une manière générale, une équation ou inéquation avec des valeurs absolues se ramène à deux équations ou inéquations.

1. $|x + 3| = 5 \iff x + 3 = 5 \quad \text{ou} \quad x + 3 = -5$. Donc $\mathcal{S} = \{-8, 2\}$.
2. $|x + 3| \leq 5 \iff -5 \leq x + 3 \leq 5$. Donc $\mathcal{S} = [-8; 2]$.
3. $|x^2 - 6x + 4| < 1 \iff -1 < x^2 - 6x + 4 < 1 \iff 0 < x^2 - 6x + 5 \quad \text{et} \quad x^2 - 6x + 3 < 0$.

Comme $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$ et $x^2 - 6x + 3 = (x - 3 - \sqrt{6})(x - 3 + \sqrt{6})$, on obtient :

$$\mathcal{S} = \left(]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[\right) \cup \underbrace{\left] \frac{3 - \sqrt{6}}{1}; \frac{3 + \sqrt{6}}{5} \right[}_{< 1} \cup \underbrace{\left] \frac{3 + \sqrt{6}}{5}; \frac{3 - \sqrt{6}}{1} \right[}_{> 5} =]3 - \sqrt{6}; 1[\cup]5; 3 + \sqrt{6}[.$$

4. En supprimant les équations surnuméraires, on a :

$$|x^2 + x - 3| = |x| \iff x^2 + x - 3 = x \quad \text{ou} \quad x^2 + x - 3 = -x.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{\pm\sqrt{3}, -3, 1\}.$$

5. Après avoir vérifié que $x = 3$ était solution, pour $x \neq 3$, on a :

$$|x + 3| \leq |x^2 - 3| \iff 1 \leq |x - 3| \iff 1 \leq x - 3 \quad \text{ou} \quad x - 3 \leq -1 \iff 4 \leq x \quad \text{ou} \quad x \leq 2.$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[.$$

6. $|2x - 4| \leq |x + 2| \iff -|x + 2| \leq 2x - 4 \leq |x + 2|$
 $\iff -2x + 4 \leq |x + 2| \quad \text{et} \quad 2x - 4 \leq |x + 2|$
 $\iff \left(-2x + 4 \leq x + 2 \quad \text{ou} \quad x + 2 \leq 2x - 4 \right)$
 $\quad \text{et} \quad \left(2x - 4 \leq x + 2 \quad \text{ou} \quad x + 2 \leq -2x + 4 \right)$
 $\iff \left(\frac{2}{3} \leq x \quad \text{ou} \quad 6 \leq x \right) \quad \text{et} \quad \left(x \leq 6 \quad \text{ou} \quad x \leq \frac{2}{3} \right)$
 $\iff \frac{2}{3} \leq x \quad \text{et} \quad x \leq 6.$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}; 6 \right].$$

Il peut être difficile de ne pas faire d'erreurs en manipulant des inégalités et des conditions logiques. Ici aussi, un tableau assimilé à un tableau de signes peut s'avérer très efficace et c'est la méthode que je vous conseille :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$ 2x - 4 $	$4 - 2x$	$4 - 2x$	0	$2x - 4$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x - 4 \leq x + 2 $	$4 - 2x \leq -x - 2$ $6 \leq x$	$4 - 2x \leq x + 2$ $\frac{2}{3} \leq x$	$2x - 4 \leq x + 2$ $x \leq 6$	
$\mathcal{S}$	$\emptyset$	$\left[\frac{2}{3}; 2\right]$	$[2; 6]$	

Donc, $\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}; 6\right]$.

7. Restons avec notre tableau :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$ 3x - 1 $	$1 - 3x$	$1 - 3x$	0	$3x - 1$
$ x + 2 + 3x - 1 = 4$	$-4x - 1 = 4$ $x = -\frac{4}{5}$	$-2x + 3 = 4$ $x = -\frac{1}{2}$	$4x + 1 = 4$ $x = \frac{3}{4}$	
$\mathcal{S}$	$\emptyset$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

8. Pareil avec une ligne supplémentaire :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ 2x - 1 $	$1 - 2x$	$1 - 2x$	0	$2x - 1$	$2x - 1$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
$ x + 2 + 2x - 1 + x - 3 \leq 8$	$-4x + 2 \leq 8$ $-\frac{3}{2} \leq x$	$-2x + 6 \leq 8$ $-1 \leq x$	$2x + 4 \leq 8$ $x \leq 2$	$4x - 2 \leq 8$ $x \leq \frac{5}{2}$	
$\mathcal{S}$	$\emptyset$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	$\emptyset$	

Donc, $\mathcal{S} = [-1; 2]$.

9. $4x^2 - 7|x| + 3 = 0 \iff 4x^2 - 7x + 3 = 0$ ou $4x^2 + 7x + 3 = 0$
 $\iff (x - 1)(4x - 3) = 0$ ou $(x + 1)(4x + 3) = 0$.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}\right\}$.

Commentaires : Par parité, il était évident que l'on trouverait des racines opposées.

10. Pour $x \neq 0$, $x + |x| = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 = \frac{2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1) \text{ et } x > 0$$

Donc, $\mathcal{S} = \{1\}$.

11. Pour $x \neq -1$, $\frac{x}{x+1} \leq |2x+1| + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} \leq |2x+1|$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} \leq 2x+1 \text{ ou } 2x+1 \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\overbrace{2x^2+3x+2}^{\Delta < 0}}{x+1} \text{ ou } \frac{x(2x+3)}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

Comme à l'accoutumée, un petit tableau de signes pour la dernière inégalité :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$		
$x(2x + 3)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x(2x + 3)}{x + 1}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Donc, $\mathcal{S} = [-1; +\infty[\cup]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup]-1; 0] =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-1; +\infty[$.

12. Par la présence de la valeur absolue sous la racine, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. On peut élever au carré :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4} &\leq |x-1| \Leftrightarrow |x^2-4| \leq (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-4 \leq (x-1)^2 \text{ et } -(x-1)^2 \leq x^2-4 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -2x+5 \text{ et } 0 \leq 2x^2-2x-3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \text{ et } 0 \leq \left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{5}{2}] \cap \left(\left[-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; +\infty \right) \right) = \left[-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5}{2} \right]$.

Exercice 6 : Démontrer les inégalités suivantes :

- $\forall x \in [-1; 1], -1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$.
- $\forall x, y \in [0; 1[$ tels que $x \leq y$, $\frac{x}{1-x} \leq \frac{y}{1-y}$.

[6]. Un peu de chance ne fait pas de mal!

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$
5. $\forall x, y \in]-1, 1[, -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.
6. $\forall x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 - xy \leq 1$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$.
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
10. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
11. $\forall x, y \in \mathbb{R}, 1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Correction :

1. Une étude rapide de la fonction $\varphi : x \mapsto 4x^3 - 3x$ dérivable sur $[-1; 1]$ dont la dérivée est $\varphi' : x \mapsto 3(2x - 1)(2x + 1)$ permet d'avoir les variations sur $[-1; 1]$ est l'encadrement voulu.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
φ	-1	1	-1	1	

Donc $\forall x \in [-1; 1], -1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ est définie et croissante sur $[0; 1[$.

donc $\forall x, y \in [0; 1[, x \leq y \Rightarrow \frac{x}{1-x} \leq \frac{y}{1-y}$.

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.
4. Il suffit de sommer et simplifier l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
 xy &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\
 yz &\leq \frac{y^2 + z^2}{2} \\
 xz &\leq \frac{x^2 + z^2}{2} \\
 xy + yz + xz &\leq x^2 + y^2 + z^2.
 \end{aligned}$$

5. $\forall x, y \in]-1; 1[, |xy| < 1$ donc $f(x; y) = \frac{x+y}{1+xy}$ est correctement défini.

On a tout d'abord $\frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ si $x, y \in]-1; 1[$.

Enduite, $\frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+1+xy}{1+xy} = \frac{(x+1)(1+y)}{1+xy} > 0$ si $x, y \in]-1; 1[$.

Dans tous les cas, $x, y \in]-1; 1[\Rightarrow -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

6. Sur $[0; 1]$, $x^2 + y^2 \leq x + y$.

D'après la question précédente, on sait qu'alors $x + y \leq 1 + xy$ d'où le résultat.

7. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, comparons les carrés de ces expressions positives $1 + xy + 2\sqrt{xy}$ et $(1+x)(1+y) = 1 + xy + x + y$ i.e. $2\sqrt{xy}$ et $x + y$.

Comme $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a clairement $2\sqrt{xy} \leq x + y$ et le résultat par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x} \sqrt{1+y}.$$

On conclut avec la croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$,

8. Il est assez clair que $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ par définition de la valeur absolue.
9. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq 2\sqrt{xy} \implies 0 \leq x + y \leq x + 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$.

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit : $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

10. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, l'inégalité triangulaire s'écrit $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Pour $u = x + y$ et $v = x - y$, on obtient $2|x| \leq |x + y| + |x - y|$.

Et pour $u = y + x$ et $v = y - x$, $2|y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Il ne reste plus qu'à sommer et simplifier :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

11. Expressions factorisées, l'idée vient ... de la factorisation : $1 + a + b + ab = (1+a)(1+b)$. En faisant apparaître les termes qui nous intéressent, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1)$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |xy - 1| &\leq |x - 1| |y - 1| + |x - 1| + |y - 1| \\ 1 + |xy - 1| &\leq |x - 1| |y - 1| + |x - 1| + |y - 1| + 1 \\ 1 + |xy - 1| &\leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|). \end{aligned}$$

Exercice 7 (Inégalité de Young) : Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En étudiant la fonction $f : t \mapsto f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{y^q}{q} - ty$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Correction : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(t) = t^{p-1} - y$ qui s'annule pour $t = y^{\frac{1}{p-1}}$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$:

t	0	$y^{\frac{1}{p-1}}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
f	$\frac{y^q}{q}$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$+\infty$

La fonction f atteint donc un minimum en $y^{\frac{1}{p-1}}$ qui vaut

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^q}{q} + y^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{1}{q} \left(y^q - y^{\frac{p}{p-1}}\right) = 0.$$

Remarque : $\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ d'où $\frac{p}{p-1} = q$.

On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}_+, ty \leq \frac{t^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ et pour $t = x$, on obtient finalement :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Commentaires : Cette formule se démontre plus élégamment en utilisant la convexité de la fonction exponentielle :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda \in [0; 1], e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b.$$

Avec $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+, xy &= e^{\ln(xy)} = e^{\ln(x) + \ln(y)} \\ &= e^{\frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q)} \end{aligned}$$

En vérifiant bien que $\frac{1}{p} \in [0; 1]$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{p} e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(y^q)} \\ &= \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \end{aligned}$$

L'inégalité restant vraie si $x = 0$ ou $y = 0$.

Exercice 8 : Démontrer les inégalités suivantes.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$ puis $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) \leq x - 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, |x| \leq |\tan(x)|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| \leq |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x - \sin(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : Cet exercice consiste simplement à étudier une fonction auxiliaire dérivable φ via le signe de sa dérivée et à montrer qu'elle ne prend que des valeurs positives sur un intervalle bien choisi.

Il est bon de retenir ces inégalités qui reviennent souvent et d'en connaître leur interprétation graphique.

1. $\varphi : x \mapsto x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Puis, $\forall x \in \mathbb{R}_-, -x \in \mathbb{R}_+$ et par imparité on a $\sin(-x) \leq -x \implies \sin(x) \geq x$ puis $|\sin(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

4. $\varphi : x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ puis conclure par imparité.

5. $\varphi : x \mapsto x - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis conclure par imparité. On trouvera $\varphi'(x) = \left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right)^2 \geq 0$.

6. $\varphi : x \mapsto \frac{x^3}{6} - x + \sin(x)$ et $\psi : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 1 + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis user de l'imparité des fonctions sur $\mathbb{R}$.

7. $\varphi : x \mapsto \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème d'encadrement donnera la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 9 : Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y .

Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Correction : Explicitons la formule pour $\max(x, y)$.

Si $x \geq y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$.

De même si $x \leq y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 10 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

Moyenne arithmétique : $m = \frac{x + y}{2}$.

Moyenne harmonique : $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

Moyenne géométrique : $g = \sqrt{xy}$.

Moyenne quadratique : $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$.

Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq q \leq y$.

Correction : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

- $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{2y^2}{2}} = y$.
- $\frac{x^2 + y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$ donc $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow m \leq q$.
- $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0 \Rightarrow g \leq m$.
- D'après 3, la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure à leur moyenne arithmétique :

$$\sqrt{\frac{1}{x} \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{g} \leq \frac{1}{h} \Leftrightarrow h \leq g.$$

- D'après 1 à 3, par transitivité de la relation $\leq$, la moyenne arithmétique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure au plus grand d'entre eux :

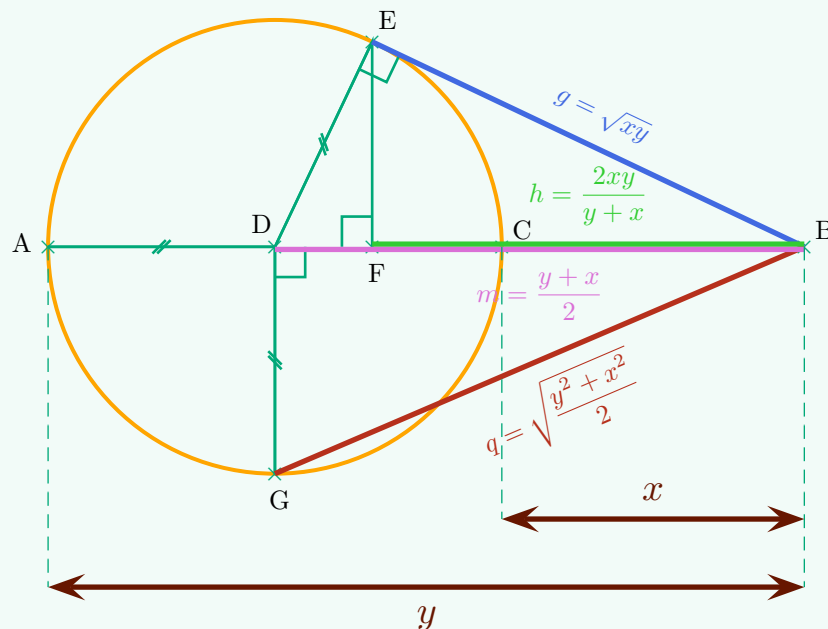
$$\frac{1}{h} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \leq h.$$

Finalement, on a bien prouvé que :

$$0 < x \leq y \Rightarrow x \leq \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq y.$$

Une démonstration géométrique est cependant bien plus jolie :

En supposant $x \leq y$, on construit la figure ci-dessous où $AB = y$ et $BC = x$ et D, le milieu de $[AC]$.



Moyenne arithmétique : Par construction, $DB = DC + CB = \frac{y-x}{2} + x = \frac{y+x}{2} = m$.

Moyenne géométrique : Sachant que $DA = AD = \frac{y-x}{2}$ et $DB = \frac{y+x}{2}$, le théorème de Pythagore dans le triangle BDE donne :

$$EB^2 = DB^2 - DE^2 = \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = xy \Rightarrow EB = g.$$

Moyenne harmonique : Les triangles DEF et DBE sont semblables donc le théorème de Thalès s'écrit :

$$\frac{FB}{BE} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow BF = \frac{BE^2}{BD} = \frac{xy}{\frac{y+x}{2}} = \frac{2xy}{y+x} = h.$$

Moyenne quadratique : Sachant que $DG = AD = \frac{y-x}{2}$, dans le triangle BDG, le théorème de Pythagore se traduit par :

$$BG^2 = DG^2 + BD^2 = \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{2} \Rightarrow BG = q.$$

Il est trivial de prouver avec l'inégalité triangulaire que $BC \leq BF \leq BE \leq BD \leq BG \leq AB$ i.e. :

$$x \leq h \leq g \leq m \leq q \leq y.$$

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) : Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2$, montrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz})$$

2. En déduire :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (\text{inégalité de Minkowski})$$

Correction :

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire.

Sinon, pour x réel, posons

$$P(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

P est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

ou encore $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2
\end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Commentaires : L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire.

Exercice 12 (Quelques majorations utiles dans les concours) :

1. Majorer par une constante $|1 - \cos(\theta)|$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Trouver $\varphi(\theta)$ dépendant de θ mais indépendant de x tel que :

$$\forall x \in]-1; 1[, \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}} \leq \varphi(\theta).$$

3. Soient α et $\beta \in [0; 1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

Montrer que $\forall x, y \geq 0, x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.

4. Soit $a \in [0; 1]$. Déterminer un majorant indépendant de t de $\left| \frac{t^n}{1 + t^n} \right|$ pour $t \in [-a; a]$.
5. Montrer que $\forall t \in [0; 1], 0 \leq \ln(1 + t) \leq -\ln(1 - t)$.

En déduire $\forall \theta \in [0; \pi], \forall t \in [0; 1], |\ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1)| \leq 2 |\ln(1 - t)|$.

Correction :

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, |1 - \cos(\theta)| = 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 2$.
2. Comme $x \in]-1; 1[$ et $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], |x^2 \sin^2(\theta)| < |x^2| < 1$ donc la racine et le quotient sont correctement définis.

Il suffit de minorer l'expression $1 - x^2 \sin^2(\theta)$ sur $[0; 1]$ par parité.

En reconnaissant une fonction polynomiale du second degré décroissante sur $\mathbb{R}_+$, son minimum est atteint pour $x = 1$ et on a :

$$\forall x \in [0; 1], 1 - x^2 \sin^2(\theta) \geq 1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta).$$

Comme $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(\theta) > 0$, d'où

$$\forall x \in]-1; 1[, \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}} \leq \frac{1}{\cos(\theta)} = \varphi(\theta),$$

indépendant de $x \in]-1; 1[$.

3. Soit $y \geq 0, \alpha, \beta \in [0; 1]$, étudions la fonction $\varphi : t \mapsto \alpha t + \beta y - t^\alpha y^\beta$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

D'après les théorèmes sur les sommes de fonctions dérivables, φ l'est clairement sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) = \alpha - \alpha y^\beta t^{\alpha-1} = \alpha(1 - y^\beta t^{\alpha-1}) = \alpha \left(1 - \left(\frac{t}{y}\right)^{\alpha-1}\right).$$

On en déduit son tableau de variation :

t	0	y	$+\infty$	
$\varphi'(t)$		-	0	+
φ	$\frac{y^q}{q}$		$\varphi(y)$	$+\infty$

La fonction φ atteint donc un minimum en $t = y$ valant :

$$\varphi(y) = \alpha y + \beta y - y^{\alpha+\beta}$$

Avec $\alpha + \beta = 1$,

$$= (\alpha + \beta)y - y = y - y = 0.$$

Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \alpha t + \beta y - t^\alpha y^\beta$ i.e. $t^\alpha y^\beta \leq \alpha t + \beta y$ et pour $t = x \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\forall x, y \geq 0, x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

Commentaires : *En utilisant la convexité de la fonction exponentielle on a plus rapidement :*

$$\forall \alpha + \beta = 1, \quad x^\alpha y^\beta = e^{\alpha \ln(x) + \beta \ln(y)} \leq \alpha e^{\ln(x)} + \beta e^{\ln(y)} = \alpha x + \beta y.$$

4. Pour $t \in [-a; a] \subset]-1; 1[$, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^n}{1+t^n} = 1 - \frac{1}{1+t^n}$ est dérivable de dérivée $\varphi'(t) = \frac{nt^{n-1}}{(1+t^n)^2}$ du signe de t^{n-1} .

On en déduit son tableau de variation suivant la parité de n :

n pair donc $n-1$ impair

t	$-a$	0	a
$\varphi'(t)$	$-$	0	$+$
φ	$\frac{a^n}{1+a^n}$	0	$\frac{a^n}{1+a^n}$

n impair donc $n-1$ pair

t	$-a$	a
$\varphi'(t)$		+
φ	$-\frac{a^n}{1+a^n}$	$\frac{a^n}{1+a^n}$

Dans tous les cas, $\forall t \in [-a; a], \left| \frac{t^n}{1+t^n} \right| \leq \frac{a^n}{1+a^n} \leq a^n$.

Commentaires : *Le dernier majorant, quoique plus large, est souvent suffisant.*

5. $\forall t \geq 0, 1+t \geq 1$ et $0 \leq \ln(1+t)$ par croissance de $\ln$.

De plus, $1-t > 0$ et $\ln(1+t) + \ln(1-t) = \ln(\underbrace{1-t^2}_{<1}) \leq 0$ donc $\ln(1+t) \leq -\ln(1-t)$.

Ainsi, $\forall t \in [0; 1[, 0 \leq \ln(1+t) \leq -\ln(1-t)$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, 0 < (1-t)^2 \leq t^2 - 2t + 1 \leq t^2 - 2t \cos(\theta) + 1 \leq t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$.

Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en particulier, sur $[0; 1]$,

$$\begin{aligned} \ln((1-t)^2) &\leq \ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1) \leq \ln((1+t)^2) \\ \underbrace{2 \ln(1-t)}_{<0} &\leq \ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1) \leq 2 \ln(1+t) \leq \underbrace{-2 \ln(1-t)}_{>0} \\ |\ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1)| &\leq 2 |\ln(1-t)|. \end{aligned}$$

II/ Borne supérieure

Exercice 13 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$

2. $]0; 1[\cap \mathbb{Q}$

3. $\mathbb{N}$

4. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Correction :

- $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty; 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
- $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty; 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
- $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty; 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
- $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Les majorants : $\left[\frac{5}{4}; +\infty \right[$. Les minorants : $]-\infty; -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1 . Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 14 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$).

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Exercice 15 : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $A + B = \{a + b, (a; b) \in A \times B\}$.

Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2. On note $A - B = \{a - b, (a; b) \in A \times B\}$.

Montrer que si B est minorée, $A - B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.

3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\sup\{|x - y|, (x, y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A)$.

Correction :

1. Comme A et B sont non vides, $A + B$ est non vide. Pour tout $x \in A + B$, il existe $(a; b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$.

Or, $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ donc $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Ainsi $A + B$ est majorée par $\sup(A) + \sup(B)$, donc admet une borne supérieure.

En particulier, de la définition de la borne supérieure de $A + B$, on a :

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B). \quad (\text{XII.4})$$

Montrons que $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$.

Soit M un majorant de $A + B$, on a donc pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq M$.

Ainsi $a \leq M - b$, et ceci pour tout $a \in A$.

$M - b$ est donc un majorant de A d'où $\sup(A) \leq M - b$ par définition de $\sup(A)$.

D'où, $b \leq M - \sup(A)$ et ce, pour tout $b \in B$.

Par définition de la borne supérieure de B cette fois, on a encore $\sup(B) \leq M - \sup(A)$.

Finalement $\sup(A) + \sup(B) \leq M$ i.e. $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$.

Donc, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Commentaires : Une autre méthode est de montrer directement l'inégalité contraire de (XII.4).

Soient $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a + b \leq \sup(A + B) \Leftrightarrow a \leq \sup(A + B) - b$ qui est donc un majorant de A .

Par définition de la borne supérieure, $\sup(A) \leq \sup(A + B) - b$.

Mais alors $b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$ puis $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$.

Donc $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$ et l'égalité.

2. Même raisonnement.

3. Posons $B = \{|y - x|, (x, y) \in A^2\}$.

A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$ existent dans $\mathbb{R}$.

Pour $(x; y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq y \leq M$, et donc $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ou encore $|y - x| \leq M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0; y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon.$$

En résumé,

(a) $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leq \sup(A) - \inf(A)$ et

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A^2 / |y - x| > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup(A) - \inf(A)$ i.e.

$$\sup\{|y - x|, (x, y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 16 (Autour de la borne sup d'un ensemble) :

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup\{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
3. À quoi est égal $\sup\{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Correction :

1. Soit $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, alors $x = \lambda + a$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$x \leq \lambda + \sup(A).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, on a :

$$\sup\{\lambda + a, a \in A\} \leq \lambda + \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $a + \lambda \in \{\lambda + a, a \in A\}$ donc :

$$a + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}.$$

soit encore :

$$a \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a :

$$\sup(A) \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda,$$

d'où $\sup(A) + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}$.

Par double inégalité, on a montré l'égalité.

2. On suppose $\lambda \geq 0$.

Si $\lambda = 0$, le résultat est vrai, on suppose donc $\lambda > 0$.

On procède, à nouveau, par double inégalité.

Soit $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, alors $x = \lambda a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a $a \leq \sup(A)$ et $\lambda > 0$ donc :

$$x \leq \lambda \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc :

$$\lambda a \leq \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Comme $\lambda > 0$, on peut diviser l'inégalité par λ et on obtient :

$$a \leq \frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a $\sup(A) \leq \frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\}$.

Par double inégalité, on a montré l'égalité.

3. Si $\lambda < 0$, on a $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A)$.

En effet, si $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, on a $x = \lambda a$ avec $a \in A$ donc $a \geq \inf(A)$.

Comme $\lambda < 0$, multiplier par λ l'inégalité donne :

$$x \leq \lambda \inf(A).$$

De même, si $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc $\lambda a \leq \sup\{\lambda a, a \in A\}$.

On divise par λ ce qui inverse l'inégalité et on obtient $\frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\} \leq a$.

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\} \leq \inf(A).$$

Par double inégalité, on a donc montré l'égalité suivante :

$$\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A).$$

Exercice 17 : Soit $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$ une application croissante.

On pose $A = \{x \in [0; 1], f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure m .
2. Montrer que m est un point fixe de f i.e. $f(m) = m$.

Correction :

1. A est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une borne supérieure m .

2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(m) = m$.

(a) Si $f(m) < m$, comme m est le plus petit des majorants de A , $f(m)$ ne majore pas A .

Il existe donc un élément c de A tel que $f(m) < c \leq m$.

Mais alors $f(c) \geq c > f(m)$ alors que $c \leq m$. Ceci contredit que f est croissante.

(b) Si $f(m) > m$, comme f est croissante, on a $f(f(m)) \geq f(m)$, et donc $f(m) \in A$, ce qui est impossible puisque $f(m)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de A .

III/ Partie entière _____

Exercice 18 : Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \lfloor 2x \rfloor \qquad x \mapsto 2 \lfloor x \rfloor$$

A-t-on $f \equiv g$?

Exercice 19 : Représenter la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

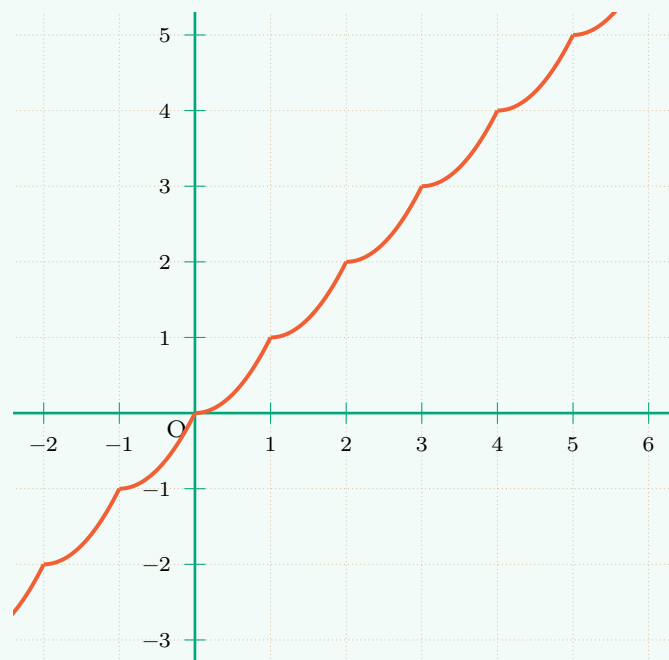
Correction : Simplifions le domaine d'étude.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \lfloor x+1 \rfloor + (x+1 - \lfloor x+1 \rfloor)^2 = 1 + \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = 1 + f(x)$.

On étudiera donc la fonction f sur $[0; 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la courbe complète sur $[k; k+1[$ sera obtenue à partir de celle sur $[0; 1[$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$.

De plus, $\forall x \in [0; 1[$, $f(x) = x^2$ et $f(1) = \lfloor 1 \rfloor + (1 - \lfloor 1 \rfloor)^2 = 1$.

D'où, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 = 1 = f(1)$ et la fonction est continue sur $[0; 1]$. Par translation, elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier.



$$x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

Exercice 20 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre de chiffres $\kappa(n)$ de n dans son écriture décimale est :

$$\kappa(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$$

2. Quel est le nombre de chiffres de n dans son écriture en base b ?

Correction :

1. Un nombre $n \geq 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 i.e.

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, / 10^p \leq n < 10^{p+1} \quad \text{i.e. } n \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction $\log$ est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{aligned} \log 10^p &\leq \log n < \log 10^{p+1} \\ p &\leq \log n < p+1. \end{aligned}$$

On a donc : $\lfloor \log N \rfloor = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de n est donc : $\lfloor \log N \rfloor + 1$.

Par exemple, comme $\log(2021^{2022}) \simeq 6683,9$. Le nombre 2021^{2022} s'écrit avec 6 684 chiffres !

2. Raisonnement identique avec $\log_b$.

Exercice 21 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Correction :

$\Rightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor = x$.

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, nx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor = nx = n \lfloor x \rfloor$.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$.

Notons $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in]0, 1[$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \epsilon > 1$.

On a donc $\lfloor n_0 x \rfloor = \lfloor n_0 \lfloor x \rfloor + n_0 \epsilon \rfloor = n_0 \lfloor x \rfloor + \lfloor n_0 \epsilon \rfloor \geq n_0 \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\lfloor n_0 x \rfloor \neq n_0 \lfloor x \rfloor$. CQFD

Exercice 22 : Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Correction : Poser $\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + x' \\ y = \lfloor y \rfloor + y' \end{cases}$ avec $x', y' \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor &\iff \lfloor x \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + x' + \lfloor y \rfloor + y' \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2 \lfloor x \rfloor + 2x' \rfloor + \lfloor 2 \lfloor y \rfloor + 2y' \rfloor \\ &\iff 2 \lfloor x \rfloor + \lfloor x' + y' \rfloor + 2 \lfloor y \rfloor \leq 2 \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x' \rfloor + 2 \lfloor y \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \\ &\iff \lfloor x' + y' \rfloor \leq \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \end{aligned}$$

Le membre de gauche $\lfloor x' + y' \rfloor$ vaut 0 ou 1. Le membre de droite $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor$ vaut 0, 1 ou 2.

La dernière inégalité ne serait pas vérifiée uniquement si $\begin{cases} \lfloor x' + y' \rfloor = 1 \\ \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0 \end{cases}$.

Or $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0$ implique $0 \leq x' < \frac{1}{2}$ et $0 \leq y' < \frac{1}{2}$.

Et alors, $0 \leq x' + y' < 1$ et c'est absurde puisque $\lfloor x' + y' \rfloor = 1$.

Exercice 23 : Résoudre l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$$

Correction :

Analyse : Soit x une solution. Alors en posant $n = \lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$, on a $\begin{cases} n \leq 2x + 3 < n + 1 \\ n \leq x + 2 < n + 1 \end{cases}$.

D'où $2x + 3 < n + 1 \leq x + 3$, i.e. $x < 0$.

Et $x + 2 < n + 1 \leq 2x + 4$ donc $-2 < x$. On en déduit que $\mathcal{S} \subset]-2, 0[$.

Synthèse : — Si $x \in]-2, -1[$, on a $x + 2 \in]0, 1[$ donc $\lfloor x + 2 \rfloor = 0$.

$$\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor \iff \lfloor 2x + 3 \rfloor = 0 \iff 0 \leq 2x + 3 < 1 \iff -\frac{3}{2} \leq x < -1.$$

— Si $x \in]-1, 0[$, on a $x + 2 \in]1, 2[$ donc $\lfloor x + 2 \rfloor = 1$.

$$\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor \iff \lfloor 2x + 3 \rfloor = 1 \iff 1 \leq 2x + 3 < 2 \iff -1 \leq x < -\frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[.$$

Exercice 24 :

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- En déduire la partie entière de $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$.

Correction :

- Tout repose sur la partie conjuguée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \implies \frac{2}{2\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{2}{2\sqrt{n}}.$$

D'où, le résultat.

- On encadre $A = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ à l'aide de la première question et on reconnaît une somme télescopique :

$$2 \sum_{k=1}^{10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2 \sum_{k=0}^{9999} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$2(\sqrt{10001} - 1) < \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{10000}$$

$$2(\sqrt{10001} - 1) < \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 200$$

Pour la partie entière, il reste à prouver que $2(\sqrt{10001} - 1) > 198 \Leftrightarrow \sqrt{10001} - 1 > 99 \Leftrightarrow \sqrt{10001} > 100$ ce qui est relativement évident sachant que $10001 = 10000 + 1$.

Conclusion, $\left\lfloor \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 199$.

Exercice 25 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

Correction : Les termes en racines sont égaux à j lorsque k est entre j^2 et $(j+1)^2 - 1$.

Exercice 26 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Correction : L'idée est de former des paquets de termes consécutifs identiques.

En effet, lorsque l'entier k parcourt l'ensemble $\llbracket j^2; (j+1)^2 - 1 \rrbracket$, l'expression $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ prend constamment la valeur j .

Il est donc naturel de regrouper les termes correspondants pour obtenir :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} j \right).$$

Mais la somme interne comporte $(j+1)^2 - 1 - j^2 + 1 = 2j + 1$ termes, tous égaux à j , et donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 27 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$

Correction : $a = bq + r \Rightarrow \sum = \underbrace{q + q + \dots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \dots + (q+1)}_r = bq + r = a$.

Partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor.$$

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$.

On pourra distinguer les cas où x appartient à un intervalle de la forme $[2p; 2p+1[$ ou $[2p+1; 2p+2[$.

- (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = m - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. (a) Montrer que g est constante sur $[0; 1[$, et déterminer sa valeur.
- (b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) = g(x) + 1$.
- (c) Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in [p; p+1[, g(x) = \lfloor x \rfloor$.
- (d) En déduire une expression plus simple de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor.$$

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$.

On pourra distinguer les cas où x appartient à un intervalle de la forme $[2p; 2p+1[$ ou $[2p+1; 2p+2[$.

Correction : Soit $p \in \mathbb{Z}$.

— Supposons $x \in [2p; 2p+1[$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} \frac{x}{2} \in \left[p, p + \frac{1}{2} \right[\subset [p; p+1[\text{ donc } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \\ \frac{x+1}{2} \in \left[p + \frac{1}{2}, p+1 \right[\subset [p; p+1[\text{ donc } \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p \end{cases}$$

$$\text{D'où, } f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p + p = 2p = \lfloor x \rfloor.$$

— Supposons $x \in [2p+1; 2p+2[$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} \frac{x}{2} \in \left[p + \frac{1}{2}, p+1 \right[\subset [p; p+1[\text{ donc } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = p \\ \frac{x+1}{2} \in \left[p+1, p + \frac{3}{2} \right[\subset [p+1; p+2[\text{ donc } \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p+1 \end{cases}$$

$$\text{D'où, } f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = p + p + 1 = \lfloor x \rfloor.$$

Dans tous les cas, $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

- (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = m - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

Correction : Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{\frac{m}{2^k} + 1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n \left(\left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

En reconnaissant une somme télescopique,

$$= \left\lfloor \frac{m}{2^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = m - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor.$$

- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction : Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{2^{n+1}} = 0^+$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = 0$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = m$.

2. (a) Montrer que g est constante sur $[0; 1[$, et déterminer sa valeur.

Correction : Soit $x \in [0; 1[$. On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 0 \leq x + k < n$.

Donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 0 \leq \frac{x+k}{n} < 1$ et ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

Par conséquent $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

La fonction g est donc identiquement nulle sur $[0; 1[$.

- (b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) = g(x) + 1$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k'=1}^n \left\lfloor \frac{x+k'}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{k'=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k'}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor + 1 \\ &= g(x) + 1 \end{aligned}$$

- (c) Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in [p; p+1[, g(x) = \lfloor x \rfloor$.

Correction : Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- Pour $p = 0$, le résultat a été prouvé à la question (1a).
- Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}$, g et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ coïncident sur $[p, p+1[$.

Considérons un réel x sur $[p+1, p+2[$.

En appliquant le résultat de la question précédente à $x' = x - 1$, on aura $g(x) = g(x' + 1) = g(x') + 1$.

Or, $x' \in [p, p+1[$ donc par hypothèse de récurrence, $g(x') = \lfloor x' \rfloor$.

D'où, $g(x) = \lfloor x' \rfloor + 1 = \lfloor x' + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Le résultat est donc établi par récurrence pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}_-$.

- Pour $p = 0$, le résultat a été prouvé à la question (1a) .
- Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{Z}^-$, g et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ coïncident sur $[p, p+1[$.

Considérons un réel x sur $[p-1, p[$. On aura $x+1 \in [p, p+1[$.

D'où, $g(x) = g(x+1) - 1 = \lfloor x+1 \rfloor - 1 = \lfloor x \rfloor$.

Par **récurrence descendante**, on a prouvé le résultat pour tout $p \in \mathbb{Z}^-$.

Le résultat est donc vrai pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

(d) En déduire une expression plus simple de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $p = \lfloor x \rfloor$ tel que $x \in [p, p+1[$.

D'après la question précédente, $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Matrices

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Opérations sur les matrices

- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.
- Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.
- Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
- Produit matriciel : bilinéarité, associativité. Non commutativité si $n \geq 2$.
- Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
- Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit. Notation $A^\top$.

2. Opérations élémentaires

- Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

3. Ensemble des matrices carrées

- Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice identité, matrice scalaire. Notation I_n .
- Matrices symétriques, antisymétriques. Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.
- Formule du binôme. Application au calcul de puissances.
- Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Notation $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

- Inverse d'un produit de matrices inversibles. Inverse d'une transposée.
- Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
- Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires.
- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Cas particulier des matrices diagonales. L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices.

CONTENU

I	L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	800
I.1	Généralités et vocabulaire	800
I.2	Zoologie	802
II	Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	803
II.1	Addition	803
II.2	Loi externe.	805
II.3	Produit matriciel	807
II.4	Transposition d'une matrice	813
III	L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	816
III.1	Matrices diagonales et triangulaires	816
III.2	Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton	818
IV	Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$	822
IV.1	Inversibilité des matrices d'ordre 2.	825
IV.2	Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires	827
IV.3	Trace d'une matrice	829
	Feuille d'exercices n° 14 : Matrices	831
	Test n° 17 : Matrices.	843
	Devoir en temps libre n° 14 : Racines $p^{\text{èmes}}$ de l'identité	847
	Correction	848
	Programme du chapitre XIV.	852

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres $n, p, q, \dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

I/ L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

I.1 Généralités et vocabulaire

Définition 1 : Soient n et p deux entiers non nuls.

On appelle *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, indexée par $\llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall (i; j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket.$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble où n et p sont, réciproquement, le nombre de *lignes* et de *colonnes* et $\mathbb{K}$ est le corps auquel appartiennent les coefficients ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous).

- Les nombres a_{ij} sont les *coefficients* de la matrice A .
- a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On notera souvent, en abrégé, $A = (a_{i,j})_{(i;j) \in I \times J}$.

Les coefficients de la forme a_{ii} sont les coefficients de la diagonale de la matrice. Expression qui ne prend vraiment son sens que pour les matrices carrées que nous allons voir.

Exemples 1 :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est une matrice 2×3 réelle.

Par exemple, $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$.

- $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 4 & 1 - i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice 2×2 complexe.

Remarques :

- Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est jamais qu'un élément de $\mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ i.e. une famille $(a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$, i.e. encore une application $(i,j) \mapsto a_{ij}$ de $\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ dans $\mathbb{K}$.

En résumé :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{\llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket} (\simeq \mathbb{K}^{n \times p}).$$

- De la même manière, afin de faire ressortir l'aspect vectoriel, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant uniquement déterminée par la donnée de n éléments de $\mathbb{K}$, on l'assimilera à un vecteur de $\mathbb{K}^n$ i.e. on fera l'identification :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n \times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket, a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Assez logiquement, la matrice $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, notée parfois $(0)_{n,p}$, sera appelée la **matrice nulle**.

Remarque : Pour différencier les vecteurs $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que sont les matrices colonnes (ou lignes) des coefficients $x_i \in \mathbb{K}$ qui les déterminent, on appelle *scalaire*, tout élément de $\mathbb{K}$.

Exercice 1 : Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $D = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$.
5. $E = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.
6. $F = (\delta_{i+j, n+1})_{1 \leq i, j \leq n}$.
7. $G = (\text{sh}(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Correction :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. G = \begin{pmatrix} \text{sh}(2a_1) & \text{sh}(a_1 + a_2) & \text{sh}(a_1 + a_3) & \dots & \text{sh}(a_1 + a_n) \\ \text{sh}(a_1 + a_2) & \text{sh}(2a_2) & \text{sh}(a_2 + a_3) & \dots & \text{sh}(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{sh}(a_1 + a_n) & \text{sh}(a_2 + a_n) & \text{sh}(a_3 + a_n) & \dots & \text{sh}(2a_n) \end{pmatrix}.$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

$$5. E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & \ddots & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$6. F = \begin{pmatrix} & 1 \\ \ddots & \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

I.2 Zoologie

— Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur ligne*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $p = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur colonne*.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $m = n$, la matrice M est appelée *matrice carrée* d'ordre n . Leur ensemble est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

— On appelle *matrice unité* ou *identité* d'ordre n , notée I_n , la matrice carrée d'ordre n qui ne possède que des « 1 » sur sa diagonale et des « 0 » ailleurs :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vocabulaire : La notation $\delta_{i,j}$ porte le nom de *symbole de Kronecker*.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

- On appelle *matrice diagonale* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale : $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3(\mathbb{K}).$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.

En particulier, les matrices $\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées *matrices scalaires*

- On appelle *matrice triangulaire* (*resp.* strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (*resp.* strictement sous) :

$a_{ij} = 0, \forall i \leq j$ (*resp.* $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

On note $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

On note $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice strictement triangulaire (inférieure)

Remarques :

- Les matrices triangulaires sont des matrices carrées par définition.
- Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures ET triangulaires inférieures.
- Seule la matrice nulle est à la fois triangulaire supérieure stricte et triangulaire inférieure stricte.

En outre, elles ont des propriétés très sympathiques pour le produit et la somme comme on le verra au paragraphe (II.3) .

II/ Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Comme précédemment, un nouveau ensemble créé, il est nécessaire, afin d'en faire quelque chose, de définir les lois qui le régissent. On dit que l'on dote l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe, d'anneau ou de $\mathbb{K}$ -algèbre suivant les cas.

II.1 Addition

Définition 2 (Somme) : Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de même dimension.

La matrice $C = A + B$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$C = A + B \iff (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Difficile de faire plus simple !

ATTENTION

Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions sinon leur addition n'est pas définie.

Exemples 2 :

$$- \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut donc décomposer une matrice carrée en la somme de deux matrices triangulaires.

— La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (0) = (0) + A = A.$$

— Tout élément $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi + appelé *matrice opposée* de A et notée $-A = (-a_{ij})$. La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + (-A) = (-A) + A = (0).$$

De même que l'addition dans $\mathbb{K}$, l'addition des matrices vérifient les mêmes lois : associativité, commutativité, élément neutre et opposé.

On dit que l'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +)$ est un *groupe commutatif*.

En particulier, d'après le **théorème (1)**, on en déduit :

Proposition 2 :

$$(a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1; p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1; p \rrbracket}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \iff \forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, a_{ij} = b_{ij}.$$

Deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont les mêmes dimensions et leurs coefficients sont égaux deux à deux.

II.2 Loi externe

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit le produit (externe) de la matrice A par le scalaire λ , noté $\lambda.A$ ou λA , comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par λ :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

- Plus généralement, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la *combinaison linéaire* de A et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\lambda.A + \mu.B$, de coefficients :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (a_{ij}) + \mu \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{\cdot} (b_{ij}) = \left(\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij} + \mu \underset{\mathbb{K}}{\times} b_{ij} \right).$$

Exemple 3 : $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc stable par *combinaisons linéaires* i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda.A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Comme sa consœur, la loi externe est distributive sur la somme i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B.$$

On dit que l'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -*espace vectoriel*.

Exemple 4 : $3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système :

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Correction : L'ensemble des matrices étant stable par combinaisons linéaires, on applique celles-ci au système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 17X = 3 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_2 \\ 15Y = 2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow 2L_1 + 3L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 17X = \begin{pmatrix} -17 & 34 \\ 0 & 51 \end{pmatrix} \\ 17Y = \begin{pmatrix} 34 & -17 \\ 51 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17X = 17 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 17Y = 17 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}. \end{aligned}$$

Définition 4 (Matrices élémentaires) : Soit $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$.

On appelle *matrice élémentaire* (de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), notée $E_{i,j,n,p}$ ou $E_{i,j}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i,j) , égal à 1 :

$$E_{i,j,n,p} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}.$$

$$E_{i,j,n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure XIII.1 – Matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 5 : Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

$$\begin{array}{lll} \blacksquare E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \blacksquare E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \blacksquare \text{et } E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Il est assez clair que toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} m_{ij} E_{i,j}.$$

Plus généralement,

Proposition 3 :

$$\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{i,j}.$$

La **proposition (3)** nous fera bientôt dire que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique*.

II.3 Produit matriciel

C'est là que les choses deviennent intéressantes. Comme je vous l'ai déjà dit, il est rare, voire exceptionnel qu'un objet se comporte bien avec les deux opérations principales. Comme l'addition de deux matrices est simple ...

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) : Le produit d'un vecteur ligne L par un vecteur colonne C de même dimension n est égal au *produit scalaire* des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{L} \cdot \vec{C} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

ATTENTION

au sens ! On parle ici du produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne et non du produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne qui viendra plus tard.

Exercice 3 : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Correction :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad \dots \quad n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

On généralise cette opération à deux matrices quelconques A et B pourvu que le nombre de colonnes de la matrice A correspondent au nombre de lignes de la matrice B.

Définition 6 : Le *produit* de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ est égal à la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Exemple 6 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

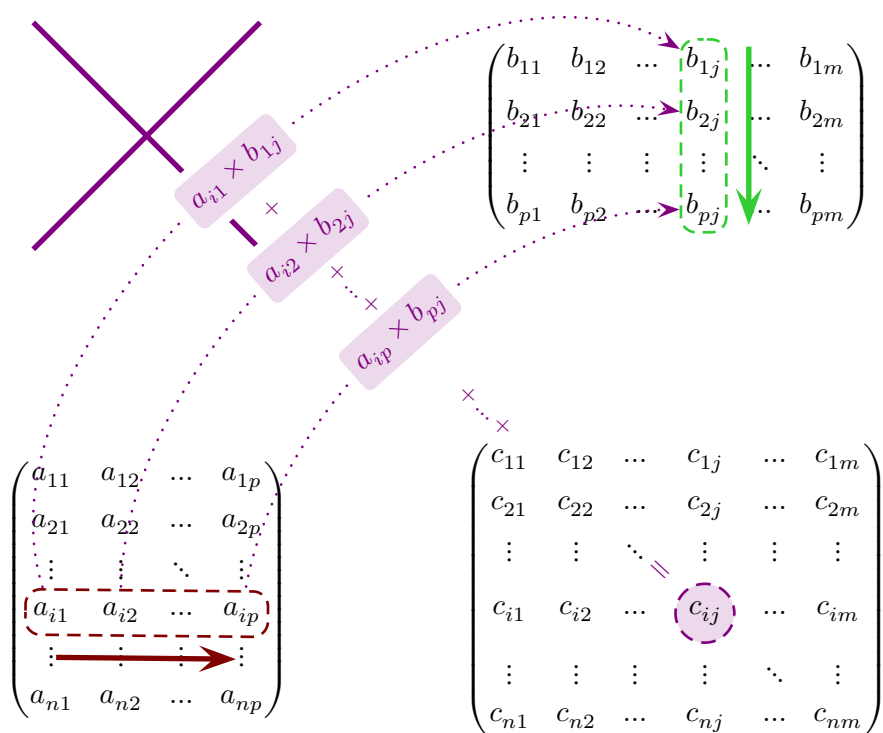


Figure XIII.2 – Produit matriciel

Remarques :

- La matrice de gauche détermine le nombre de lignes tandis que celle de droite, celui des colonnes.

ATTENTION

le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite sinon le produit n'est pas défini.

- Le produit à droite d'une matrice par un vecteur colonne est un vecteur colonne et le produit à gauche d'une matrice par un vecteur ligne est un vecteur ligne.
- la complexité de la multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est en $O(n^3)$ i.e. du même ordre de grandeur que λn^3 où λ est une constante strictement positive.

Exercice 4 : Effectuer les sommes et produits **possibles** de matrices entre :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction :

$$1. AB = (-2 - 3) = (-5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$2. AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \text{ et } BA \text{ n'est pas défini.}$$

ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA , ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a, en général, $AB \neq BA$. Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

Exemple 7 ($AB \neq BA$) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8 ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$) : Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Les matrices A et B sont alors appelées des *diviseurs de zéro*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un ensemble non intègre.

Exemple 9 ($AB = AC$ n'implique pas $B = C$) : On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = B$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Correction : Par nécessité, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons donc $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Deux matrices étant égales si, et seulement si elles ont les mêmes coefficients, on a :

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ 8a + c & 8b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a & = 1 \\ -b & = 2 \\ 8a + c & = 2 \\ 8b + d & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -1 \\ b & = -2 \\ c & = 10 \\ d & = 15 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$.

Exemples 10 (Lignes d'une matrice) : Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

$(0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0)_{1,n} \times A = (a_{j1} \quad \dots \quad a_{jp})_{1,p}$ est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A .

à la position j

En particulier, $E_{i,j,q,n} \times A = \begin{pmatrix} 0_{1,p} \\ \vdots \\ 0_{1,p} \\ L_j \\ 0_{1,p} \\ \vdots \\ 0_{1,p} \end{pmatrix}_{q,p}$ en notant $L_j = (a_{j1} \quad \dots \quad a_{jp})_{1,p}$.

à la position i

Exemples 11 (Colonnes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{p,1} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}_{n,1} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

à la position i

En particulier, $A \times E_{i,j,p,q} = \begin{pmatrix} 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,1} & C_i & 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,1} \end{pmatrix}_{n,q}$ en notant $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}_{n,1}$.

à la position j

Exercice 6 : Calculer $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n}$.

Correction : Par définition du produit matriciel $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} = (e_{p,q})_{p,q \in \llbracket 1 ; n \rrbracket}$.

Soient $p, q \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} e_{p,q} &= \sum_{m=1}^n (E_{i,j,n,p})_{p,m} (E_{k,l,p,n})_{m,q} \\ &= \sum_{m=1}^n \delta_{i,p} \delta_{j,m} \delta_{k,m} \delta_{l,q} \\ &= \begin{cases} \delta_{i,p} \delta_{l,q} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \text{ et } p = i \text{ et } q = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} = \begin{cases} E_{i,l,n,n} & \text{si } j = k \\ (0)_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont notées $A_1, \dots, A_p$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$AX = \sum_{k=1}^p x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice A par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de A .

En particulier, le produit à droite d'une matrice $n \times p$ par un vecteur colonne $p \times 1$ est un vecteur colonne $n \times 1$.

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k A_k. \end{aligned}$$

Figure XIII.3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que le produit AX d'une matrice à n lignes par un vecteur de $\mathbb{K}^p$ est un vecteur colonne à n lignes donc un élément de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket, (AX)_i = \sum_{k=1}^p (A_k)_i x_k = \sum_{k=1}^p x_k (A_k)_i = \sum_{k=1}^p (x_k A_k)_i = \left(\sum_{k=1}^p x_k A_k \right)_i.$$

Vous verrez par la suite que nombre de ces difficultés n'existeraient pas si l'inverse d'une matrice non nulle pouvait toujours être défini. La raison principale étant la non commutativité du produit matriciel.

Alors que reste-t-il au final ? Ce qui est indiqué dans la proposition et seulement cela :

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.

Non commutatif : $AB \neq BA$ en général.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Élément neutre : $AI_p = I_n A = A$.

I_p est *élément neutre* pour la multiplication à droite et I_n pour la multiplication à gauche.
Élément absorbant : $(0)_{m,n}A = (0)_{m,p}$ et $A(0)_{p,q} = (0)_{n,q}$, $\forall m, q \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la matrice nulle est un *élément absorbant* pour le produit matriciel.

Exercice 7 : Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Correction : Soit $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} AB = BA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ az & at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + ay \\ az & bz + at \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = ax \\ ay + bt = bx + ay \\ at = bz + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bz = 0 \\ bt = bx \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ t = x \end{cases} \quad \text{car } b \neq 0. \end{aligned}$$

Les matrices qui commutent avec A sont donc des matrices de la même forme i.e. $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Remarque : Si $b = 0$ alors A est diagonale et toutes les matrices commutent avec elle.

II.4 Transposition d'une matrice

Définition 7 : La *transposée* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou anciennement ${}^tA$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A .

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 12 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : La transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et réciproquement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$.

Involutivité : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$.

Contravariance : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Preuve : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; r \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket,$$

$$\begin{aligned} ((\lambda A + B)^T)_{ij} &= (\lambda A + B)_{ji} && \text{(définition de la transposition)} \\ &= \lambda a_{ji} + a_{ji} && \text{(d'après les lois de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{)} \\ &= \lambda (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} && \text{(définition de la transposition)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } (\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T.$$

— $\forall (i; j) \in \llbracket 1; r \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket,$

$$\begin{aligned} ((A^T)^T)_{ij} &= (A^T)_{ji} && \text{(définition de la transposition)} \\ &= a_{ji} && \text{(définition de la transposition)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } (A^T)^T = A.$$

— $\forall (i; j) \in \llbracket 1; r \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket,$

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{(définition de la transposition)} \\ &= \sum_{k=1}^q a_{jk} b_{ki} && \text{(définition du produit matriciel)} \\ &= \sum_{k=1}^q b_{ki} a_{jk} && \text{(commutativité de } \mathbb{K} \text{)} \\ &= \sum_{k=1}^q (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} && \text{(définition de la transposition)} \\ &= (B^T A^T)_{ij}. && \text{(définition du produit matriciel)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } (AB)^T = B^T A^T.$$

Remarques :

— Soient $\vec{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ et $\vec{Y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Alors leur produit scalaire $\vec{X} \cdot \vec{Y}$ peut-être vu comme un produit matriciel :

$$\begin{aligned}\vec{X} \cdot \vec{Y} &= \mathbf{X} \mathbf{Y}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.\end{aligned}$$

— De la même manière, soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ où $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$,

$A_i \in \mathbb{K}^p$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{A}$ et $B_j \in \mathbb{K}^p$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{B}$.

Alors $(\mathbf{AB})_{ij} = \vec{A_i} \cdot \vec{B_j}^\top$ où A_i et B_j sont vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$.

Définition 8 : Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que $\mathbf{A}$ est *symétrique* si, et seulement si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = a_{ji}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— On dit que $\mathbf{A}$ est *anti-symétrique* si, et seulement si $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} = -a_{ji}.$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

- Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.
- En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls.
- De plus, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$.

Exemples 13 : $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est symétrique.
2. Démontrer que $\mathbf{A}^2$ est symétrique si $\mathbf{A}$ est symétrique ou antisymétrique.

Correction :

1. $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ donc $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est symétrique.
2. $(\mathbf{A}^2)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}^\top$.

Si $\mathbf{A}$ est symétrique alors $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ donc $\mathbf{A}^2$ est symétrique.

De même, si A est antisymétrique, $A^T A^T = (-A)(-A) = A^2$ donc A^2 est symétrique.

Dans les deux cas, A^2 est symétrique.

III/ L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Revenons sur la **proposition (5)** spécifiquement dans le cas où $n = p$ des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n , ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée *loi interne* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associative, distributive, admettant la matrice I_n comme élément neutre, mais pas commutative.

On dit que l'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un *anneau* unitaire d'unité la matrice I_n et que l'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre non commutative.

On étudie dans ce paragraphe spécifiquement les matrices carrées.

III.1 Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

- $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour économiser de la place on trouve souvent l'écriture $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ abrégée en $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Tout le monde comprendra...

Exercice 9 : Déterminer $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), AD = DA\}$.

Correction : Toute l'idée de cet exercice est que A doit commuter avec TOUTES les matrices diagonales. On va donc pouvoir particulariser :

Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$.

Pour tout $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$, on a :

$$(DA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n D_{i,k} a_{k,j} = d_i a_{i,j} \quad \text{et} \quad (AD)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} D_{k,j} = d_j a_{i,j}.$$

L'égalité $(DA)_{i,j} = (AD)_{i,j}$ pour tout i, j entraîne que si $d_i \neq d_j$ alors $a_{i,j} = 0$.

La matrice A est donc nécessairement diagonale. Réciproquement, on sait que les matrices diagonales commutent.

L'ensemble cherché est donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Ces résultats se généralisent aux matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) comme l'énonce la propriété suivante :

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

— $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda A + B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$.

— $\forall A, B \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K}), AB \in \mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, (AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

Les résultats sont similaires pour les matrices triangulaires inférieures. ^[1]

Preuve : Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures.

Soient $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$ tels que $i > j$.

Par hypothèse, on a $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

De plus,

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$.

Donc $\lambda A + B$ est triangulaire supérieure.

$$\text{— } (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0 \text{ car } i > k} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0 \text{ car } k \geq i > j} = 0.$$

Donc AB est triangulaire supérieure.

$$\text{En particulier, } (AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0 \text{ car } i > k} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{=0 \text{ car } k > i} = a_{ii} b_{ii}.$$

[1]. Le cas inférieur s'en déduit par transposition.

III.2 Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Définition 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$A^0 = I_n$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k+1 \text{ fois}}$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.
- Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.
- Cependant, en général, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^2 \neq A^2 B^2$. On peut seulement affirmer que $(AB)^2 = ABAB$.

Exemple 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \times (A \times A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer N^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Après calculs, on trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geq 3, N^k = (0)_3$.

En remarquant que $A = N + I_3$ et que les matrices N et I_3 commutent, on utilise le binôme de Newton pour écrire :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, A^n &= (N + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Corollaire 8.1 :

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\left(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right)^p = \text{diag}(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^p & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 15 : $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \pi^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$

Théorème 9 :

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $AB = BA$ alors :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \quad (\text{Binôme de Newton}).$$

$$A^p - B^p = (A - B) \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) (A - B).$$

(Factorisation de $A^p - B^p$).

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $AB \neq BA$ alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2! \dots\end{aligned}$$

Et,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \dots$$

Preuve : Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- Pour $p = 0$, il y a juste à constater que $I_n = I_n$.
- Supposons le résultat vérifié pour un certains $m \in \mathbb{N}^*$ *i.e.*

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k}.$$

$$\begin{aligned}\text{Alors : } (A+B)^{m+1} &= (A+B)^m (A+B) = \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k} \right) (A+B) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k} A + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k+1}\end{aligned}$$

Comme A et B commutent, $A^k \times B^{m-k} A = A^{k+1} \times B^{m-k}$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{k+1} \times B^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k+1} \\ &= A^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} A^{k+1} \times B^{m-k} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k+1} + B^{m+1}\end{aligned}$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme,

$$= A^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} A^k \times B^{m-k+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k+1} + B^{m+1}$$

On factorise :

$$= A^{m+1} + \sum_{k=1}^m \underbrace{\left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right]}_{\binom{m+1}{k}} A^k \times B^{m-k+1} + B^{m+1}$$

La formule de Pascal permet de conclure :

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} A^k \times B^{(m+1)-k}.$$

La propriété est héréditaire.

- La propriété est donc vraie pour $p = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exemple 16 : Comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec I_n , on a :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}A^{p-2} + \dots + pA + I_n.$$

$$I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A) (A^{p-1} + A^{p-2} + \dots + A + I_n).$$

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le cas des matrices dites, *nilpotentes* :

Définition 10 (Matrice nilpotente) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est *nilpotente* si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'*indice de nilpotence* de A :

$$p = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* / A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \right\}.$$

Par définition de l'indice de nilpotence, pour tout matrice N nilpotente d'indice p ,

$$\forall k < p, N^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 17 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3.

Exercice 11 : Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui sont à la fois nilpotentes et idempotentes (*i.e.* $A^2 = A$).

Correction : Soit A une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$.

On a $A^p = 0$ et $A^p = A$ donc, $A = 0$.

La matrice nulle étant clairement idempotente et nilpotente, l'ensemble des matrices nilpotentes et idempotentes ne contient que la matrice nulle.

Méthode 1 (Calcul de la puissance d'une matrice) :

Dans les cas où A peut se décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 12 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Comme $J^3 = 0$, on a :

$$A^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

IV/ Matrices inversibles et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Définition 11 (Inverse d'une matrice) : Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est *singulière*.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le *groupe linéaire* d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On le note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

ATTENTION

Par définition, une matrice inversible est nécessairement carrée !

Exemples 18 :

- Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques : Une matrice B telle que $AB = I_n$ s'appelle un *inverse à droite* de A . Une matrice B' telle que $B'A = I_n$ s'appelle un *inverse à gauche* de A .

S'ils existent, un inverse à droite et un inverse à gauche sont nécessairement égaux.

Preuve : À partir de $AB = I_n$, il suffit de multiplier à gauche les deux membres par B' pour obtenir $(B'A)B = B' \iff B = B'$.

Il suffira donc de trouver indifféremment un inverse à gauche ou à droite pour conclure à l'inversibilité de la matrice considérée.

Proposition 10 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1} .

Preuve : Soit A une matrice carrée inversible et soient B et B' deux inverses de A .

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'.$$

Remarque :

- On retrouve la définition de l'inverse d'un réel x non nul *i.e.* le nombre $x^{-1} = \frac{1}{x}$ tel que $x \times \frac{1}{x} = 1$. La matrice unité I_n joue ici le rôle du 1 dans $\mathbb{R}$.
- C'est un fait général pour tout monoïde associatif.

Exemples 19 :

- La matrice I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.
- $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Exemple 20 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ATTENTION

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à la différence de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe des matrices non nulles comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas inversibles.

Exercice 13 : Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle n'est PAS inversible.

Correction : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et supposons, par exemple, que A possède une colonne nulle, disons la $i^{\text{ème}}$.

Alors pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le produit BA possède lui aussi une $j^{\text{ème}}$ colonne nulle, donc ne peut jamais être égal à I_n .

Exemple 21 : $A = \begin{pmatrix} i & 4 & 0 \\ 2+i & 5i & 0 \\ 3-i & 6 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}_3(\mathbb{C}).$

Exercice 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 5A$.
2. En déduire que $A \in \mathcal{G}l_3(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1} .

Correction :

1. Après calculs, on trouve $A^2 - 5A = -6I_3$.
2. En factorisant par A à droite et à gauche d'ans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$A \left(-\frac{1}{6} \cdot (A - 5I_3) \right) = \left(-\frac{1}{6} \cdot (A - 5I_3) \right) A = I_3.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot (A - 5I_3) = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 6$ est appelé *polynôme annulateur* de la matrice A . Une matrice donnée, l'existence d'un polynôme annulateur de valuation nulle (*i.e.* le monôme de plus bas degré est une constante) assure qu'elle soit inversible :

S'il existe $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_0 \neq 0$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n}$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I).$$

Méthode 2 (Inverser une matrice avec un polynôme annulateur) :

Soit A une matrice et P un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul. Alors,

- A est inversible,
- On trouve l'expression de A^{-1} à partir de l'expression $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ en isolant le multiple de I_n et en factorisant par A .

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Transposition : $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

On retiendra donc que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ est stable par inverse et produit : $(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}), \times)$ est, comme son nom l'indique, un groupe (non commutatif).

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}.$$

Rappelez vous que la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative :

$(A^{-1}B^{-1})(AB)$ ne donne rien.

Preuve : Soient $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

- $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, donc par définition de l'inversibilité, A^{-1} est inversible d'inverse A .
- $AB \times B^{-1}A^{-1} = A \times BB^{-1} \times A^{-1} = A \times I_n \times A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $B^{-1}A^{-1} \times AB = I_n$, donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
- Par récurrence à partir de l'assertion précédente.
- $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$ et $A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$.

Donc A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

ATTENTION | A et B inversible ~~ne~~ $\Rightarrow$ A + B inversible.

IV.1 Inversibilité des matrices d'ordre 2

Pour les matrices carrées de taille 2, il est facile de trouver une condition nécessaire et suffisante simple d'inversibilité ainsi qu'une formule pour le calcul de l'inverse le cas échéant. Nous verrons plus tard dans l'année qu'une généralisation de ces résultats est possible pour les matrices carrées de taille quelconque, mais au prix d'un travail important...

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle *déterminant* de la matrice A , noté $\det(A)$, le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 22 : Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2$.

Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) :

Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), A^{-1} \text{ existe} \iff \det(A) \neq 0.$$

On a alors :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (\text{XIII.1})$$

Preuve : Comme la dimension de la matrice est petite, on peut le faire à la main et chercher une matrice

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ telle que :}$$

$$A \times B (= B \times A) = I_2.$$

Quatre inconnues à trouver, cherchons quatre équations à résoudre...

$$\begin{aligned} A \times B = I_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ces deux systèmes n'ont des solutions que si les vecteurs directeurs des droites qu'ils représentent ne sont pas colinéaires *i.e.*

$$ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Cette condition vérifiée, des combinaisons linéaires élémentaires donnent les solutions :

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc} \quad \text{et} \quad t = \frac{a}{ad - bc}.$$

On obtient alors la matrice B, inverse de A : $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

Réciproquement, il ne reste plus qu'à vérifier que $B \times A = I_2$. C'est le cas. !

Exemple 23 : Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. On calcule : $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.
2. La condition d'inversibilité remplie, on applique la formule (XIII.1) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $D = P^{-1}MP$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = PD^kP^{-1}$.

2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.

3. Calculer $M^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ et par associativité du produit matriciel.
2. Comme $\det(P) = 3 \neq 0$, $P \in \mathcal{G}_2(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Après calculs, on trouve $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$.

3. D'après la question (1), on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, M^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k + 2 & -(-2)^k + 1 \\ -2((-2)^k + 1) & (-2)^{k+1} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Méthode 3 (Calcul de la puissance d'une matrice) :

- Si D est diagonale avec $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors

$$D^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

- Si A est semblable à une matrice diagonale i.e. $\exists P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}.$$

IV.2 Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires**Théorème 13 (Matrice diagonale) :**

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 \in \mathbb{K}$.

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_i \neq 0$ et alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Preuve : Pas trop dur avec la proposition (7).

L'inversibilité des matrices diagonales était facile à étudier. Qu'en est-il, plus généralement, des matrices triangulaires ?

Théorème 14 (Matrice triangulaire) :

Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^{-1} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Preuve : On se contente de considérer des matrices triangulaires supérieures, le cas inférieur s'en déduit par transposition.

La preuve se fait par récurrence sur la taille n des matrices concernées.

- Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est de la forme (a) pour un certain $a \in \mathbb{K}$, donc est inversible si, et seulement si $a \neq 0$, et dans ce cas comme voulu :

$$(a)^{-1} = (a^{-1}).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'équivalence vraie pour les matrices triangulaires supérieures de taille n .

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure i.e. $\mathcal{A}$ s'écrit, par blocs :

$$\begin{pmatrix} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (0) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) & d \end{pmatrix}.$$

- Si $\mathcal{A}$ est inversible alors il existe une matrice

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ B' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) & d' \end{pmatrix},$$

telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} = I_{n+1} &\iff \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + Cd' \\ dB' & dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}$ est inversible si

$$\begin{cases} dd' = 1 \implies d \neq 0 \text{ et, en particulier } d' = \frac{1}{d}. \\ dB' = 0_{1,n} \implies B' = 0_{1,n} \text{ car } d \neq 0. \\ AA' + \underbrace{CB'}_{B'=0_{1,n}} = I_n \iff AA' = I_n \implies A \text{ est inversible.} \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de A sont donc tous non nuls donc, avec $d \neq 0$, ceux de $\mathcal{A}$ aussi et la première implication est héréditaire.

- Réciproquement, si $\mathcal{A}$ a ses coefficients diagonaux non nuls alors $d \neq 0$ et A est inversible d'après l'hypothèse de récurrence. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \begin{pmatrix} A^{-1} & -\frac{1}{d}A^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -\frac{1}{d}AA^{-1}C + \frac{1}{d}C \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.\end{aligned}$$

On vérifie, de même, que $\begin{pmatrix} A^{-1} & -\frac{1}{d}A^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \mathcal{A} = I_{n+1}$ i.e. $\mathcal{A}$ est inversible et l'implication est prouvée.

En conclusion, on a prouvé que la propriété était héréditaire. Initialisée, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.3 Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *trace* de A et on note $\text{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exemples 24 :

- $\text{tr}(I_n) = n$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\text{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(A) = 0$.

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

Produit : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Preuve :

Linéarité : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)_{ii} && \text{(d'après la définition de tr)} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) && \text{(d'après les lois de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{)} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B). \end{aligned}$$

La trace est donc une application linéaire.

Produit : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^p (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque : La matrice carrée AB est de taille n tandis que BA est de taille p . Elles ont pourtant la même trace.

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est *semblable* à une matrice B i.e. il existe une matrice P inversible, dite de *passage*, telle que $A = P^{-1}BP$, on a alors :

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \operatorname{tr}((P^{-1}P)B) = \operatorname{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un *invariant de similitude*.

- C'est ce résultat qui motive la **définition (11)** seulement sur les matrices carrées.

En effet, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A à partir des relations $AB = I_n$ et $BA = I_p$, on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(I_p) = p.$$

Exemple 25 : L'équation matricielle $AB - BA = I_n$ d'inconnue $(A; B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ n'a pas de solution car pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(I_n).$$

Matrices

I/ Calculs matriciels

Exercice 1 : Effectuer le produit des matrices suivantes :

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 2-i & 0 \\ 3 & 3i \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction :

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$6. (10)$$

$$3. \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac \\ a+b+c & ab+bc+ac & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & ab+bc+ac & ab+bc+ac \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} -1-i & 1+2i \\ 11+4i & 9i \end{pmatrix}$$

$$8. \text{Non défini.}$$

Exercice 2 : Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$

1. Montrer G est stable par produit.

- Montrer que les matrices de G commutent.
- Montrer que les matrices de G sont inversibles et que leurs inverses sont des éléments de G .

Correction : Exercice trivial à savoir faire absolument.

- Soient $g_x = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g_y = \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux éléments de G .

$$\text{Alors } g_x g_y = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{x+y} \in G.$$

Donc, G est stable par produit.

- Le calcul précédent montre que $g_x g_y = g_{x+y} = g_{y+x} = g_y g_x$ i.e. le produit matriciel est commutatif sur G .
- Le même calcul montre encore que $\forall x \in \mathbb{R}, g_x g_{-x} = g_{-x} g_x = I_3$ i.e. tout élément de G est inversible d'inverse g_{-x} .

Commentaires : *On vient de montrer que $(G; \cdot)$ était un groupe commutatif.*

Exercice 3 : Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Application : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Correction : Après un raisonnement par analyse-synthèse, on trouve rapidement que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (A + A^T)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (A - A^T)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}.$$

Cette somme est clairement unique.

Commentaires : *Si vous avez assez de talent, intuition, métier, mémoire, chance pour trouver la forme demandée, le raisonnement par analyse-synthèse n'est pas nécessaire.*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

Correction : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.

Si A et B commutent alors $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA = AB$ et leur produit est symétrique.

Réciproquement, si $(AB)^\top = AB$ alors $B^\top A^\top = AB$, avec A et B symétriques, ceci s'écrit : $BA = AB$ et les deux matrices commutent.

Conclusion, le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

Exercice 5 : Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est aussi une matrice stochastique.
2. On pose $B = A^2$, $A_i = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} (a_{i,j})$, $a_i = \min_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} (a_{i,j})$ et A une matrice stochastique.

Montrer que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \leq b_{i,j} \leq A_i$.

Correction :

1. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques, $C = (c_{i,j})$ leur produit.

On a :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0.$$

Et,

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n c_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,j} \sum_{i=1}^n a_{i,k} = \sum_{k=1}^n b_{k,j} = 1.$$

Les $c_{i,j}$ étant tous positifs, chacun est plus petit que leur somme i.e. $c_{i,j} \leq 1$.

Le produit de deux matrices stochastiques est donc une matrice stochastique.

2. Soit $B = (b_{i,j})$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad b_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} \\ a_i \sum_{k=1}^n a_{k,j} &\leq b_{i,j} \leq A_i \sum_{k=1}^n a_{k,j} \\ a_i &\leq b_{i,j} \leq A_i. \end{aligned}$$

II/ Inverse et puissances de matrices

Exercice 6 :

1. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $A(\theta)^n$ pour $n \geq 1$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Calculer B^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} A(\theta) \times A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Bilan, $A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta + \theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $A(\theta)^n = A(n\theta)$.

- C'est bien sûr vrai pour $n = 1$.
- Fixons $n \geq 1$ et supposons que $(A(\theta))^n = A(n\theta)$ alors

$$(A(\theta))^{n+1} = A(\theta)^n \times A(\theta) = A(n\theta) \times A(\theta) = A(n\theta + \theta) = A((n+1)\theta)$$

- C'est donc vrai pour tout $n \geq 1$.

Commentaires :

- Comme $A(\theta') \times A(\theta) = A(\theta + \theta') = A(\theta) \times A(\theta')$, on peut en déduire que les matrices $A(\theta)$ et $A(\theta')$ commutent.
- Comme $A(\theta) \times A(-\theta) = A(0) = I_2$, on pourrait prolonger la dernière identité à $n \in \mathbb{Z}$ mais seulement après avoir définie l'inverse d'une matrice :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (A(\theta))^n = A(n\theta).$$

- En terme géométrique $A(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose une rotation d'angle θ avec une rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

2. Même combat, même résultat.

Exercice 7 (Inverse de matrice et polynôme annulateur) :

1. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer B^2 et montrer que $B^2 = 2I_3 - B$.
 (b) En déduire que B est inversible et calculer B^{-1} .
2. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- (a) Montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.
 (b) En déduire que C est inversible et calculer C^{-1} .
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- (a) Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$.
 (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Correction :

1. (a) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2I_3 - B$.

(b) D'après la question précédente,

$$B^2 = 2I_3 - B \iff B \cdot \frac{1}{2}(B + I_3) = \frac{1}{2}(B + I_3) \cdot B = I_3.$$

Donc, B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}(B + I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Le raisonnement est identique donc, en plus rapide :

(a) $C^2 = 3C - 2I_3$.

(b) $C^2 = 3C - 2I_3 \iff C \cdot \frac{1}{2}(3I_3 - C) = \frac{1}{2}(3I_3 - C) \cdot C = I_3$ donc C est inversible et

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Toujours pareil :

(a) $A^3 - 7A^2 + 13A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 21 & 5 & 87 \\ 22 & -7 & 70 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 18 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3I_3$.

(b) $A^3 - 7A^2 + 13A = 3I_3 \iff A \cdot \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) = \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) \cdot A = I_3$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Puissances de matrice et réduction) :

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer $T = P^{-1}AP$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ (où a_n est une suite que l'on déterminera plus loin).
3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}u_n$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. En déduire a_n en fonction de n .
4. En déduire A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Après calcul, $P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P = I_3$ donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Après calcul toujours, } T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Pour } n = 1, T = \begin{pmatrix} 2^1 & a_1 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_1 = 1 \text{ et } T^1 \text{ est bien de la forme souhaitée.}$$

Supposons cette forme pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & a_{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{n+1} = 2a_n + 2^n.$$

La forme est bien héréditaire. Initialisée pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 2^n. \end{cases}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2^{-n}a_{n+1} = 2^{-n}(2a_n + 2^n) = 2^{-(n-1)}a_n + 1 = u_n + 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = a_1 = 1$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + (n-1) = n$ et $a_n = n2^{n-1}$.

4. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \underbrace{PT^nP^{-1}}_{\substack{\text{à montrer} \\ \text{par récurrence}}} = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 2^{n-1} - 2^{2n-1} & 2^{n-1} + 2^{2n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-1} - 2^{2n-1} & (n-1)2^{n-1} + 2^{2n-1} & -(n-1)2^{n-1} + 2^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Racine carrée de matrice) : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3 .
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $A = aN^2 + bN + cI_3$.
3. Trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Correction :

1. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. La matrice N est donc nilpotente d'indice 3.
2. Il est assez simple de voir que $A = 2N^2 + N + I_3$.
3. Cherchons B sous la même forme que A i.e. $B = \alpha N^2 + \beta N + \gamma I_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$B^2 = A \iff (\alpha N^2 + \beta N + \gamma I_3)^2 = 2N^2 + N + I_3$$

Avec $N^3 = N^4 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\iff (2\alpha\gamma + \beta^2)N^2 + 2\beta\gamma N + \gamma^2 I_3 = 2N^2 + N + I_3 \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha\gamma + \beta^2 = 2 \\ 2\beta\gamma = 1 \\ \gamma^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{7}{8} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{7}{8} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve donc deux matrices B possibles (normal pour des racines carrées) :

$$B = \frac{7}{8}N^2 + \frac{1}{2}N + I_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Commentaires : Avec une matrice A triangulaire supérieure et la pseudo-stabilité des matrices triangulaires par produit, on aurait très bien cherché une matrice B sous la forme $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ telle que

$$B^2 = A \iff \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma + \beta^2 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aurait trouvé alors rapidement α puis les autres coefficients.

Exercice 10 (Puissances de matrice et binôme de Newton) :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

- (a) Montrer que B est nilpotente d'indice 3.
 (b) En déduire A^n pour tout entier n .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. (a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

La matrice B est donc nilpotente d'indice 3.

(b) Les matrices B et I_3 commutent donc le binôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, A^n &= (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} B^k \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. **Première méthode :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Deuxième méthode : On a $A = I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$.

$$\text{Donc } A^n = (J + I_3)^n = I_3 + nJ = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (Puissances de matrice et binôme de Newton bis) :

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = n^{k-1}J$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, on pose $V = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & b & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer V^n .

Correction :

1. Par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = n^{k-1}J$.
2. On a $V = (a-b)I_n + bJ$. Comme les matrices I_n et J commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} V^n &= (bJ + (a-b)I_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} J^k \\ &= (a-b)^n I_n + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} n^{k-1} \right) J \\ &= (a-b)^n I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (bn)^k \right) J \\ &= (a-b)^n I_n + \left(\frac{1}{n} \left((a-b) + nb \right)^n - \frac{(a-b)^n}{n} \right) J \\ &= (a-b)^n I_n + \frac{(a + (n-1)b)^n - (a-b)^n}{n} J. \end{aligned}$$

Exercice 12 (★) Puissances de matrice et binôme de Newton ter) :

1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer N^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $a \in \mathbb{K}$, on pose $T = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - (a) Déterminer T^n .
 - (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit inversible.
 - (c) Développer $\left(I_n + \frac{1}{a}N\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}N\right)^k$ et en déduire l'inverse de T en fonction des puissances de N .
3. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, mêmes questions avec $S = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction :

1. Par récurrence, on montre que la surdiagonale de 1 monte d'un cran à chaque puissance de N donc $N^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. N est nilpotente d'indice n .

2. Pour $a \in \mathbb{K}$, on pose $T = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Si $a = 0$, on retrouve la première question. On suppose dorénavant $a \neq 0$.

Comme $T = aI_n + N$ et que les matrices I_n et N commutent, le binôme de Newton s'écrit :

$$T^n = (aI_n + N)^n = a^n \left(I_n + \frac{1}{a}N \right)^n = a^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{a^k} N^k = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{a^k} N^k$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{n-1}a \\ 0 & a^n & na^{n-1} & \dots & \binom{n}{n-2}a^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

(b) D'après la question précédente, T^n est une matrice triangulaire supérieure donc inversible si, et seulement si $a \neq 0$.

(c) Avec les polynômes annulateurs, on a déjà $T^{-1} = \frac{1}{a^n} T^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{a^k} N^{k-1}$.

On peut faire mieux avec la formule de Bernoulli avec $T - aI_n = N$ nilpotente :

$$I_n = I_n^n + \left(\frac{1}{a}N \right)^n = \underbrace{\left(I_n + \frac{1}{a}N \right)}_{= \frac{1}{a}T} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}N \right)^k.$$

$$I_n = T \cdot \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}N \right)^k$$

On trouve alors $T^{-1} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}N \right)^k$.

3. $S = aI_n + bN$ avec aI_n et bN qui commutent encore.

$$S^n = (aI_n + bN)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{n-1}ab^{n-1} \\ 0 & a^n & nba^{n-1} & \dots & \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a^n & nba^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Inversible si, et seulement si $a \neq 0$. Pour déterminer l'inverse, on écrit $I_n = \frac{1}{a}S - \frac{b}{a}N$, d'où, avec la formule de Bernoulli :

$$I_n = I_n^n + \left(\frac{b}{a}N \right)^n = \underbrace{\left(I_n + \frac{b}{a}N \right)}_{= \frac{1}{a}S} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{b}{a}N \right)^k.$$

$$I_n = S \cdot \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{b}{a}N \right)^k$$

On trouve alors $S^{-1} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{b}{a}N \right)^k$.

III/ Compléments

Exercice 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp(A) = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Correction :

1. Comme A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton.

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{0 \leq i} \frac{(A+B)^i}{i!} = \sum_{0 \leq i} \left(\frac{1}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} A^k B^{i-k} \right) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq i} \frac{1}{i!} \binom{i}{k} A^k B^{i-k} \\ &= \sum_{0 \leq k} \left(\sum_{k \leq i} \frac{1}{i!} \binom{i}{k} A^k B^{i-k} \right) = \sum_{0 \leq k} \frac{1}{k!} A^k \sum_{k \leq i} \frac{1}{(i-k)!} B^{i-k} \\ &= \sum_{0 \leq k} \frac{1}{k!} A^k \sum_{0 \leq i} \frac{1}{i!} B^i = \exp(B) \sum_{0 \leq k} \frac{1}{k!} A^k = \exp(A)\exp(B). \end{aligned}$$

Commentaires : *Rien de tout cela n'est possible si A et B ne commutent pas. Plus tard, vous montrez que la nilpotence n'est pas nécessaire. À notre niveau, nous en avons besoin ici pour maintenir les sommes finies et se permettre les interversions.*

2. Soit A nilpotente. Elle commute avec son opposée $-A$ et on a :

$$\exp(A)\exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = I_n.$$

Donc, $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Exercice 14 (★) Matrice de Vandermonde^[2] des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :

Soit $V = \left(v_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, ($n \geq 2$).

1. Calculer $V\bar{V}$.
2. En déduire que V est inversible et donner son inverse.

[2]. **Alexandre-Théophile Vandermonde** (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1er janvier 1796, est un mathématicien français.

Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne **Bézout** et Antoine **Lavoisier**. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant utilisés en *interpolation polynomiale*.

Correction : Soient k et l deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$.

Le coefficient de W_{kl} de $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $l^{\text{ème}}$ colonne de $V\bar{V}$ est tel que :

$$\begin{aligned} W_{kl} &= \sum_{j=1}^n V_{kj} V_{jl} = \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(l-1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^{(j-1)(k-1-l+1)} = \sum_{j=1}^n \omega^{(j-1)(k-l)} \\ &= \sum_{j=1}^n (\omega^{(k-l)})^{(j-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^{(k-l)})^j. \end{aligned}$$

1^{er} cas : Si $k = l$ alors $W_{kl} = \sum_{j=1}^n 1 = n$.

2^{ème} cas : Si $k \neq l$ alors remarquons tout d'abord que :

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ -n \leq -l \leq -1 \end{cases} \implies -(n-1) \leq k-l \leq n-1.$$

L'entier $k-l$ ne peut donc être un multiple de n . Étant aussi non nul, on en déduit que $\omega^{k-l} \neq 1$.

Reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométriques de raison $\omega^{k-l} \neq 1$ et de premier terme 1, on a :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega^{k-l})^j = \frac{1 - (\omega^{k-l})^n}{1 - \omega^{k-l}} = \frac{1 - 1^{k-l}}{1 - \omega^{k-l}} = 0.$$

En résumé, seuls les coefficients diagonaux de $V\bar{V}$ sont non nuls égaux à n i.e. $V\bar{V} = nI_n$.

En particulier, après avoir vérifié que $\bar{V}V = nI_n$, la matrice V est inversible d'inverse $V^{-1} = \frac{1}{n}\bar{V}$.

Un cas particulier de matrice de Vandermonde apparaît dans la formule de la *transformée de Fourier* discrète, où les coefficients (α_i) sont les racines complexes de l'unité.

En notant $\omega_j = \omega^{j-1}$, la matrice V s'écrit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 & \dots & \omega_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tous j et k , $v_{jk} = \omega_j^{k-1}$.

Matrices

On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

1. $I = \llbracket 1; 4 \rrbracket$.

2. $a_{1,3} = 3$.

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

4. $\sum_{k=1}^3 a_{2,k} = a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = 4 + 5 + 6 = 15$.

5. $\forall 1 \leq i \leq 4, \forall 1 \leq j \leq 3, a_{i,j+1} = a_{i,j} + 1$.

6. $A = (3i + j - 3)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

Une seule réponse exacte par question.

On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1. Les E_{ij} sont appelées **matrices élémentaires**.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 3×2 . Alors le produit AB

(a) ☐ est de taille 3×3

(c) ☐ est de taille 12×6

(b) ☒ est de taille 4×2

(d) ☐ n'a pas de sens

2. Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

(a) ☐ $2E_{11}$

(b) ☒ $E_{11} + E_{22}$

(c) ☐ $2E_{22}$

(d) ☐ $E_{12} + E_{21}$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut :

(a) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(b) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Laquelle des matrices suivantes vérifie $M^2 = -I_2$?

- (a) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☒ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

- (a) ☐ A est triangulaire supérieure (c) ☒ $c = 0$ et $a = d$
 (b) ☐ $a = c = d = 0$ (d) ☐ $b = 0$

6. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

- (a) ☐ $A^\top$ est diagonale (c) ☐ $A - I$ est diagonale
 (b) ☒ A^2 est diagonale (d) ☐ $2A$ est diagonale

7. Si A est une matrice carrée, $A^\top A$ est toujours

- (a) ☐ triangulaire supérieure (c) ☐ antisymétrique
 (b) ☐ diagonale (d) ☒ symétrique

8. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

- (a) ☐ triangulaire inférieure (c) ☐ symétrique
 (b) ☒ triangulaire supérieure (d) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible

9. L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

- (a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ (c) ☒ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. On calcule tous les produits $E_{12}E_{ij}$. Combien de ces produits sont nuls ?

- (a) ☐ $n^2 - n$ (b) ☐ n^3 (c) ☐ aucun car E_{12} est non nulle (d) ☒ n

11. Si M est une matrice carrée telle que $M^\top = 2M$, alors

- (a) ☐ les coefficients diagonaux de M sont non nuls (c) ☒ M est nulle
 (b) ☐ M est une matrice diagonale (d) ☐ M est une matrice symétrique

12. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

- (a) ☒ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ (c) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
 (b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$ (d) ☐ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$

Matrices

On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

1. $J = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

2. $a_{3,1} = 7$.

3. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$.

4. $\sum_{k=1}^4 a_{k,2} = a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$.

5. $\forall 1 \leq i \leq 4, \forall 1 \leq j \leq 3, a_{i+1,j} = a_{i,j} + 3$.

6. $A = (3i + j - 3)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

Une seule réponse exacte par question.

On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1. Les E_{ij} sont appelées **matrices élémentaires**.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 2×3 . Alors le produit AB

(a) ☐ est de taille 3×3

(c) ☐ est de taille 4×2

(b) ☒ n'a pas de sens

(d) ☐ est de taille 12×6

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - 3I_3)(M - 2I_3)(M - I_3)$ vaut :

(a) ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(c) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Laquelle des matrices suivantes vérifie $M^2 = I_2$?

(a) ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

- (a) ☒ $b = 0$ et $a = d$ (c) ☐ $a = c = d = 0$
 (b) ☐ A est triangulaire supérieure (d) ☐ $b = 0$

5. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

- (a) ☐ $A^\top$ est diagonale (c) ☒ A^2 est diagonale
 (b) ☐ $A + I$ est diagonale (d) ☐ A^{-1} est diagonale

6. Si A est une matrice carrée, $A^\top - A$ est toujours

- (a) ☐ triangulaire supérieure (c) ☒ antisymétrique
 (b) ☐ diagonale (d) ☐ symétrique

7. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure inversible, son inverse est

- (a) ☐ triangulaire supérieure (c) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible
 (b) ☐ symétrique (d) ☒ triangulaire inférieure

8. L'inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est

- (a) ☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (c) ☒ $\begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$
 (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

- (a) ☐ $2E_{11}$ (b) ☐ $2E_{22}$ (c) ☒ $E_{11} + E_{22}$ (d) ☐ $E_{12} + E_{21}$

10. On calcule tous les produits $E_{ij}E_{12}$. Combien de ces produits sont nuls ?

- (a) ☐ $n^2 - n$ (b) ☐ n^3 (c) ☒ n (d) ☐ aucun car E_{12} est non nulle

11. Si M est une matrice carrée telle que $M^\top = -2M$, alors

- (a) ☐ les coefficients diagonaux de M sont non nuls (c) ☐ M est une matrice symétrique
 (b) ☐ M est une matrice diagonale (d) ☒ M est nulle

12. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule AB avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

- (a) ☒ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ (c) ☐ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$
 (b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$ (d) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

Racines $p^{\text{èmes}}$ de l'identité

Partie 1 : Théorème de Bezout

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Les entiers a et b sont dits premiers entre eux si $\text{pgcd}(a; b) = 1$. Le but de cette partie est d'établir le théorème de Bezout :

Théorème 1 :

Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

1. Montrer que s'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
2. On prouve la réciproque de cette propriété.

On suppose donc que a et b sont premiers entre eux et on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers relatifs de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs,

$$\text{i.e. } \mathcal{E} = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

- (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément que l'on notera n_0 .
- (b) On note r (respectivement r') le reste de la division euclidienne de a (respectivement b) par n_0 . Montrer que r et r' appartiennent à $\mathcal{E}$.
- (c) En déduire que $r = r' = 0$.
- (d) Conclure.

Partie 2 : Racines de l'identité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à 2. On note

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^p = I_n\}.$$

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Montrer que si $A \in \mathcal{R}_n(p)$ alors $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.

2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$.

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A . En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.

3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{R}_n(p)$ forme un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.
4. On considère q un entier naturel supérieur ou égal 2 et on note $d = \text{pgcd}(p; q)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{R}_n(d) \subset \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$.
 - (b) Justifier qu'il existe deux entiers u et v tels que $pu + qv = d$.
 - (c) En déduire que $\mathcal{R}_n(d) = \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$.

Racines $p^{\text{èmes}}$ de l'identité

Partie 1 : Théorème de Bezout

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Les entiers a et b sont dits premiers entre eux si $\text{pgcd}(a; b) = 1$. Le but de cette partie est d'établir le théorème de Bezout :

Théorème 1 :

Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

1. Montrer que s'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

Correction : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur commun à a et b . Alors d divise $au + bv = 1$ par compatibilité de la division avec les combinaisons linéaires entières et $d \leq 1$.

Donc $d = 1$, le seul diviseur commun à a et b est 1. Les entiers a et b sont premiers entre eux.

Commentaires : Si vous ne précisez pas que ce sont des combinaisons linéaires **ENTIÈRES**, c'est faux.

De plus, considérer un diviseur d de a et b ne constitue pas un raisonnement par l'absurde puisque l'on prouve de manière directe que, dans ce cas, $d = 1$.

2. On prouve la réciproque de cette propriété.

On suppose donc que a et b sont premiers entre eux et on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers relatifs de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs,

$$\text{i.e. } \mathcal{E} = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

- (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément que l'on notera n_0 .

Correction : Comme a est strictement positif, $1 \times a + 0 \times b \in \mathcal{E} \cap \mathbb{N}^*$ qui est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément n_0 i.e.

$$\exists (n_0, u_0, b_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^2, au_0 + bv_0 = n_0 \in \mathcal{E} \cap \mathbb{N}^*.$$

Commentaires : Je rappelle qu'un ensemble non vide et minoré n'a pas forcément de plus petit élément et même pas de borne inférieure si on n'est pas dans $\mathbb{N}$ ici ou dans $\mathbb{R}$ par exemple. Pour être clair :

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément i.e. un entier qui est aussi un minimum.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure i.e. un réel qui est un minorant mais pas forcément un minimum.

- (b) On note r (respectivement r') le reste de la division euclidienne de a (respectivement b) par n_0 . Montrer que r et r' appartiennent à $\mathcal{E}$.

Correction : On sait qu'il existe un (unique) couple $(q; r_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} a &= qn_0 + r_0 \text{ et } 0 \leq r_0 < n_0 \\ r &= a - qn_0 \\ &= a - q(au_0 + bv_0) \\ &= \underbrace{(1 - qu_0)}_{\in \mathbb{Z}} a + \underbrace{-qv_0}_{\in \mathbb{Z}} b \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Le raisonnement est identique pour r' .

(c) En déduire que $r = r' = 0$.

Correction : Si r (ou r') était différent de 0 alors $r \in \mathcal{E} \cap \mathbb{N}^*$ et $r < n_0$ ce qui contredirait la définition de n_0 .

Donc $r = r' = 0$ i.e. n_0 est un diviseur commun à a et b . Il divise donc $\text{pgcd}(a; b) = 1$ et $n_0 = 1 \in \mathcal{E}$.

Il existe donc bien un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $au + bv = n_0 = 1$.

3. Conclure.

Correction : Conclusion, a et b premiers entre eux $\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$.

Partie 2 : Racines de l'identité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à 2. On note

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^p = I_n\}.$$

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Montrer que si $A \in \mathcal{R}_n(p)$ alors $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.

Correction : Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. On a ainsi $A^p = I_n$. Dès lors, on peut écrire

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^p &= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)}_{p \text{ fois}} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP \dots P^{-1}A(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1} \underbrace{A \dots A}_{p \text{ fois}} P = P^{-1}A^p P = P^{-1}I_n P = P^{-1}P = I_n. \end{aligned}$$

Commentaires : *Ou à démontrer plus rigoureusement par récurrence. Si on ne vous demande pas de le faire ainsi, vu la simplicité du résultat, vous pouvez écrire directement qu'il est clair que $(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^p P$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

On a ainsi $(P^{-1}AP)^p = I_n$ donc $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.

2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$.

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A . En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.

Correction : Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. On a $A^p = I_n$ que l'on peut réécrire

$$AA^{p-1} = A^{p-1}A = I_n.$$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^{p-1}$.

Il s'ensuit

$$(A^{-1})^p = (A^{p-1})^p = A^{p(p-1)} = (A^p)^{p-1} = I_n^{p-1} = I_n.$$

Donc, $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.

3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{R}_n(p)$ forme un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Correction : Soit $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{R}_n(p) &\iff A^p = I_n \iff \begin{pmatrix} a_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1^p = 1 \\ \vdots \\ a_n^p = 1 \end{cases} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \in \mathbb{U}_p. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{R}_n(p)$ est l'ensemble des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité au nombre de p .

C'est donc un ensemble fini de cardinal p^n .

4. On considère q un entier naturel supérieur ou égal 2 et on note $d = \text{pgcd}(p; q)$.
(a) Montrer que $\mathcal{R}_n(d) \subset \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$.

Correction : Soit $A \in \mathcal{R}_n(d)$ i.e. $A^d = I_n$.

On a $d|p$ et $d|q$ donc il existe deux entiers p' et q' tels que $p = dp'$ et $q = dq'$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } A^p &= A^{dp'} = (A^d)^{p'} = I_n^{p'} = I_n \text{ donc } A \in \mathcal{R}_n(p) \\ \text{et } A^q &= A^{dq'} = (A^d)^{q'} = I_n^{q'} = I_n \text{ donc } A \in \mathcal{R}_n(q). \end{aligned}$$

Conclusion, $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$ i.e. $\mathcal{R}_n(d) \subset \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$.

- (b) Justifier qu'il existe deux entiers u et v tels que $pu + qv = d$.

Correction : Comme $d = \text{pgcd}(p; q)$, il existe deux entiers p' et q' premiers entre eux tels que $p = dp'$ et $q = dq'$.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que $p'u + q'v = 1$.

En multipliant cette relation par d , il vient

$$dp'u + dq'v = d \iff pu + qv = d.$$

- (c) En déduire que $\mathcal{R}_n(d) = \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$.

Correction : Montrons $\mathcal{R}_n(d) = \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$ par double inclusion.

On a déjà établi $\mathcal{R}_n(d) \subset \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$ à la question (4a) .

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$ i.e. $A^p = I_n$ et $A^q = I_n$.

D'après la question (4b) , il existe deux entiers u et v tels que $d = pu + qv$.

On peut alors réécrire :

$$A^d = A^{pu+qv} = A^{pu} A^{qv} = (A^p)^u (A^q)^v = I_n^u I_n^v = I_n \iff A \in \mathcal{R}_n(d).$$

On a ainsi établi $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) \subset \mathcal{R}_n(d)$.

Finalement, $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d)$.

Suites

1. Généralités sur les suites réelles

- Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.
- Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

- Limite d'une suite réelle
 - Suite convergente, divergente. *Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.*
 - Limite finie ou infinie d'une suite.
 - Unicité de la limite.
 - Toute suite convergente est bornée. *Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.*
 - Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
- Passage à la limite d'une inégalité large. Limite et inégalités strictes.
- Existence d'une limite par encadrement et comparaison.

Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$, où (ε_n) converge vers 0.

2. Suites extraites (*Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.*)

- Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
- Utilisation pour montrer la divergence d'une suite : Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ .
- Théorème des suites adjacentes.

3. Suites monotones : Théorème de la limite monotone.

4. Suites complexes

- Brève extension des définitions et résultats précédents.
- Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

5. Suites particulières : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites réelles et complexes

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I^{er} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et $\frac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right).$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV^{ème} siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur *convergence*.

C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».

Mais elles se font refouler à l'entrée...^[1]

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

CONTENU

I	Suites numériques	854
I.1	Vocabulaire et généralités	854
I.2	Exemples	856
I.3	Suites bornées	857
I.4	Variations	860
II	Comportement asymptotique des suites	862
II.1	Convergence et divergence	862
II.2	Limite et relation d'ordre	870
II.3	Composition par une fonction	872
II.4	Opérations sur les limites	873
II.5	Suites extraites	878
III	Théorèmes d'existence de limites	879
III.1	Théorème d'encadrement	879
III.2	Théorème de la limite monotone	884
IV	Suites adjacentes	887
IV.1	Théorème des suites adjacentes	887
IV.2	Approximation décimale	889

Comme toujours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Notation toute personnelle : Dans tout ce chapitre, nombre de prédicats, de définitions et de propositions ne sont vrais ou ne nécessitent d'être vrais qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Afin d'alléger les énoncés sans perdre en généralité, je noterai parfois $\mathbb{N}_{n_0} = \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$ l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Ainsi, une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ signifiera qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Rang qui importe peu.

I/ Suites numériques

I.1 Vocabulaire et généralités

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

À chaque indice $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé terme de rang n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0 .

ATTENTION

$u_n \neq (u_n)_{n \in \mathbb{N}} !$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

- de manière *explicite* : $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

Le terme de rang n est directement obtenu en fonction de n .

C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle que l'on cherchera à obtenir le plus souvent.

- de manière *récurrente* : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}. \end{cases}$

Le terme de rang $n+1$ est obtenu en fonction du terme précédent.

C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite et souvent celle qu'obtiennent nos chers physiciens.

Il pourra arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faudra préciser les valeurs de u_0 et u_1 , voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare!).

Un prochain chapitre sera consacré aux suites récurrentes dite d'ordre r .

- de manière *implicite* : $e^{u_n} - u_n - 2 = n$.

Le terme de rang n est défini comme solution d'une équation voire en fonction de u_{n+1} .

Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs et on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite comme pour les primitives. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

L'ensemble des suites réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel.

Définition 2 (Stabilité algébrique) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La *suite somme* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)_n = u_n + v_n.$$

- La *suite produit* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite notée $(u \times v)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

- La *suite produit* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la suite notée $(\lambda u)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$

- Les *suites parties réelle et imaginaire* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\operatorname{Re}(u))_n = \operatorname{Re}(u_n) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im}(u))_n = \operatorname{Im}(u_n).$$

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe). En considérant la suite produit, c'est même une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative mais non intègre.

I.2 Exemples

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r , appelé *raison*, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q , appelé *raison*, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe un couple $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0, u_1 = 1, \dots, u_n = n, \dots$ et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0, u_1 = 3, \dots, u_n = 3n, \dots$ sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 : $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, \dots, u_n = 2^n \dots$ est une suite géométrique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

Figure XIV.1 – $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 1 : Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que la suite de terme général $t_n = \frac{z_n}{2^n}$ est arithmétique et en déduire une expression explicite de z_n .

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = \frac{z_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{z_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} z_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} z_n = \frac{1}{2}$.

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = \frac{z_0}{2^0} = 2$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 2 + \frac{1}{2}n$.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 2^n t_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}.$$

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\frac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$. $u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Figure XIV.2 – $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

I.3 Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- *majorée* s’il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
- *minorée* s’il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les majorants (ou minorants) d’une suite sont, par définition des constantes.
Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :

- La suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1 . Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
En revanche, elle n’est pas majorée (et donc non bornée).
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 1 (Encadrer une suite) :

Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - M$.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d’un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in]0; 1[$ fixé.

1. Montrer que $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha^k)$ est bornée.

Correction :

1. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $] -1 ; +\infty[$ donc sa courbe est au-dessous de ses tangentes. En particulier, celle en 0 d'équation $y = x$.

On en déduit le résultat.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\alpha \in]0 ; 1[$, $\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $1 + \alpha^k > 0$. On peut composer par la fonction $\ln$ et utiliser le résultat précédent :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \alpha^k) \leq \sum_{k=1}^n \alpha^k = \alpha \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée.

Méthode 2 (Suite non majorée) :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

- On se donne un réel A quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geq A$.

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) : Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

On dit que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* si la suite réelle positive $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 3 : $(e^{in})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\iff (\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Exercice 3 : Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

Correction : La suite nulle est clairement bornée donc l'ensemble des suites bornées est non vide.

La stabilité vient des propriétés du module :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées respectivement par M_u et M_v , $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| M_u$.
2. $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq |\lambda| M_u + M_v$.
3. $|u_n v_n| \leq |u_n| |v_n| = M_1 M_2$.

C'est bien le résultat voulu.

On dit que l'ensemble des suites bornées muni des trois opérations $+$, $\times$ et de la multiplication par un scalaire vue comme loi externe est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

Définition 6 (Relation de domination) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = O(v_n)$.

Cette notation est dû à Landau ^[2] :

- On lit aussi « u_n est un grand O de v_n . »
- On écrit aussi $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.

Remarque : D'après la **proposition (1)**,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \iff \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad |u_n| \leq M |v_n|.$$

Exemples 4 : — Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = O(1)$.

— $2n^2 + 1 = O(n^2)$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

— $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{cases} \implies u_n + v_n = O(w_n).$

— $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w'_n) \end{cases} \implies u_n \times v_n = O(w_n \times w'_n).$

[2]. **Edmund Georg Hermann Landau** (Berlin, 14 février 1877 - Berlin, 19 février 1938) est un mathématicien allemand juif, auteur de 253 publications mathématiques, en grande partie sur la théorie des nombres.

I.4 Variations

Définition 7 (Suites monotones) : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq u_{n+1}$.
- *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq u_{n+1}$.
- *stationnaire* si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

On parlera aussi de suites *strictement monotones* lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

ATTENTION

1. La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.
2. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni monotones, ni rien.

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n, u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}, u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \prod_{k=0}^n (100 - k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exercice 4 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Correction : Pour tout n supérieur à p , $\frac{n!}{p!} = (p+1) \dots (n-1)n \in \mathbb{N}$ et $\frac{2\pi n!}{p!} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ donc $u_n = 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir du rang p .

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
 - si $r \geq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
 - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante,
 - si $r \leq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
 - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
 - si $u_0 \geq 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (strictement si $u_0 > 0$).
 - Si $q = 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à u_0 .
 - Si $u_0 \geq 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).
 - Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Remarques :

- Une suite arithmétique est donc monotone dans tous les cas.
- Si elle n'est pas constante, une suite géométrique est toujours strictement monotone.

Comparez deux termes d'une suite est difficile à faire directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1.

Méthode 3 (Montrer qu'une suite est croissante) :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Méthode 4 (Montrer qu'une suite est croissante) :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, ...
- On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur i.e. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exercice 5 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

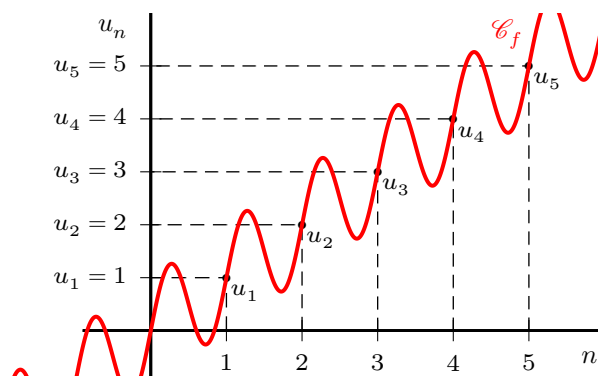
Soient f une fonction définie sur $[n_0; +\infty[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction $f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + \sin(2\pi n) = n^a$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.



a. $\sin(0\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = \sin(4\pi) = \dots = 0!$

II/ Comportement asymptotique des suites

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque $n \rightarrow +\infty$ i.e. son *comportement asymptotique*.

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.

II.1 Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow u_n \in V_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- ◇ On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *divergente* vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow u_n \geq A.$$

- ◇ On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *divergente* vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \Rightarrow u_n \leq A.$$

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge* si elle ne converge pas.

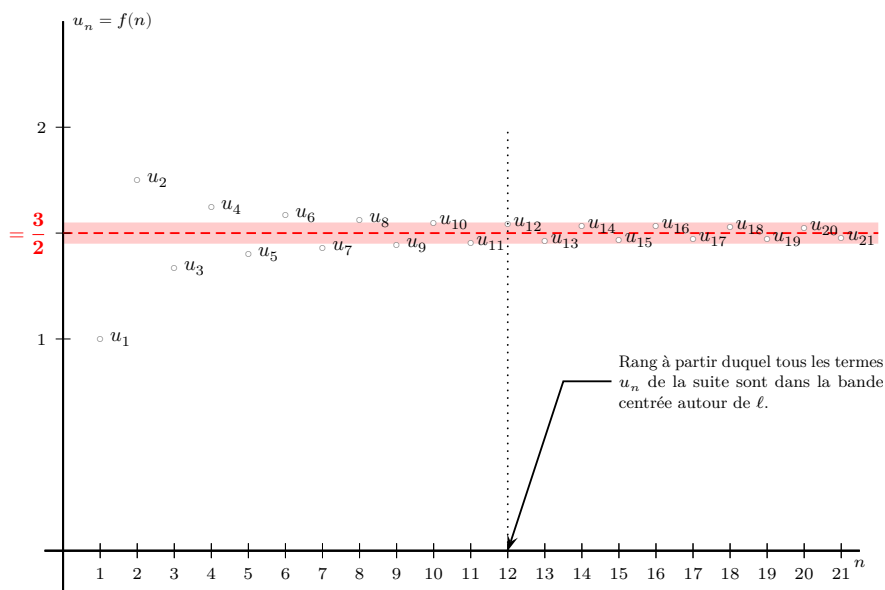


Figure XIV.3 – La suite définie par $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \frac{3}{2}$.

Rappel 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

ATTENTION

Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

Exemple 6 : La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1 .

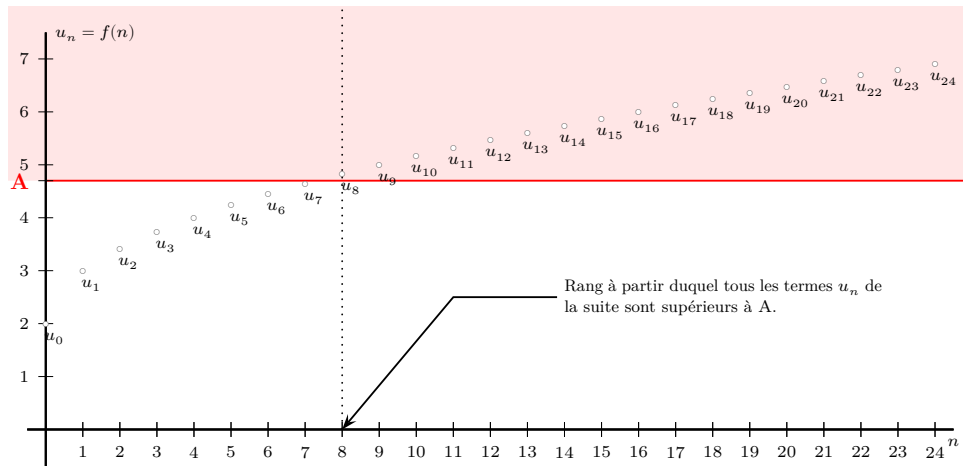


Figure XIV.4 – La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 : La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a; a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

La définition (9) se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

Définition 9 (Limite d'une suite complexe) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

ATTENTION

La notion de suites complexes divergeant vers l'infini ne veut rien dire dans $\mathbb{C}$!

On déduit immédiatement de la définition (9) la proposition ci-dessous :

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$

Preuve :

1. C'est la définition avec $\ell = 0$.
2. itou
3. $(\Rightarrow) : \forall n \in \mathbb{N}, |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \leq |u_n - \ell|$ et $|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| \leq |u_n - \ell|$.
 $(\Leftarrow) : |u_n - \ell| = \sqrt{(\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell))^2 + (\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell))^2}$.

Corollaire 5.1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|.$$

ATTENTION

La réciproque est fautive. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve : D'après l'inégalité triangulaire $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \dots$

Exercice 6 :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.
 Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$.
 Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors elle est constante.

Correction :

1. $(\Leftarrow) :$ Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire, et montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Par définition d'une suite stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq N, u_n = a$.

On a donc $\forall n \geq N, |u_n - a| = 0$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$.

On a prouvé que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$. La suite converge donc.

$(\Rightarrow) :$ On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrons qu'elle est stationnaire.

Soit ℓ sa limite.

— Montrons que $\ell \in \mathbb{Z}$.

Par l'absurde, supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$. En ce cas, on a $[\ell] < \ell < [\ell] + 1$.

On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ ne contienne aucun entier.

C'est absurde car il doit contenir tous les u_n .

On peut prendre $\varepsilon = \min\left(\frac{\ell - [\ell]}{2}, \frac{[\ell] + 1 - \ell}{2}\right)$.

— On sait désormais que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrons qu'elle est stationnaire en ℓ .

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{10}$ i.e. $u_n \in \left[\ell - \frac{1}{10}, \ell + \frac{1}{10}\right]$.

Mais par ailleurs, l'intervalle $u_n \in \left[\ell - \frac{1}{10}, \ell - \frac{1}{10}\right]$ ne contient qu'un seul entier (ℓ) et u_n est entier.

D'où $\forall n \geq N$, $u_n = \ell$. On a prouvé que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien stationnaire.

Remarque : Le résultat est bien entendu faux pour les suites réelles : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, or elle n'est pas stationnaire.

Proposition 6 :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ .

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq \max(n_0; n_1)$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \varepsilon$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Proposition 7 :

- $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
- $\forall q \in]-1; 1[$, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve :

- (a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{e^{p \ln(n)}} \leq \varepsilon \iff_{\varepsilon > 0} p \ln(n) \geq -\ln(\varepsilon) \iff_{p > 0} n \geq e^{-\frac{1}{p} \ln(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$.

- (b) Soit $A \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralités, on peut supposer $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|n^p| \geq A \iff e^{p \ln(n)} \geq A \iff_{A > 0} p \ln(n) \geq \ln(A) \iff_{p > 0} n \geq e^{\frac{1}{p} \ln(A)} = \sqrt[p]{A}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \sqrt[p]{A} \right\rfloor + 1$.

- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $q = 0$, le résultat est clair. Sinon, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implique

$$|q^n| = |q|^n \leq \varepsilon \iff n \ln |q| \leq \ln(\varepsilon) \iff_{|q| < 1} n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln |q|}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln |q|} \right\rfloor + 1$.

Exemple 8 : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}\right)^n$ converge vers 0.

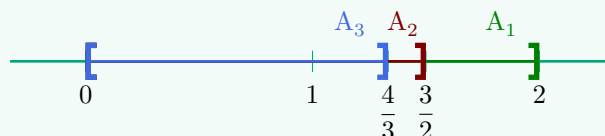
Corollaire 7.1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (vers $\pm\infty$) si, et seulement si $r \neq 0$.

Exercice 7 : Montrer que $[0; 1] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0; 1 + \frac{1}{n}\right]$.

Correction :

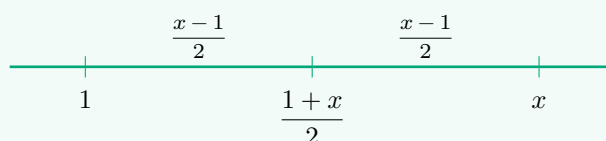


Soit $x \in [0; 1]$. Alors $0 \leq x \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in A_n \iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. On a donc $[0; 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Par l'absurde, supposons que $x > 1$ et posons $\varepsilon = \frac{x-1}{2} > 0$.



Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut trouver un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que $n \geq n_0 \implies \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Or, pour $n \geq n_0$, on a alors $x \leq 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon = 1 + \frac{x-1}{2} = \frac{1+x}{2} < x$ et la contradiction.

Donc, $x \leq 1$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset [0; 1]$.

Par double inclusion, on a donc montré que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = [0; 1]$.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites ^[3] alors elle diverge.

Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ qui possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 est divergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ , $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- Par convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ' , $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_0 = \max(n_1; n_2)$, $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$. Majoration vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ell = \ell'$.

Si vous n'êtes pas convaincus, posez $\varepsilon < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$.

Exercice 8 (Série harmonique) : On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'écrire :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq (2n - (n+1) + 1) \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. Supposons que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ alors c'est également le cas de $(H_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n} - H_n = 0$ ce qui est impossible avec la minoration précédente.

La suite $(H_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger. Elle diverge.

Remarque : À ce stade, on ne sait pas encore si elle admet une limite.

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

[3]. En mathématiques, on parle plutôt de valeurs d'adhérence. C'est mieux que de parler de plusieurs limites alors que l'on vient de dire qu'elle était unique.

1. On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n .
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\exists n_0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{Or, } c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n u_k$$

$$|c_n| \leq \frac{\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right|}{n} + \frac{\left| \sum_{k=n_0}^n u_k \right|}{n}$$

$\forall n \geq n_0$, on a :

$$\leq \frac{\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right|}{n} + \underbrace{\frac{n - n_0 + 1}{n}}_{=1 - \frac{n_0-1}{n} \leq 1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right|$ est un réel et donc, à partir d'un certain rang n_1 , $\frac{\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui assure que,

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |c_n| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

2. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite de termes $u_n - \ell$ qui converge vers 0.

La suite de termes $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell$ converge alors vers 0 i.e. $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers ℓ .

3. La réciproque est fautive : il suffit de considérer la suite de termes $(-1)^n$ qui diverge alors qu'elle converge en moyenne vers 0.
4. **Remarque :** Il est sous-entendu ici que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle.

Soit $A > 0$.

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2A$.

Pour tout $n > n_0$, on a alors :

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n u_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + 2A \frac{n - n_0 + 1}{n}.$$

Or,

— $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc est supérieur à $-\frac{A}{2}$ à partir d'un certain rang n_1 .

— $2 \frac{n - N + 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ donc est supérieur à $\frac{3}{2}$ à partir d'un certain rang n_2 .

Finalement, $n \geq \max(n_0, n_1, n_2) \Rightarrow c_n \geq A$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$.

Remarque : La démonstration est facilement adaptable pour $\ell = -\infty$ ce qui permet de donner la version définition du théorème de Césaro :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors elle converge également en moyenne vers la même limite.

Commentaires : Une autre démonstration dans le cas où $\ell = +\infty$ plus jolie mais plus fine.

Pour tout réel $A > 0$, il existe une suite $a_n \leq u_n$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2A$ (par exemple : $a_n = \min(u_n, 2A)$).

La suite des moyennes de (a_n) converge vers $2A$ d'après la question 2, et minore celle des moyennes c_n de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui sont donc $> A$ à partir d'un certain rang.

Ceci, valant pour tout $A > 0$, prouve que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a bien pour limite $+\infty$.

5. Si la suite de termes $a_{n+1} - a_n$ converge vers ℓ alors elle y converge en moyenne i.e. la suite de termes $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \frac{a_n}{n} - \frac{a_0}{n}$ converge vers ℓ .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{n} = 0$, d'après les théorème sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \ell.$$

Commentaires : Cette propriété est connue sous le nom de « lemme de l'escalier » : a_n représentant la hauteur de la $n^{\text{ème}}$ marche. Si la hauteur entre chaque marche converge vers ℓ alors la hauteur de la $n^{\text{ème}}$ marche tend vers $n\ell$.

II.2 Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Preuve : Posons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq 1$.

D'où $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Posons $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |\ell|)$.

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

ATTENTION

La réciproque est encore fautive toujours en considérant $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exemple 9 : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1 + i)^n$ diverge.

Petit corollaire intéressant pour montrer, par exemple, qu'une suite convergeant vers un réel non nul est non nulle du même signe à partir d'un certain rang.

Corollaire 9.1 :

1. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists m \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \geq m > 0.$$

2. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists M \in \mathbb{R}_-, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq M < 0.$$

Preuve :

1. — Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il suffit de prendre $A = 1$ pour avoir $u_n \geq 1 > 0$ dès que $n \geq n_0(A)$ donné par la divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, prenons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$.

$$\text{Il existe alors un rang } n_0 \text{ au delà duquel } -\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2} \implies 0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n.$$

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

2. Identique

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et $m, M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$ alors $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n < M$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$ alors $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n > m$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le corollaire (9.1) aux suites $u_n - M$ et $u_n - m$.

Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq v_n \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Remarque : Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Exemple 10 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leq A$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq A$.

ATTENTION

C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) < 0$.

Le **théorème (10)** affirme alors que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

II.3 Composition par une fonction

Une suite, n'étant qu'une fonction particulière, on peut traduire les théorèmes sur les limites de composée :

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I .

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

— ...

Exemples 12 :

- ◇ $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.
- ◇ Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n .
- ◇ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ◇ $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad u_n^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

ATTENTION

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u_n^{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0 , 0^∞ et ∞^∞ que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = e^{n \ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 12.1 (Limites usuelles et croissances comparées) :

Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1; 1[$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = 0$

II.4 Opérations sur les limites

Un peu d'histoire : Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII^{ème} siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :

- Montrer l'efficacité de notre définition de limite.
- Justifier la validité de notre intuition.
- Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) : On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

■ Pour $a \in \mathbb{R}$:

- ◇ $a + (+\infty) = +\infty$
- ◇ $a + (-\infty) = -\infty$
- ◇ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- ◇ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

■ Pour $a \neq 0$:

- ◇ $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
- ◇ $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- ◇ $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
- ◇ $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

■ On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:

$$\diamond a \times 0^+ = 0^{\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\diamond \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\diamond a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$$

$$\diamond \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\diamond \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

Les quotients $\frac{a}{b}$ s'obtiennent comme $a \times \frac{1}{b}$ si l'opération est définie.

ATTENTION

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $\frac{0^\pm}{0^\pm}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

Les règles suivantes sont données pour des suites dont on sait déjà qu'elles admettent une limite. Ils ne donnent pas de résultat sur les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ directement, mais sur des suites fabriquées avec des opérations usuelles entre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ' .

Somme :

Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$.

Multiple :

Si $\lambda \cdot \ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot \ell$.

Produit :

Si $\ell \times \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n \times v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \times \ell'$.

Inverse :

Si $\frac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$.

Quotient :

Si $\frac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\ell'}$.

Remarque : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un *espace vectoriel*.

Dans la même idée, l'opérateur $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

ATTENTION

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 13 :

$$\blacksquare u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty \implies \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\blacksquare u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \left| \frac{1}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Preuve :**Somme :**

- Somme de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Il suffit alors de prendre $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2} \right); n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$.

- Somme d'une limite finie ℓ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - 1.$$

De même, pour $n \geq n_1(A - \ell + 1)$, $v_n > A - \ell + 1$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$u_n + v_n \geq (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A.$$

- Somme de deux limites $+\infty$: Soit $A > 0$ et posons $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\frac{A}{2} \right); n_{0,v_n} \left(\frac{A}{2} \right) \right)$.

Alors, pour $n \geq N$, $u_n + v_n \geq A$.

Produit et multiple :

- Produit de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'|.$$

Or, d'après la **proposition (9)**, la suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, disons par un réel $K > 0$.

Il suffit alors de prendre $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2K} \right); n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2|\ell|} \right) \right)$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de prendre respectivement $n_{0,v_n} \left(\ell', \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \right)$ ou $n_{0,u_n} \left(\ell, \frac{\varepsilon}{2(K + 1)} \right)$ sans que l'inégalité finale ne soit changée.

- Produit d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0 \left(\frac{\ell}{2} \right)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

De même, il existe un rang $n_1 \left(\frac{2A}{\ell} \right)$ à partir duquel $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens strictement positives, on a donc :

$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A.$$

- Produit de deux limites $+\infty$: Soit $A > 0$ et posons $N = \max \left(n_{0,u_n} \left(\sqrt{A} \right); n_{0,v_n} \left(\sqrt{A} \right) \right)$.

Alors, pour $n \geq N$, $u_n v_n \geq A$.

Il suffira de considérer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme la suite constante à λ pour avoir la limite de la suite $(\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour peu que $\lambda \cdot \ell$ soit défini dans $\mathbb{R} \cup \{0^+, 0^-\}$.

Quotient :

- Inverse d'une limite non nulle ℓ : Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ d'après le [corollaire \(9.1\)](#).

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|}.$$

Par définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_1 \implies |u_n - \ell| \leq \min \left(\frac{|\ell|}{2}; \frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2} \right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, pour $n \geq n_1$:

$$||\ell| - |u_n|| \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \implies |u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Il suffit alors de prendre $N = \max(n_0; n_1)$, pour avoir :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leq \frac{\frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

- Inverse d'une limite infinie : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} u_n = +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$ à partir duquel $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

- Inverse d'une limite nulle d'une suite strictement positive : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $A > 0$. Il existe un rang $n_1 \left(\frac{1}{A} \right)$ à partir duquel $|u_n| < \frac{1}{A}$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A.$$

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \ell) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + \ell) - n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n - n)$ n'a pas de limite.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} \times n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

ATTENTION

$(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{\ln(n) + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction : Il suffit de factoriser numérateur et dénominateur par la partie prépondérante en $+\infty$ et d'utiliser les théorèmes de croissances comparées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^2}{e^n} \frac{\frac{\ln(n)}{n^2} + 1 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}.$$

1. Les théorèmes sur les croissances comparées assurent la convergence vers 0 de la première fraction :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$

2. Les théorèmes sur les croissances comparées et les limites de sommes assurent la convergence du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction vers 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} + 1 + \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n} = 1.$$

3. Les théorèmes sur les limites de quotients puis celles des produits fournissent le résultat final :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} \frac{\frac{\ln(n)}{n^2} + 1 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = 0 \times 1 = 0.$$

II.5 Suites extraites

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale.

Définition 11 (Suite extraite) : Une *sous-suite* d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, appelée aussi *suite extraite*, est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, on garde les termes d'indice impair, $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$, ...

Lemme 1 :

Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Théorème 14 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ .

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ .

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l'exercice (11) .

Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, la réciproque est beaucoup plus délicate. Une suite extraite ne pouvant, par nature, fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Preuve : Relativement évident à partir du lemme (1) .

S'il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ alors, on a aussi $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$.

Remarque : La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Pour cette suite, la suite extraite des indices pairs a pour limite 1 et la suite des indices impairs a pour limite -1 . alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permette de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Exemple 16 : Si $x \in]-1; 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $(x^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exercice 11 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \frac{n}{9} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

1. Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction : $u_{9n^2} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_{(3n+1)^2} = \left(n^2 + \frac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \frac{6n+1}{9} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le cas le plus important est la possibilité de récupérer la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide des suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de ses indices pairs et impairs.

Théorème 15 :

Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Remarque : On peut facilement prolonger ce résultat à toute famille de suites extraites dont les indices forment une partition de $\mathbb{N}$.

III/ Théorèmes d'existence de limites

L'existence d'une limite n'est JAMAIS acquise.

Les théorèmes qui suivent gagnent à être connus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

III.1 Théorème d'encadrement

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$ et si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leq u_n \leq M_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Théorème de minoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leq u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, u_n \leq M_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $V_\ell = [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ un voisinage de ℓ .

La suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Il existe donc un rang $n_1(\varepsilon, \ell, m_n)$ à partir duquel tous les termes $m_n \in V_\ell$.

De même pour la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe un rang $n_2(\varepsilon, \ell, M_n)$ à partir duquel tous les termes $M_n \in V_\ell$.

Pour $n \geq N = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a donc

$$\ell - \varepsilon \leq m_n \leq u_n \leq M_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent donc aussi à V_ℓ à partir d'un certain rang N i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Théorème de minoration : Soit A un réel quelconque.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$, il existe un entier $n_1(A, m_n)$ tel que si $n \geq n_1$ alors $m_n \in [A; +\infty[$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_n$.

Donc si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $A \leq m_n \leq u_n \in [A; +\infty[$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Identique.

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en découle.

ATTENTION

Exercice 12 (Série harmonique) : On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned} H_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &\geq 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

2. La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas majorée. Comme elle est clairement croissante, d'après le théorème de limite monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Preuve :

Si $q > 1$: $\forall n \geq 2$, $q^n = ((q-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (q-1)^k = 1 + n(q-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ d'après le **théorème (16)** de comparaison.

Si $|q| < 1$: Il suffit de poser $Q = \frac{1}{|q|}$. Comme $-1 < q < 1$ alors $Q > 1$.

D'après la démonstration précédente, la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

D'après les relations sur les limites de quotients, la suite $\left(\frac{1}{Q^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et le résultat est prouvé.

Si $q = 1$: Relativement évident.

Si $q < -1$: Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(q^{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc divergente.

Exemple 17 (Le grand classique) : Si $x \in]-1; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_0 q^n$. Le théorème précédent permet donc de trouver sa limite :

Corollaire 17.1 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

— Si $q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le **théorème (16)** d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.2 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Preuve : Soit donc K un majorant de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a immédiatement $0 \leq |\varepsilon_n u_n| \leq K|\varepsilon_n|$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} K|\varepsilon_n| = 0$, d'après le théorème d'encadrement on obtient le résultat.

Exercice 13 : On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ .

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où $\ell = 1$.
4. Déterminer la nature des suites $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (où $a > 0$) et de $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction :

1. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, en posant $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2} > 0$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell + 1}{2} < 1.$$

En posant $\ell' = \frac{\ell + 1}{2} < 1$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq \ell' u_n$.

1^{ère} méthode : $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq \ell' u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{\ell'^{n+1}} \leq \frac{u_n}{\ell'^n}$.

La suite $\left(\frac{u_n}{\ell'^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc bornée car positive.

De plus, $\ell' \in]0; 1[$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell'^n = 0$.

On conclut avec le **corollaire (17.2)** en remarquant que $u_n = \left(\frac{u_n}{\ell'^n}\right) \times \ell'^n$.

2^{ème} méthode : À partir de l'inégalité $u_n \leq \ell' u_{n-1}$, on obtient :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad 0 < u_n \leq \ell' u_{n-1} \leq \ell'^2 u_{n-2} \leq \dots \leq \ell'^{n-n_0} u_{n_0} = (\ell'^{n_0} u_{n_0}) \times \ell'^n.$$

De même que précédemment, $\ell' \in]0; 1[$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell'^n = 0$ et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

2. Le raisonnement est identique mais en minorant par une suite géométrique divergente.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2} > 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon = \frac{\ell + 1}{2}.$$

Posons $\ell' = \frac{\ell + 1}{2}$:

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n \geq \ell' u_{n-1} \geq \ell'^2 u_{n-2} \geq \dots \leq \ell'^{n-n_0} u_{n_0} = (\ell'^{n_0} u_{n_0}) \times \ell'^n.$$

Comme $\ell' > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell'^n = +\infty$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = 1$ et $w_n = n$. Dans les trois cas, les quotients de deux termes consécutifs convergent vers 1 alors que les trois suites sont convergentes vers 0 et 1 ou divergentes vers $+\infty$.
4. Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

D'après la question 1, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque : Si $a = 0$, le résultat est évident et si $a < 0$, il suffit d'appliquer le même raisonnement à la suite $\left(\frac{|a|^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 entraînant encore celle de $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

D'après la question 2, la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Les résultats de l'exercice (13) sont à retenir :

Corollaire 17.3 (Comparaison exponentielle/factorielle) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Preuve : Si $x = 0$, le résultat est évident.

Si $x \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$.

On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Il existe donc un rang $n_0 \left(\frac{1}{2} \right)$ au delà duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'exercice (13), on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

III.2 Théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$. Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.

Preuve :

1. Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un réel strictement positif quelconque et notons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$, le plus petit des majorants de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a déjà, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M < M + \varepsilon$.
 - Tout intervalle $[M - \varepsilon; M + \varepsilon]$ contient au moins un terme u_p de la suite. Sinon, $M - \varepsilon < M$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que M soit le plus petit des majorants.
 - Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p \geq M - \varepsilon$.
 - L'intervalle $[M - \varepsilon; M + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang p . Ceci est vrai, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
 - La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite M .

La démonstration est identique pour une suite décroissante et minorée.

2. Soit A un nombre réel quelconque.

- Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geq A$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p \geq A$.

En conclusion, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, il suffira de considérer la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante puis appliquer les propositions précédentes.

ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leq M$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geq m$.

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite.

La question et la difficulté sont de la trouver.

Ici encore, on voit une grande différence entre la question de prouver l'existence théorique et la recherche pratique de la dite limite qui peut demander à mettre en œuvre une quantité incommensurable de techniques qui feront les joies de vos devoirs de concours.

Exemple 18 : La suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1.

Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

Exercice 14 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lfloor 2^k \sqrt{2} \rfloor}{3^k}$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a facilement :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\lfloor 2^{n+1} \sqrt{2} \rfloor}{3^{n+1}} \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Elle admet donc une limite (finie ou infinie).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sqrt{2}}{3^k} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \leq 3\sqrt{2}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée. Croissante et majorée, elle est donc convergente.

À retenir 1 :

Toutes les suites ne sont pas monotones.

Dans ce cas, on tentera d'utiliser le **théorème (16)** de comparaison et d'encadrement qui reste un outils extrêmement puissant, l'inégalité des accroissements finis à venir ou les questions de l'énoncé...

(Hors-Programme)

Théorème 19 (Bolzano-Weierstrass (Hors-Programme)) :

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Ce théorème est complètement **HORS-PROGRAMME**, interdiction absolue de l'utiliser en devoir.

Cependant, il répond magnifiquement à la question de la réciproque à la **proposition (9)** et vous évitera peut-être d'écrire des bêtises sans réfléchir.

Preuve : Soit donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

Pour une meilleure compréhension, voyons les entiers n comme des individus situés à une hauteur u_n .

- On dit que n a « vue sur mer » si : $\forall p \geq n, u_n \geq u_p$. i.e. n est plus haut que tous les entiers qui viennent après lui.
- On dit que n a « la vue bouchée » si : $\exists p \geq n, u_p > u_n$ i.e. il existe un entier p supérieur à n et situé plus haut que lui.

On pose alors $A = \{n \in \mathbb{N} / \forall p \geq n, u_n \geq u_p\}$ i.e. l'ensemble de tous les entiers n ayant vue sur mer.

Deux possibilités :

- Si A est infini i.e. il existe une infinité d'individus ayant vue sur mer, on considère la sous-suite contenant tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont l'indice appartient à A .

Cette sous-suite est, par construction, décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme ladite sous-suite est, par ailleurs, minorée puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle converge d'après le **théorème (17)** de convergence monotone.

- Si A est fini, considérons un n_0 plus grand que le plus grand élément de A i.e. on se place au-delà de ce nombre fini et tous les individus ont alors la vue bouchée. Puisque $n_0 \notin A$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_0} < u_{n_1}$: l'individu n_0 n'ayant pas vue sur mer, il existe certainement un individu n_1 plus haut que lui.

De même, $n_1 \notin A$, donc on peut trouver un entier n_2 tel que $u_{n_1} < u_{n_2}$. On fait de même pour l'individu n_1 qui n'a pas vue sur la mer donc un individu plus haut devant lui.

On construit ainsi petit à petit une suite d'indices correspondant à une sous-suite croissante de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Cette sous-suite étant majorée, elle converge.

Remarque : On a, en fait, démontré le résultat suivant : *de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Ce théorème est important car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie. On notera cependant que la démonstration ne donne pas de construction explicite de la sous-suite. On peut même ne pas être capable d'explicitement une telle sous-suite.

Un peu d'histoire : Il est patent que Bolzano n'a jamais énoncé le théorème dans lequel son nom est désormais lié à celui de Weierstrass. C'est à ce dernier que revient l'entière paternité du théorème. Cependant, il utilisa pour le démontrer les idées de Bolzano et la méthode qu'il avait mise au point pour son propre théorème trente années plus tôt.

Bernhard Bolzano mourut le 18 décembre 1848, à l'âge de 67 ans, des suites d'une tuberculose. C'est dans une lettre adressée à Georg Cantor en 1870 que Hermann **Schwarz** proposa, en reconnaissance du génie de Bolzano, de réunir son nom à celui de Weierstrass pour désigner le théorème.

IV/ Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) : Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

IV.1 Théorème des suites adjacentes

Montrons tout d'abord un résultat liminaire :

Lemme 1 :

Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (12) .

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $p \geq n_0$ tel que $u_p > v_p$ i.e. il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_p - v_p > A$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et pour tout entier supérieur ou égal à p , on aura alors $u_n - v_n \geq u_p - v_p > A$.

Choissant un réel strictement positif $\varepsilon < A$, l'intervalle $] -\varepsilon ; \varepsilon[$, centré en 0 ne contiendra pas les termes de la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \geq p$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

Théorème 20 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite. ^[4]

Preuve :

— Montrons tout d'abord que les deux suites sont convergentes.

Considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par exemple. Celle-ci étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

D'après le **lemme (1)**, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, u_n \leq v_n$.

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall n \geq p, v_n \leq v_p$ qui entraîne

$$\forall n \geq p, u_n \leq v_p.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée (à partir d'un certain rang).

D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite ℓ .

On montre de même que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ' .

— Enfin l'assertion $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0 \iff \ell - \ell' = 0$ entraîne que les deux suites convergent vers la même limite.

Remarque : En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ , respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Le **théorème (20)** a de nombreuses applications. La **proposition (21)** en est une. Nous en verrons bien d'autres dans les chapitres ultérieurs.

Exercice 15 :

1. Montrer que les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

2. En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

(b) $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} - \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{\leq (n+1)(n+1)}} \leq 0$ donc $(T_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n - S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes.

2. D'après la question précédente et le théorème du même nom, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est donc convergente.

[4]. Pas de soirée « *no limit* » pour nos suites adjacentes !

IV.2 Approximation décimale

Proposition 21 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x .

Le décimal a_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n *approximation décimale par excès* de x à 10^{-n} près.

Preuve : Par définition des parties entières, on a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

En particulier, on a déjà $a_n \leq x < b_n$.

En multipliant les inégalités par 10, on a aussi

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10. \quad (\text{XIV.1})$$

— $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ étant le plus grand entier inférieur à $10^{n+1} x$, l'inégalité de gauche donne :

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x \implies a_n \leq a_{n+1}.$$

— Par définition de $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ et d'après l'inégalité de droite de (XIV.1), on a aussi

$$\begin{aligned} \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 11 \\ &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies b_{n+1} \leq b_n. \end{aligned}$$

On a finalement obtenu la suite d'inégalités

$$a_n \leq a_{n+1} \leq x < b_{n+1} \leq b_n.$$

Autrement dit, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

De plus, $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$.

Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x puisque la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par x , mais également supérieure ou égale à x puisque $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par x .

Elle est donc nécessairement égale à x .

Exemple 19 : Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.

CONTENU

I	Suite arithmétique.	891
II	Suite géométrique	893
III	Suite aritmético-géométrique	894
IV	Suite homographique.	895
	<i>Feuille d'exercices n° 15 : Suites</i>	899
	<i>Test n° 18 : Suites I</i>	918
	<i>Test n° 19 : Suites II</i>	921
	<i>Devoir en temps libre n° 15 : Suite et série d'intégrales</i>	925
	<i>Correction</i>	926
	<i>Programme de Khôlle des semaines 13 et 14</i>	930
	Programme du chapitre XV	931

Dans tout ce document, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I/ Suite arithmétique

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0, u_1 = 1, \dots, u_n = n, \dots$
- La suite des multiples de 3 : $u_0 = 0, u_1 = 3, \dots, u_n = 3n, \dots$

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

Preuve : Histoire de réviser le raisonnement par récurrence, montrons le dernier résultat.

On suppose $m \in \mathbb{N}$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ plus grand que m .

1. Pour $n = m$, on a bien $(\cancel{X} - \cancel{X} + 1) \times \frac{u_m + u_m}{2} = 1 \times \frac{\cancel{X} u_m}{\cancel{X}} = u_m$ donc $\mathcal{P}_m$ est vérifiée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$, tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée i.e.

$$u_m + \dots + u_k = (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2}.$$

Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse i.e.

$$u_m + \dots + u_k + u_{k+1} = (k + 1 - m + 1) \times \frac{u_m + u_{k+1}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2} + u_{k+1} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + 2u_{k+1}}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + u_{k+1} + u_m + (k + 1 - m)r}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k + r) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_{k+1}) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 2)(u_m + u_{k+1})}{2}. \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée et la propriété est héréditaire.

3. La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée au rang m et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, plus grand que m .

Méthode 5 (Montrer qu'une suite est arithmétique) :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r , on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n .
- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

II/ Suite géométrique

Définition 2 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le nombre réel q est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\frac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$. $u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Preuve : De même pour une suite géométrique de raison q , le raisonnement est identique en plus facile.

On pose :

$$\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = u_m \times \frac{1-q^{n+1-m}}{1-q}$$

pour $q \neq 1$, le cas $q = 1$ étant trivial.

1. Pour $n = m$, on a : $u_m \times \frac{1-q^{m+1-m}}{1-q} = u_m \times \frac{1-q}{1-q} = u_m$. La propriété est initialisée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned} u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} + q^{k+1-m} u_m \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + (1-q)q^{k+1-m}}{1-q} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + q^{k+1-m} - q^{k+1-m+1}}{1-q} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+2-m}}{1-q}. \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$. La propriété est héréditaire.

3. Initialisée au rang m et héréditaire, la relation $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout $n \geq m$.

Méthode 6 (Montrer qu'une suite est géométrique) :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q , on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n .

— qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\frac{u_{m+1}}{u_m} \neq \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser le premier terme et la raison.
2. Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+2} u_k$.

III/ Suite arithmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) : Pour tout couple de scalaires $(a; b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite *arithmético-géométrique* toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - c) + c$ avec $c = \frac{b}{1-a}$.

Le réel c , solution de l'équation $x = ax + b$, est appelé *point fixe* de la suite.

Preuve :

1. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$ dont l'unique solution est

$$c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque : c est appelé « point invariant » ou « point fixe » de la fonction f associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : x \mapsto ax + b$.

On verra plus tard que c est l'unique candidat à la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On introduit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - c.$$

- (a) La $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

En effet, des deux équations :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ c & = & ac + b \\ \hline u_{n+1} - c & = & a(u_n - c) \end{array}$$

on obtient, par soustraction $v_{n+1} = av_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.

(b) On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - c).$$

3. On revient enfin à la suite initiale : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + c$.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad \text{avec} \quad c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque : La démonstration montre que la suite définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique de raison a .

Méthode 7 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n .

Exercice 2 : On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer les sommes $v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

IV/ Suite homographique _____

Définition 4 (Suite homographique) : On appelle suite *homographique* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

Remarque : Si $ad - bc = 0$, alors, de même que la fonction homographique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.

On commence ici aussi par chercher les *points fixes* de la fonction associée i.e. les solutions de l'équation :

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \iff cx^2 - (a - d)x - b = 0. \quad (\text{Hom})$$

Proposition 2 :

1. Si (Hom) admet deux racines distinctes α et β alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique de raison $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.
2. Si (Hom) admet une racine double γ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}$ est arithmétique de raison $r = \frac{2c}{a + d}$.

Preuve : Posons $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

1. Supposons que (Hom) admette deux racines distinctes α et β .

— Montrons tout d'abord que $\frac{h(x) - \alpha}{h(x) - \beta} = q \frac{x - \alpha}{x - \beta}$ où $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$ en utilisant que $h(\alpha) = \alpha$ et $h(\beta) = \beta$.

$$\begin{aligned}
 \frac{h(x) - \alpha}{h(x) - \beta} &= \frac{h(x) - h(\alpha)}{h(x) - h(\beta)} = \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d}} = \frac{\frac{(ax+b)(c\alpha+d) - (a\alpha+b)(cx+d)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\frac{(ax+b)(c\beta+d) - (a\beta+b)(cx+d)}{(cx+d)(c\beta+d)}} \\
 &= \frac{\frac{axc\alpha + \textcolor{teal}{ad}x + \textcolor{blue}{bc}\alpha + bd - axc\alpha - \textcolor{teal}{ad}\alpha - \textcolor{blue}{bc}x - bd}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\frac{axc\beta + \textcolor{teal}{ad}x + \textcolor{blue}{bc}\beta + bd - axc\beta - \textcolor{teal}{ad}\beta - \textcolor{blue}{bc}x - bd}{(cx+d)(c\beta+d)}} \\
 &= \frac{\frac{\textcolor{teal}{ad}(x-\alpha) - \textcolor{blue}{bc}(x-\alpha)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\frac{\textcolor{teal}{ad}(x-\beta) - \textcolor{blue}{bc}(x-\beta)}{(cx+d)(c\beta+d)}} = \frac{\frac{(x-\alpha)(ad-bc)}{(cx+d)(c\alpha+d)}}{\frac{(x-\beta)(ad-bc)}{(cx+d)(c\beta+d)}} \\
 &= \frac{(x-\alpha)(ad-bc)}{(cx+d)(c\alpha+d)} \times \frac{(cx+d)(c\beta+d)}{(x-\beta)(ad-bc)} \\
 &= \frac{x-\alpha}{x-\beta} \times \underbrace{\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}}_q = q \times \frac{x-\alpha}{x-\beta}
 \end{aligned}$$

— La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{h(u_n) - \alpha}{h(u_n) - \beta} = q \times \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = qv_n.$$

La suite v_n est donc géométrique de raison q et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$.

2. Supposons que (Hom) admette une racine double γ . Le raisonnement est identique.

— On montre tout d'abord que $\frac{1}{h(x) - \gamma} = \frac{1}{x - \gamma} + r$ avec $r = \frac{2c}{a + d}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(x) - \gamma} &= \frac{1}{h(x) - h(\gamma)} = \frac{1}{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\gamma+b}{c\gamma+d}} = \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{(ax+b)(c\gamma+d) - (cx+d)(a\gamma+b)} \\ &= \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{axc\gamma + \textcolor{teal}{ad}x + \textcolor{blue}{bc}\gamma + bd - axc\gamma - \textcolor{blue}{bc}x - \textcolor{teal}{ad}\gamma - bd} \\ &= \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{\textcolor{teal}{ad}(x-\gamma) - \textcolor{blue}{bc}(x-\gamma)} = \frac{(cx+d)(c\gamma+d)}{(ad-bc)(x-\gamma)} \\ &= \frac{c\gamma+d}{ad-bc} \times \frac{c(x-\gamma) + c\gamma + d}{x-\gamma} \\ &= \frac{(c\gamma+d)^2}{ad-bc} \times \frac{1}{x-\gamma} + \frac{c(c\gamma+d)}{ad-bc} \end{aligned}$$

À ce stade, c'est un peu technique : γ est la racine double de l'équation (Hom) i.e. , en se rappelant son cours de première, $\gamma = \frac{a-d}{2c}$. On obtient alors :

$$c\gamma + d = \frac{a+d}{2}. \quad (\text{XIV.1})$$

Comme le discriminant de (Hom) est nul, on obtient aussi $(d-a)^2 + 4\textcolor{teal}{bc} = 0$ dont on tire :

$$ad - \textcolor{teal}{bc} = ad + \frac{(d-a)^2}{4} = \frac{4ad + (d-a)^2}{4} = \frac{(d+a)^2}{4}. \quad (\text{XIV.2})$$

En combinant (XIV.1) et (XIV.2), on obtient alors :

$$\frac{(c\gamma+d)^2}{ad-bc} = \frac{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}{\frac{(a+d)^2}{4}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{c(c\gamma+d)}{ad-bc} = \frac{c \frac{a+d}{2}}{\frac{(a+d)^2}{4}} = \frac{2c}{a+d}. \quad (\text{XIV.3})$$

Avec (XIV.3), on obtient alors :

$$\frac{1}{h(x) - \gamma} = \frac{1}{x - \gamma} + \underbrace{\frac{2c}{a+d}}_r.$$

— La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \gamma} = \frac{1}{h(u_n) - \gamma} = \frac{1}{u_n - \gamma} + \frac{2c}{a+d} = v_n + r.$$

La suite v_n est donc arithmétique raison $r = \frac{2c}{a+d}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - \gamma}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $f(]-1; +\infty[) \subset]-1; +\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Suites

I/ Suites de référence et généralités

Exercice 1 : Montrer que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ vérifie $1 < u_n < 1 + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, $\forall n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n+1}$ est minorée par 0.
- la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, $\forall n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
- la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = -\sqrt{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \frac{1}{4}t_n - 2$ est minorée par -3 et majorée par -1 .
- la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k-1}$ est bornée.
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ vérifie $1 < u_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

- $u_n = n^2 - n + 2$
- $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
- $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2 + 1)\alpha_n \end{cases}$
- $k_n = \frac{n!}{n^n}$
- $e_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$

Correction :

- La fonction $t \mapsto t^2 - n + 2$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = -n < 0$ donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3} < 1$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq 0$ à montrer par récurrence $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = n^2 + 1 \geq 1$ donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 0$ et $\frac{k_{n+1}}{k_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$ donc $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$ et $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{2}{n+1}$ donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_0 = 1 < 3$ et, en supposant $0 < v_n < 3$, on a :

$$0 < 3 < 6 - v_n < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < \frac{3}{2} = \frac{9}{6} < v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$

D'après la question précédente, $6 - v_n > 0$ dont $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc elle converge vers une limite $\ell \leq 3$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier le sens de variation de la suite finie $\left(\binom{n}{k} \right)_{0 \leq k \leq n}$. En déduire $\max \left\{ \binom{n}{k}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\}$.

Correction : Tous les termes de la suite $\left(\binom{n}{k} \right)_{0 \leq k \leq n}$ sont strictement positifs donc

$$\forall k \leq n, \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n - k}{k + 1}.$$

La suite est donc croissante pour $n - k \geq k + 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$ puis décroissante.

$$\text{On en déduit que } \max \left\{ \binom{n}{k}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\} = \begin{cases} \binom{2p}{p-1} & \text{si } n = 2p \\ \binom{2p}{p} & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

Exercice 5 : Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

$$1. \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

Correction :

1. Cette suite est arithmético-géométrique.

On détermine λ tel que $\lambda = 3\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = -1$.

La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison 3.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \lambda = 3^n(u_0 - \lambda)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 1.$$

2. Cette suite est aussi arithmético-géométrique.

On détermine λ tel que $\lambda = \frac{1}{3}\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = 3$.

La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \lambda = \left(\frac{1}{3}\right)^n(u_0 - \lambda)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Exercice 6 : On considère la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

$$\begin{aligned} \text{Si un tel } \alpha \text{ existe alors } v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha(n+1) = 2u_n + \alpha n - 4n + \alpha + 3. \\ &= 2(u_n + \alpha n) - n(4 + \alpha) + \alpha + 3 \end{aligned}$$

Nécessairement, $\alpha = -4$.

Réciproquement ou dans la synthèse, on vérifie qu'alors $v_{n+1} = 2v_n - 1$ i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

2. La suite est classique, l'équation $x = 2x - 1$ admet 1 comme unique solution et la suite $(v_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 - 1 = -1$.

On en déduit, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2^n + 1$ et $u_n = -2^n - 4n + 1$.

Exercice 7 : On considère la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}i z_n + 5. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n . On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = -\left(\frac{1}{2}i\right)^n (4 + 2i)$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

Correction :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = z_{n+1} - 4 - 2i = \frac{1}{2}i z_n + 1 - 2i$.

$$= \frac{1}{2}i z_n - \frac{1}{2}i (2i + 4) = \frac{1}{2}i (z_n - z_A) = \frac{1}{2}i \times u_n$$
 - La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $u_0 = z_0 - z_A = -z_A$.

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\left(\frac{1}{2}i\right)^n (4 + 2i).$$

- Il suffit de montrer que $\frac{z_{n+4} - z_n}{z_n - z_A} \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} z_n = u_n + z_A &= \left(1 - \left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) (4 + 2i) \text{ et } z_{n+4} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}\right) (4 + 2i) \\ &= \left(1 - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) (4 + 2i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \frac{z_{n+4} - z_n}{z_n - z_A} &= \frac{\left(-\frac{1}{16} \left(\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) (4 + 2i)}{-\left(\frac{1}{2}i\right)^n (4 + 2i)} \\ &= \frac{-\frac{1}{16} \left(\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{2}i\right)^n}{-\left(\frac{1}{2}i\right)^n} = -\frac{15}{16} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points A , M_n et M_{n+4} sont donc alignés.

II/ Comportement asymptotique _____

Exercice 8 :

- Trouver une suite non majorée qui ne tende pas vers $+\infty$.
- Trouver une suite non croissante tendant vers $+\infty$.

3. Trouver une suite divergente qui ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Correction :

1. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = [1 + (-1)^n]n$ convient. Faites un schéma !
2. Considérer $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + (-1)^n$. Faites un schéma !
3. La suite $((-1)^n)$ diverge.

Or, elle est bornée, donc ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exercice 9 :

1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Correction : Tout repose sur une décomposition en éléments simples et les sommes télescopiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Commentaires : Vous montrerez plus tard et par bien des méthodes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10 : On considère la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! \geq 2^n$.
2. En déduire que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
3. Conclure quant à la convergence de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque : On montrera ultérieurement que cette suite converge vers e .

Correction :

1. $(n+1)! = 1 \times \underbrace{2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1)}_{n \text{ facteurs } \geq 2} \geq 2^n$.
2. $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3$.

La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée.

3. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement croissante, majorée, elle converge vers une limite inférieure à 3.

Exercice 11 (Exercice de BAC) : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1; 3] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

- (a) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1; 3]$.
 (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 - u_n.$$

- Vérifier que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{3}} v_n$.
- Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} v_n.$$

- Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^n$.

- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction :

- (a) Par récurrence, en n'oubliant pas de préciser la croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[1; 9]$.
 (b) Les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant tous strictement positifs d'après la question précédente,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{3}{u_n}} \geq 1 \text{ avec } u_n \leq 3.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \leq 3$.
- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{3u_n} = \frac{9 - 3u_n}{3 + \sqrt{3u_n}} = \frac{3}{3 + \sqrt{3u_n}} (3 - u_n) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{3}} v_n$.
 (b) Comme $1 \leq u_n$, $1 \leq \sqrt{u_n}$, le reste est affaire de minoration du dénominateur :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} v_n.$$

- Par récurrence, on a $v_0 \in [0; 1]$ et $2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^0 = 2 \geq 1$ donc la propriété est initialisée.

Supposant un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_n \leq 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^n$, on a :

$$0 \leq v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} v_n \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^n = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire et vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$, d'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ d'après le théorème sur les limites de sommes.

Exercice 12 : Pour chacune des suites dont on donne le terme général, étudier la convergence, et donner la limite lorsqu'elle existe.

On supposera $n \geq 1$ chaque fois que nécessaire.

$$1. u_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

$$2. u_n = n + \sin(n)$$

$$3. u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}.$$

$$4. v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$$

$$5. v_n = \frac{[nx]}{n}$$

$$6. w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$$

$$7. p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$8. u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

$$9. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$$

$$10. u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$11. u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$12. u_n = \sqrt[n]{n^2}$$

$$13. u_n = \frac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}}$$

$$14. u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$15. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$16. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Correction :

1. On a :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, |\cos n| \leq 1, \text{ donc } |u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ (en divisant par } n > 0)$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. $n - 1 \leq n + \sin(n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ dans le théorème de comparaison.

3. $\frac{3n-1}{2n} \leq \frac{3n+(-1)^n}{2n} \leq \frac{3n+1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ d'après le théorème d'encadrement.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in [1, n], \quad 2 \leq 2k \leq 2n$$

$$\text{donc } n^2 + 2 \leq n^2 + 2k \leq n^2 + 2n$$

$$\text{donc } 0 < \sqrt{n^2 + 2} \leq \sqrt{n^2 + 2k} \leq \sqrt{n^2 + 2n} \text{ car la fonction racine est croissante}$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

En additionnant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

C'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

On a :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

$$- \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$- \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

5. Par définition de la partie entière, $nx - 1 < [nx] \leq nx$ d'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} \leq v_n \leq x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x$ d'après le théorème d'encadrement.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad kx - 1 < [kx] \leq kx$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n (kx - 1) < \sum_{k=1}^n [kx] \leq \sum_{k=1}^n kx$$

i.e.

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n < \sum_{k=1}^n [kx] \leq \frac{n(n+1)}{2}x$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < w_n \leq \frac{(n+1)}{2n}x$$

On a :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < w_n \leq \frac{(n+1)}{2n}x$$

$$- \frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$$

$$- \frac{(n+1)}{2n}x = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{x}{2}$.

7. On a :

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\right) + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} \\ &\geq 1 + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{2}\right) = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$.

8. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile.

Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurrence $\frac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\frac{1}{(n+1)^2}$, donc

$$\frac{n}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

9. $\frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ d'après le théorème d'encadrement.
10. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{(n + \sqrt{n^2+1})^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
11. $0 < u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
12. $u_n = \sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{2}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ d'après les théorèmes de croissances comparées.
13. $-\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
14. $0 < u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \underbrace{\left(\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
15. $\frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
16. $\sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 13 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de limite ℓ . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$.

- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geq \frac{v_n + u_n}{2}$.
- En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Correction :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{n+1} u_{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) u_i \\ &= \frac{1}{n+1} u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n u_i \end{aligned}$$

La suite étant croissante, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_i \leq u_{n+1}$, d'où

$$\geq \frac{1}{n+1} u_{n+1} - \frac{1}{n+1} u_{n+1} = 0.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} u_i \right).$

De même que précédemment, $\forall i \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$, $u_i \geq u_n$. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} \geq \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2n - (n+1) + 1}{n} u_n \right) = \frac{v_n + u_n}{2}.$$

- Par définition, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_n = u_n \leq \ell$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante et majorée par ℓ , est convergente vers une limite ℓ' inférieure à ℓ .

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente. On aura :

$$\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2} \implies \ell' \geq \ell.$$

Par double inégalité, on en déduit que $\ell' = \ell$ i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$.
3. En déduire que la suite est convergente.

Correction :

1. Tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positifs et, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. On étudie la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$ et on montre qu'elle ne prend que des valeurs positives ou on invoque la convexité de la fonction exponentielle. Sa courbe est donc au-dessus de ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation $y = x + 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

3. D'après la question précédente, en remarquant que $1 + a^0 = 2$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n \leq \prod_{k=0}^n e^{a^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^n a^k\right) = \exp\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{1-a}\right).$$

On en déduit, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante, est majorée donc convergente.

Exercice 15 : Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$1. I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[.$$

$$3. I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right[.$$

$$2. I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}; 4 + n^2\right].$$

$$4. I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}; n\right].$$

Correction :

1. Montrons, par double inclusion que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[= \{3\}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} > 0$ il est déjà clair que $\{3\} \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[$.

Réciproquement, par définition de $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[, x \in I_1 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \leq x < 3 + \frac{1}{n^2}$.

Par passage à la limite, on obtient $x = 3$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[\subset \{3\}$.

Donc $I_1 = \{3\}$.

2. $I_2 = [-2; 5]$.

3. $I_3 = [0; 2]$.

4. Montrons que $I_4 =]1; +\infty[$ par double inclusion.

Soit $x \in]1; +\infty[$. Le côté archimédien de $\mathbb{R}$ nous assure l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n_0$ ou encore $x < n_0 = \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$.

Par convergence de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0, il existe $n_1(x)$ tel que $\forall n \geq n_1$,

$$\frac{1}{n} < \frac{x-1}{2} \implies 1 + \frac{1}{n} = \frac{1+x}{2} < x.$$

Pour $n \geq \max(n_0; n_1)$, $x \in \left[1 + \frac{1}{n}; n\right] \subset \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}; n\right]$.

Comme $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \geq 2$, $\left[1 + \frac{1}{n}; n\right] \subset]1; +\infty[$, l'inclusion réciproque est vraie.

Conclusion, $I_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}; n\right] =]1; +\infty[$.

Exercice 16 (Constante d'Euler – À faire absolument) : On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. (a) En déduire la limite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) Justifier que $\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On dit que H_n est équivalent à $\ln(n)$ et on note $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par $K_n = H_n - \ln(n)$ est convergente.

Sa limite, notée γ , est appelée constante d'Euler.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement, déterminer la nature des suites de terme général :

$$(a) R_{n,k} = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \text{ (pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ fixé).} \quad (b) B_n = \sum_{p=2}^n \frac{1}{p \ln p}.$$

Correction :

1. Plein de méthodes pour montrer cet encadrement classique dont la plus simple est d'étudier la fonction $\varphi : \ln(1+x) - x$ pour montrer, soit par convexité soit par l'étude du signe, que,

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x.$$

Commentaires : La courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ est sous sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \iff \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \iff \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Mais aussi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x+1} \in]-1; +\infty[$ et on a,

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) &\leq -\frac{1}{x+1} \iff \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \leq -\frac{1}{x+1} \iff \ln(x) - \ln(x+1) \leq -\frac{1}{x+1} \\ &\iff \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} \quad (\text{XIV.1})$$

Commentaires : À savoir refaire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'encadrement précédent, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En sommant pour $k \in [1; n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ H_n - 1 &\leq H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \\ H_n - 1 &\leq \ln(n+1) \leq H_n \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1. \quad (\text{XIV.2})$$

3. (a) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.
 (b) Reprenons l'encadrement (XIV.2) et $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \ln(n+1) &\leq H_n \leq \ln(n) + 1. \\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &\leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \\ \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} &\leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \\ 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1.$$

- (c) Commençons par regarder les variations de $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)}_{\geq \frac{1}{n+1} \text{ d'après (XIV.1)}} \leq 0.$$

La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

En reprenant encore l'encadrement (XIV.2) et par croissance de la fonction $\ln$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n) \iff 0 \leq K_n.$$

La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante et minorée, est convergente d'après le théorème de convergence monotone.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. C'est encore l'encadrement (XIV.1) :

(a) Pour $p \leq n+1$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fixé, on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

En sommant pour $p \in \llbracket n+1 ; kn \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p+1} &\leq \sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln(p) \leq \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \\ R_{n,k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{kn+1} &\leq \ln(kn+1) - \ln(n+1) \leq R_{n,k} \\ R_{n,k} - \frac{1}{n+1} &\leq \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) \leq R_{n,k} \\ \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) &\leq R_{n,k} \leq \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) = \ln(k)$, d'après le théorème d'encadrement, $(R_{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,k} = \ln(k).$$

(b) De même, pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \ln(p+1) - \ln(p) &\leq \frac{1}{p} \\ \frac{\ln(p+1)}{\ln(p)} - 1 &\leq \frac{1}{p \ln(p)} \\ \ln(p+1) - \ln(p) &= \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p \ln(p)} \end{aligned}$$

En sommant pour $p \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^n \ln(p+1) - \ln(p) &\leq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p \ln(p)} \\ \ln(n+1) - \ln(2) &\leq B_n \\ R_{n,k} - \frac{1}{n+1} &\leq \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) \leq R_{n,k} \\ \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) &\leq R_{n,k} \leq \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ est donc divergente et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty.$$

Exercice 17 (Suite de racines) :

- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=0}^n x^k = 2$ admet une unique racine positive notée r_n .
- Montrer que (r_n) converge et déterminer sa limite ℓ .

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0.$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel strictement positif r_n tel que $f(r_n) = 2$.

2. Par définition, $f_n(r_n) = \sum_{k=0}^n r_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} r_n^k + r_n^n$
 $2 = f_{n-1}(r_n) + r_n^n$
 $2 = f_{n-1}(r_{n-1})$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient :

$$f_{n-1}(r_n) - f_{n-1}(r_{n-1}) = -r_n^n < 0.$$

Donc $f_{n-1}(r_n) < f_{n-1}(r_{n-1})$ et, par stricte croissance de f_{n-1} , $r_n < r_{n-1}$, la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante. Minorée, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Comme $r_1 = 1$ et que la suite est strictement décroissante, $\forall n \geq 2$, $0 < r_n < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - r_n^n = 1$.

On a alors, en passant à la limite :

$$\frac{1}{1-\ell} = 2 \iff \ell = \frac{1}{2}.$$

La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 18 (Lemme de Fekete) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{qp} \leq qu_p$.
 (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall n \geq p$, $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M}{n}$.

On pourra utiliser la division euclidienne.

2. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure dont on justifiera l'existence.

Correction :

1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$:

Pour $q = 1$, c'est évident.

Supposons le résultat établi pour $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $u_{(q+1)p} \leq u_{qp} + u_p \leq (q+1)u_p$.

La propriété est donc vraie pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

- (b) Il existe un unique couple $(q; r) \in \mathbb{N}$ tel que $n = pq + r$ et $0 \leq r < p$.

$$\text{D'où, } \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_{pq}}{n} + \frac{u_r}{n} \leq \frac{qu_p}{n} + \frac{u_r}{n}.$$

$$\text{Posons } M = \max_{k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket} u_k \text{ et remarquons que } \frac{q}{n} = \frac{q}{pq+r} = \frac{1}{p} - \frac{r}{p(pq+r)} \leq \frac{1}{p}.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M}{n}.$$

2. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.

$$\text{Montrons que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{u_n}{n}\right).$$

$$\text{Par définition de } \ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{u_n}{n}\right), \text{ on a déjà, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ell \leq \frac{u_n}{n}.$$

$$\text{Et, pour tout } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \frac{u_p}{p} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Par convergence de } \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ vers } 0, \text{ il existe } n_0 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ tel que } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Finalement, } \forall n \geq n_0, \ell \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M}{n} \leq \ell + \varepsilon : \text{ la suite } \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers sa borne inférieure.}$$

Commentaires : Ce lemme établit avec très peu d'hypothèses la convergence de certaines suites de réels, dites sous-additives, sans aucune information sur la limite.

III/ Suites adjacentes

Exercice 19 : Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Correction :

$$\text{— } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$\text{— } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{-(n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3 n^2} \leq 0.$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$\text{— } v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Un peu d'histoire : La limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

On définit, lorsque c'est possible, la fonction de Riemann, notée ζ par

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

On vient donc de voir que ζ était définie en 3. On peut même déterminer une valeur approchée de $\zeta(3)$:

$$\zeta(3) \simeq 1,2020569$$

$\zeta(3)$ est appelée constante d'Apéry en l'honneur de Roger Apéry, qui a démontré en 1977 le théorème d'Apéry :

$\zeta(3)$ est irrationnel.

Fait remarquable pour la culture, pour tout entier $k > 1$, la probabilité pour que k entiers strictement positifs pris au hasard n'aient aucun facteur commun est égale à $\frac{1}{k} \zeta(k)$, en particulier, la probabilité pour trois nombres d'être premiers entre eux est égale à l'inverse de la constante d'Apéry, $\frac{1}{\zeta(3)} \simeq 0,831907 \dots$

En 2015, on connaissait à peu près 400 000 000 000 décimales de $\zeta(3)$.

Exercice 20 (Séries alternées) :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k.$$

- (a) Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- (b) En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite S .
- (c) Donner un encadrement de sa limite et montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S - S_n| \leq u_{n+1}$.

2. **Application :** Déterminer la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Correction :

1. (a) • Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0.$$

Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc respectivement décroissantes et croissantes.

• Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on a aussi $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc deux suites adjacentes.

- (b) D'après la question précédente, les sous-suites extraites d'indices pair et impair de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers celle-ci que l'on note dorénavant S .
- (c) Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant adjacentes, on en déduit également les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

On a alors

$$|S - S_{2n}| = S_{2n} - \inf_{\geq S_{2n+1}} S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}.$$

On procède de même pour $|S - S_{2n+1}|$ à partir de $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ i.e. $|S - S_{2n+1}| \leq u_{2n+2}$.

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S - S_n| \leq u_{n+1}$.

2. **Application :** La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ est à termes positifs et décroissante vers 0.

D'après la question précédente, la suite $(H'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Commentaires : $(H'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'appelle la *série harmonique alternée qui converge a contrario de sa consœur non alternée* $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui diverge.

Exercice 21 :

- Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
- (a) On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{1-x} dx$. Calculer I_0 et montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 (b) Montrer que $I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 (c) En déduire que $u_n = e - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- En déduire que e est irrationnel.

Correction :

- Trois points à montrer :

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \text{ donc la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0 \text{ donc la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers la même limite.

- (a) $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = e - 1.$

$$\text{Sur } [0; 1], 0 \leq x^n e^{1-x} \leq e \text{ donc, par croissance de l'intégrale, } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 dx = \frac{e}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après les théorèmes d'encadrement, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{x^k}{k!}$ et $x \mapsto e^{1-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Une intégration par parties s'écrit :

$$I_{k-1} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{1-x} dx = \left[\frac{x^k}{k!} e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^k}{k!} e^{1-x} dx = \frac{1}{k!} + I_k.$$

$$\text{Donc, } \forall k \in \mathbb{N}^*, I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k!}.$$

- (c) Il suffit de sommer les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n I_{k-1} - I_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \iff I_n - I_0 = u_n \iff u_n = e - I_n.$$

Comme $u_0 = 0 = e - I_0$, cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les théorème sur les limites de sommes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

Commentaires : Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq e \leq v_n$ est une approximation de e à une précision plus petite que $\frac{1}{n(n!)}$.

On a, par exemple, $u_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{3} \simeq 2,67$ est une approximation de e à une précision inférieure à $\frac{1}{18}$.

3. Par l'absurde supposons que $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

On a $u_q \leq e \leq v_q$ avec u_q est un rationnel qui peut donc s'écrire sous la forme $\frac{N}{q!}$, $N \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$u_q = \frac{N}{q!} < e = \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!} = \frac{N}{q!} + \frac{1}{qq!} \text{ ou } N < p(q-1)! < N + \frac{1}{q} < N + 1.$$

L'entier $p(q-1)!$ est donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs N et $N + 1$. Impossible !

Exercice 22 (Moyenne arithmético-géométrique) : Soient $0 \leq b \leq a$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra (ou on démontrera) que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout entier n .

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y , on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq v_n$, $u_n \geq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geq v_n$.

3. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.

4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.

5. Écrire une fonction Python nommée `moyenne(a,b,ecart)` qui donne un encadrement de $M(a, b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.

Correction :

- Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ et de développer cette inégalité.
- On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n \geq v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$.

De plus, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n.$$

De même,

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n^2} = v_n.$$

3. On sait déjà que $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$. De plus,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$

Puisque $0 \leq v_n \leq u_n$ et par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \geq v_n$. On en déduit que

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2} (u_n - v_n).$$

4. De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n} (u_0 - v_0).$$

Ainsi, $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

On en déduit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite !

5. L'algorithme calcule les termes successifs des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $u_n - v_n < \text{ecart}$.

Par rapport à la définition des suites de l'exercice, on prend juste garde à ce qu'on est toujours $u_n \geq v_n$, même au premier rang et on doit faire intervenir une variable supplémentaire pour le calcul successif des termes des suites (car on a une récurrence croisée).

Codé sous Python, ceci donne :

```
1 def moyenne(a, b, ecart):
2     u=a
3     v=b
4     while ((u-v)>ecart) :
5         w=u
6         u=(u+v)/2
7         v=math.sqrt(w*v)
8     return u, v
```

Suites I

1. Que signifie dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ?

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. Donner un exemple d'une suite convergente vers 1 non monotone.

$$1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

3. Donner la forme explicite de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 2 comme point fixe.

La suite définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -3$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3 \times 3^n + 2 = -3^{n+1} + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{n+2} \leq \frac{2n+4}{n+2} = 2.$$

5. On considère les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

6. Sans la convexité, montrer que, $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

La fonction φ admet donc un maximum en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$.

On en déduit $\forall x \in]-1; +\infty[, \varphi(x) \leq 0$ i.e. $\ln(1+x) \leq x$.

7. Démontrer que toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et prenons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$.

Il existe alors un rang $n_0(\varepsilon)$ au delà duquel $-\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2} \implies 0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n$.

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

Suites I

1. Que signifie dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$?

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o(A) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_o \implies u_n \geq A.$$

2. Donner un exemple d'une suite divergente vers $+\infty$ non monotone.

$$n + (-1)^n.$$

3. Donner la forme explicite de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 5 comme point fixe.

La suite définie par $v_n = u_n - 5$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -4$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4 \times 2^n + 5 = -2^{n+2} + 5$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ est minorée par 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \geq \frac{\sqrt{n^2}}{n} = 1.$$

5. On considère les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(T_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} - \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{\leq (n+1)(n+1)}} \leq 0$ donc $(T_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

6. Sans la convexité, montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

La fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 1.$$

La fonction φ admet donc un minimum en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$.

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$ i.e. $e^x \geq x + 1$.

7. Démontrer que toute suite divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et prenons $A = 1$ dans la définition de la divergence :

Il existe alors un rang $n_0(A)$ au delà duquel $u_n \geqslant 1 > 0$.

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

Suites II

1. Soit $q \in]1; +\infty[$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

$$\forall n \geq 2, q^n = ((q-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{(q-1)^k}_{\geq 0} = 1 + n(q-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

2. Soient deux suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Donner la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la démontrer.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - 1.$$

De même, pour $n \geq n_1(A - \ell + 1)$, $v_n > A - \ell + 1$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$u_n + v_n \geq (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A.$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

(a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Suites II

1. Soit $q \in]-\infty; -1[$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2^p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(q^{2^p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc divergente.

2. Soient deux suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Donner la limite de la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la démontrer.

Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0 \left(\frac{\ell}{2} \right)$, donc, en particulier :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

De même, il existe un rang $n_1 \left(\frac{2A}{\ell} \right)$ à partir duquel $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$.

Pour $n \geq N = \max(n_0; n_1)$, en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens strictement positives, on a donc :

$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A.$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

(a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Suite et série d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt$.

Dans ce devoir, on pourra utiliser, sans le démontrer, que la fonction $t \mapsto t\sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
3. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1})$.

Indications : on pourra intégrer par parties en primitivant $t \mapsto \sqrt{t}$ et utiliser le fait que $t = 1 - (1-t)$.

4. Montrer que suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
6. Conclure quant à la limite de (I_n) .
7. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n . Préciser alors la valeur de I_2 .

On se propose à présent d'exprimer de deux façons différentes I_n en fonction de n .

On pose $u_n = \frac{(2n+3)!}{n!(n+1)!} I_n$.

8. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
9. En déduire une expression de I_n en fonction de n .
10. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3}$. Retrouver la valeur de I_2 .
11. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Suite et série d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt$.

Dans ce devoir, on pourra utiliser, sans le démontrer, que la fonction $t \mapsto t\sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

Correction : Tout d'abord,

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} [t\sqrt{t}]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Pour calculer I_1 , comme $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-t) \sqrt{t} dt = \underbrace{\left[\frac{2}{3}(1-t)t\sqrt{t} \right]_0^1}_{=0} - \frac{2}{3} \int_0^1 (-1)t \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Commentaires : On pouvait aussi directement primitiver, car $t \mapsto (1-t)\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}$ admet pour primitive $t \mapsto \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$.

2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto (1-t)^n \sqrt{t}$ est positive sur $[0; 1]$, donc par **positivité de l'intégrale**, on en déduit que $\int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt \geq 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

3. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} (I_n - I_{n+1})$.

Indications : on pourra intégrer par parties en primitivant $t \mapsto \sqrt{t}$ et utiliser le fait que $t = 1 - (1-t)$.

Correction : Les fonctions $t \mapsto (1-t)^{n+1}$ et $t \mapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} \sqrt{t} dt = \underbrace{\left[\frac{2}{3}(1-t)^{n+1}t\sqrt{t} \right]_0^1}_{=0} + \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 (1-t)^n t\sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 (1-(1-t))(1-t)^n \sqrt{t} dt && (t = 1 - (1-t)) \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 ((1-t)^n - (1-t)^{n+1}) \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3}(n+1) \left(\int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt - \int_0^1 (1-t)^{n+1} \sqrt{t} dt \right) && (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \frac{2(n+1)}{3} (I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

4. Montrer que suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après ce qui précède, on a $I_n - I_{n+1} = \frac{3}{2(n+1)} I_{n+1} \geq 0$ donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, elle converge d'après le théorème de convergence monotone (vers une limite positive).

5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Correction : Il suffit de majorer l'intégrande sur $[0; 1]$ et d'utiliser la croissance de l'intégrale :

Pour tout $t \in [0; 1]$, $\sqrt{t} \leq 1$ donc $(1-t)^n \sqrt{t} \leq (1-t)^n$ puis

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt \leq \int_0^1 (1-t)^n dt \\ &= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

6. Conclure quant à la limite de (I_n) .

Correction : Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

7. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n . Préciser alors la valeur de I_2 .

Correction : D'après (3), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3} (I_n - I_{n+1}) \\ \left(1 + \frac{2(n+1)}{3}\right) I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3} I_n \\ \frac{2n+5}{3} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3} I_n \\ I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $I_2 = \frac{4}{7} I_1 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$.

On se propose à présent d'exprimer de deux façons différentes I_n en fonction de n .

On pose $u_n = \frac{(2n+3)!}{n!(n+1)!} I_n$.

8. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Correction : Montrons tout d'abord que I_n donc u_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Soit par une petite récurrence rapide à partir de la relation précédente $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$ et $I_0 = \frac{2}{3} \neq 0$.
 (b) Soit avec l'intégrale en remarquant que $t \mapsto (1-t)^n \sqrt{t}$ ne prend que des valeurs strictement positives exceptées en les points isolés 0 et 1. On évoque ensuite la stricte positivité de l'intégrale.

On peut dorénavant calculer le quotient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(2n+5)!}{(n+1)!(n+2)!} I_{n+1}}{\frac{(2n+3)!}{n!(n+1)!} I_n} \\ &= \frac{\cancel{(2n+5)} (2n+4) 2 \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} (n+2) \cancel{2n+5}} \\ &= \frac{4 \cancel{(n+2)}}{\cancel{n+2}} \\ &= 4. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3! I_0 = 4$.

Commentaires : Ne jamais former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$! À moins d'avoir montré au préalable que u_n , et donc I_n , n'est jamais nul.

9. En déduire une expression de I_n en fonction de n .

Correction : D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^{n+1}$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 4^{n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!}.$$

10. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3}$. Retrouver la valeur de I_2 .

Correction : Il suffit de développer le binôme de Newton et d'utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, I_n &= \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t)^k \sqrt{t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}} dt && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{k+\frac{3}{2}}}{k+\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k+\frac{3}{2}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3}. \end{aligned}$$

Retrouvons la valeur de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3} = 2 \left(\binom{2}{0} \frac{(-1)^0}{3} + \binom{2}{1} \frac{(-1)^1}{5} + \binom{2}{2} \frac{(-1)^2}{7} \right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right] = \frac{16}{105}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la même valeur que celle trouvée précédemment.

11. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (3), on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, I_k &= \frac{2k}{3} (I_{k-1} - I_k) \\ \frac{I_k}{k} &= \frac{2}{3} (I_{k-1} - I_k). \end{aligned}$$

En sommant ces égalités pour k variant entre 1 et n , on a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{k} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k) \\ &= \frac{2}{3} (I_0 - I_n). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{3} I_0 = \frac{4}{9}.$$

Nombres réels et calculs matriciels

1. Calculs dans $\mathbb{R}$

- Propriétés élémentaires de la relation d'ordre $\leq$. Compatibilité avec $+$, $\times$, le passage à l'inverse, le carré.
- Définition du majorant, minorant, partie majorée, minorée, bornée.
- Définition du maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.
- Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
- Théorème (admis) : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Caractérisation de la borne supérieure. De même pour la borne inférieure.
- Définition d'un intervalle et classification des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.
- Propriété d'Archimède, définition de la partie entière notée $[x]$. Graphe et propriétés élémentaires.
- Valeur absolue. Graphe et propriétés élémentaires. Inégalité triangulaire. Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq r$
- Distance entre deux réels, inégalité triangulaire.
- Résolutions d'équations, d'inéquations avec valeur absolue et/ou racine carrée. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes

2. Calcul matriciel

- Définition d'une matrice, d'un vecteur ligne ou colonne. Addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.
- Produit matriciel et compatibilité avec l'addition.
- Définition des matrices carrées, matrice identité.
- Non-intégrité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Stabilité.
- Définition de la puissance d'une matrice. Formule du binôme de Newton et égalité de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
- Matrices inversibles. Théorème admis : si une matrice est inversible à droite ou à gauche alors elle est inversible. Inverse du produit.
- Transposée d'une matrice. Linéarité. Transposée d'un produit.
- Matrices symétriques, antisymétriques, stabilité des ensembles.
- Trace d'une matrice. Linéarité. Trace d'un produit.
- Lien entre un système linéaire et une équation matricielle, version matricielle des opérations élémentaires.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. (★) Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.
2. (★) $\mathbb{R}$ est archimédien.
3. (★) Existence et unicité de la partie entière.
4. L'application $x \mapsto [x]$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, [x + n] = [x] + n$.
5. Caractérisation de la borne supérieure
6. Si $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
7. Binôme de Newton dans le cas de matrices qui commutent.
8. L'ensemble des matrices triangulaires est stable par produit matriciel.
9. Propriétés de la transposition : linéarité, involutivité et contravariance de la transposée d'un produit.
10. (★) CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
11. Définition et linéarité de la trace. Invariance par similitude.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Fonctions d'une variable réelle - Limites

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans le paragraphe 2, sont à valeurs réelles.

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A; +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty; A[$ si $a = -\infty$.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

1. Limite d'une fonction en un point

- Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .
- Unicité de la limite.
- Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .
- Limite à droite, limite à gauche. Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.
- Passage à la limite d'une inégalité large.
- Existence d'une limite par encadrement, par minoration, par majoration.
- Théorème de la limite monotone. *La démonstration n'est pas exigible.*

2. Fonctions complexes

- Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites.
- Caractérisation de la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire.



Fonctions de la variable réelle - LIMITES

La notion de limite est un concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité. Plus tard, la limite se mue en topologie et se fait plus générale, plus abstraite.

Dire qu'une quantité « admet une limite » est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

Ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle que Weierstrass, à la suite de travaux d'Euler et des siens sur des fonctions continues nulle part dérivables, en donne une définition correcte.

Avant de passer à des considérations plus terre à terre, voici comment le célèbre mathématicien du XX^{ème} siècle Ian Stewart ^[1] voit la définition : « f admet ℓ comme limite en a » :

« C'est un peu un jeu ... Le joueur Epsilon indique quel écart maximum il accepte entre $f(x)$ et ℓ (c'est-à-dire qu'il impose $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est choisi par lui).

Le joueur Delta essaie de faire ce qu'il faut pour le satisfaire (c'est-à-dire qu'il essaie de trouver $\delta > 0$ tel que, si l'écart entre x et a est inférieur à δ , alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

Si, quel que soit le choix d'Epsilon, le joueur Delta a toujours une stratégie gagnante, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a ».

[1]. Ian Stewart FRS, né en 1945 en Angleterre, est professeur de mathématiques à l'université de Warwick au Royaume-Uni. Il a publié plus de 140 publications scientifiques.

CONTENU

I	Limites.	934
I.1	Point adhérent	935
I.2	Limites	937
I.3	La limite contrôle la fonction.	943
I.4	Limites à droite et à gauche	944
I.5	Asymptote	950
II	Stabilité algébrique	953
II.1	Limite d'une somme	953
II.2	Limite d'un produit	955
II.3	Limite d'un quotient	956
II.4	Limite d'une composée	958
III	Propriétés de la limite.	963
III.1	Limite et relation d'ordre	963
III.2	La monotonie contrôle la limite	966
III.3	Limites à gauche et à droite	967
IV	Extension aux fonctions complexes.	968
	<i>Feuille d'exercices n° 16 : Fonctions de la variable réelle - LIMITES</i>	970
	<i>Test n° 20 : Limites I.</i>	979
	<i>Test n° 21 : Limites II.</i>	983
	<i>Devoir en temps libre n° 16 : Autour d'une fonction de Lambert</i>	985
	<i>Correction.</i>	987
	<i>Programme du chapitre XVI.</i>	993

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : D \mapsto \mathbb{R}.$$

I/ Limites

Il est difficile de parler proprement de limites sans connaître un peu de topologie qui n'est pas au programme de PTSI. Essayons !

Considérons l'intervalle ouvert $]0; 1[$. L'intuition doit vous convaincre que tout élément $x \in]0; 1[$ peut être enchâssé dans un intervalle ouvert de la forme $]x - r; x + r[$ qui, à condition de choisir r « assez petit », est lui-même inclus tout entier dans $]0; 1[$.

On dit alors que $]x - r; x + r[$ est un *voisinage* de x . C'est cette propriété de $]0; 1[$ d'être voisin de chacun de ses points qui fait dire de lui qu'il est *ouvert*.

Ce n'est pas le cas de l'intervalle $[0; 1]$. En effet, pour $x = 1$, il est tout à fait impossible de trouver un voisinage $]1 - r; 1 + r[$ inclus tout entier dans $[0; 1]$.

A contrario, son complémentaire dans $\mathbb{R}$, la réunion des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$ l'est. On dit alors que $[0; 1]$ est *fermé*.

En ce sens, l'intervalle $]-\infty; 2]$ est fermé car son complémentaire (dans $\mathbb{R}$), $]-\infty; 2[$ est ouvert.

I.1 Point adhérent

Lorsque l'on étudie la limite d'une fonction f définie sur un ensemble D en un point a i.e. lorsque « x tend a », il est sous-entendu que $x \neq a$ mais aussi que a peut être ainsi approché par des points de D .

Autrement dit et intuitivement, a ne peut pas être « trop loin » de D : « intérieur » à D ou « au bord de » de D .

Plus précisément,

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) :

(Hors-Programme)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists V_x \in \mathcal{V}(x), V_x \subset A.$$

On note $\overset{\circ}{A}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall V_x \in \mathcal{V}(x), A \cap V_x \neq \emptyset.$$

On note $\overline{A}$ leur ensemble.

Un point intérieur à une partie y est aussi adhérent. La réciproque est fausse.

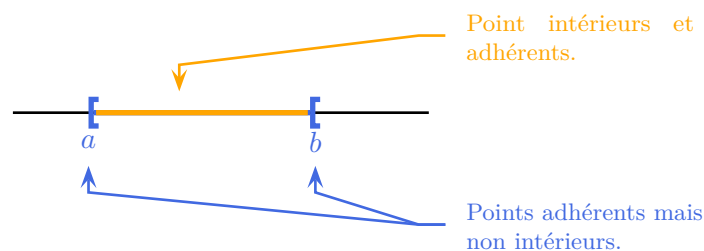


Figure XV.1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a; b]$.

Exemples 1 :

- 1 est adhérent à $[0; 1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $[a; b[=]a; b[$ et $\overline{[a; b[} = [a; b]$.

D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{I}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\mathbb{R}$ en incluant les bornes finies et $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\overset{\circ}{I}$	$\bar{I}$
$]1; 2] \cup [3; 4]$	$]1; 2[\cup]3; 4[$	$[1; 2] \cup [3; 4]$
$]1; +\infty[$	$]1; +\infty[$	$[1; +\infty[$
$] -\infty; 2[$	$] -\infty; 2[$	$] -\infty; 2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

En particulier, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

- Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
 - a et b sont adhérents à $[a; b[$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a; b[$.

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle) :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .

Preuve : On montre successivement les deux implications :

($\Rightarrow$) : On suppose que x est adhérent à A .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x est adhérent à A , tout voisinage $V_{x,n} =]x - \frac{1}{n+1}; x + \frac{1}{n+1}[$ rencontre A i.e. $\exists a_n \in V_{x,n} \cap A$.

Par construction, $|x - a_n| < \frac{1}{n+1}$ i.e. la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x .

($\Leftarrow$) : Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un voisinage $V_x =]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$ quelconque de x .

Par définition de la convergence, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élément de A convergeant vers x , il existe un rang à partir duquel $|x - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in V_x$ et $A \cap V_x \neq \emptyset$.

Corollaire 1.1 :

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A) \in \bar{A} \quad \text{et} \quad \inf(A) \in \bar{A}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$. De même pour $\inf(A)$.

Preuve : On ne démontre ce résultat que pour $\sup(A)$, la démonstration étant identique pour $\inf(A)$.

Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup(A) - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $x_n \in A$ tel que :

$$\sup(A) - \frac{1}{n+1} < x_n \leq \sup(A).$$

Par construction, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers $\sup(A)$ et $\sup(A) \in \overline{A}$.

I.2 Limites

En reprenant les voisinage définis précédemment, on peut adopter une définition uniforme, globale et équivalente à celle que vous connaissiez de la notion de limites :

Définition 2 (Définition topologique des limites) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists U_V \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in U_V \cap D \implies f(x) \in V.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le cadre de la **définition (2)**, on pourra, selon les besoins, visualiser un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sous la forme $\mathcal{B}(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < \varepsilon\}$ ou $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$.

On remarquera que $|x - a| < \varepsilon$ équivaut à $x \in \mathcal{B}(a; \varepsilon)$.

On passe alors du cas topologique au cas normé en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $\mathcal{B}(a; \alpha)$, et du cas normé au cas topologique en remarquant qu'une boule $\mathcal{B}(a; \alpha)$ est un voisinage de a .

On pourra également mélanger les deux points de vue. Ainsi, la **définition (2)** s'écrit aussi de manière équivalente :

- (i) $\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists \alpha(V) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - a| < \alpha \implies f(x) \in V.$
- (ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists U_\varepsilon \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D, x \in U_\varepsilon \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$. Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

Preuve : Il suffit de constater que

$$\mathcal{B}_f(a; \frac{\alpha}{2}) \subset \mathcal{B}_o(a; \alpha) \subset \mathcal{B}_f(a; \alpha)$$

et,

$$\mathcal{B}_f(b; \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{B}_o(b; \varepsilon) \subset \mathcal{B}_f(b; \varepsilon).$$

On retrouve alors tous les cas déjà connus :

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :

Soient D tel que $+\infty \in \overline{D}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq \alpha \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha(A) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq \alpha \implies f(x) \geq A.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha(B) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq \alpha \implies f(x) \leq B.$

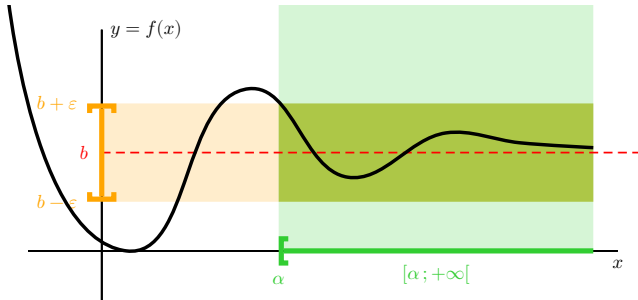


Figure XV.2 – Limite finie en l'infini.

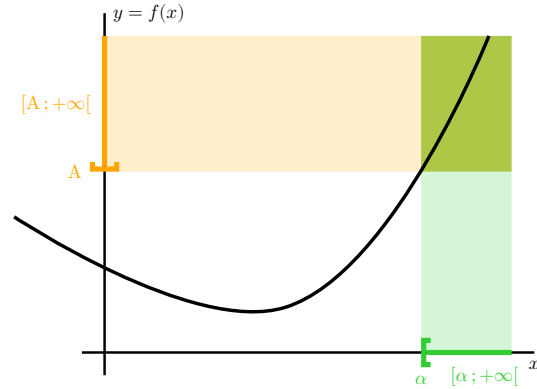


Figure XV.3 – Limite infinie à l'infini.

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \in [\alpha; +\infty[\implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... ».
- $\exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « ...il existe un seuil α ... ».
- $\forall x \in D, : x \in [\alpha; +\infty[\dots$: « ...tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α i.e. dans un voisinage de $+\infty$... ».
- $\dots \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Autrement dit : « Si $x \in D$ est suffisamment grand, alors $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de b ».

Exercice 1 : À l'aide de la définition, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

$$\text{Alors, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \geq \alpha \implies 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon.$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leq 0$, tout α convient.

$$\text{Sinon, en posant } \alpha = \sqrt{A}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq \alpha \implies A \leq x^2.$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :
Soient D tel que $-\infty \in \overline{D}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq \beta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \beta(A) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq \beta \implies f(x) \geq A.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R}, \exists \beta(B) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq \beta \implies f(x) \leq B.$

$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
$\frac{x^n}{n \neq 0}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\frac{1}{x^n}, n \neq 0$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	$+\infty$	$-\infty$

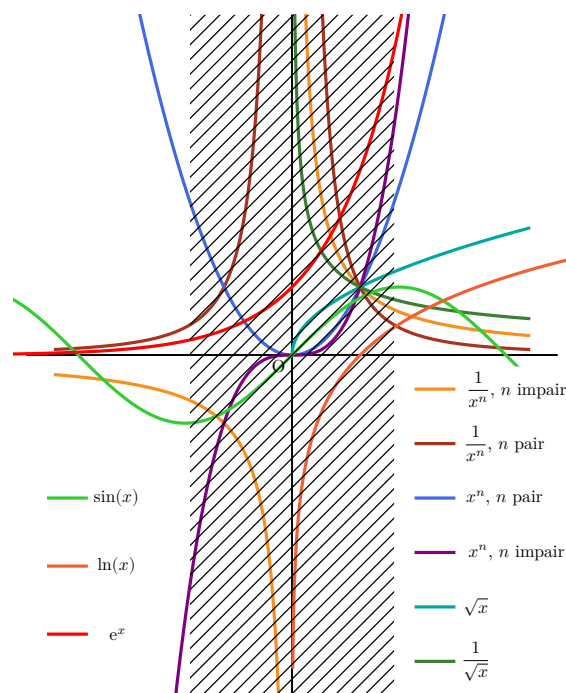
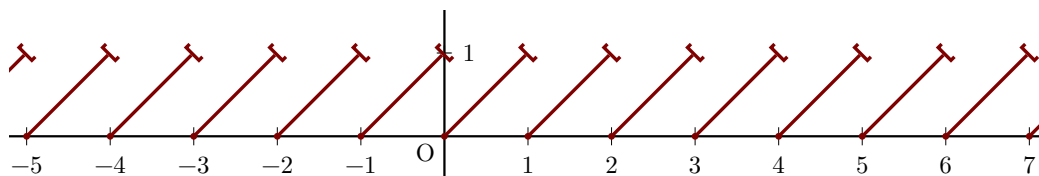


Figure XV.4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - [x].$$

Figure XV.5 – La fonction $x \mapsto x - [x]$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 2 : Déterminer les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - x}$$

$$f_2: x \mapsto \cos(x) - x$$

$$f_3: x \mapsto x^2 e^{-x} - x$$

Correction : Rapidement,

- Factorisation par les termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{5x} = 0$.
- Minoration et théorème de comparaison : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 - x \leq f - 2(x) \leq 1 - x$ qui entraîne :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty.$$

- En $-\infty$, le théorème sur les limites de produits et de sommes suffit à conclure :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = +\infty.$$

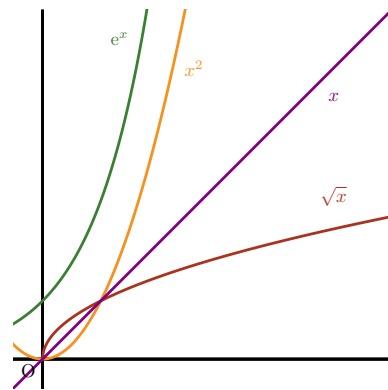
En $+\infty$, on utilise les théorèmes sur les croissances comparées et les limites de sommes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = -\infty.$$

Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. On parle de vitesse de divergence différentes.

C'est le cas par exemple des fonctions suivantes :

- $x \mapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \mapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité
- $x \mapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas.
- $x \mapsto e^x$ tend vers l'infini « incommensurablement plus vite » que les fonctions précédentes.



Ces simples informations sont importantes puisqu'elles nous permettront de conjecturer certaines limites. Une fonction rapide sera prépondérante sur une fonction lente en l'infini donc pourra y imposer sa limite.

Soient α, β, γ des réels **strictement positifs**.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\gamma = 0.$$

Figure XV.6 – Croissances comparées.

Proposition 4 (Limite en un point fini) :

Soient $a \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon.$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha(A) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A.$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha(B) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \leq B.$

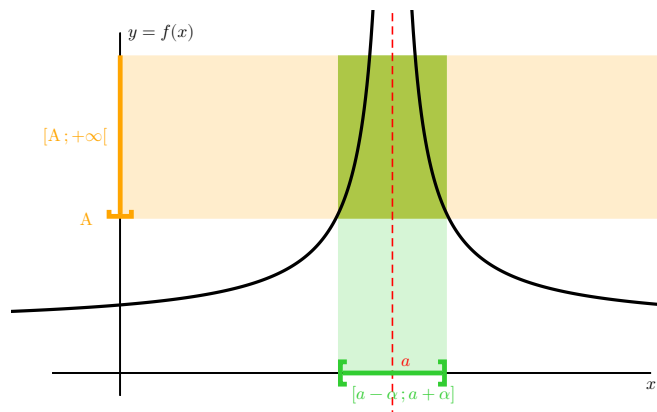


Figure XV.7 – Limite infinie en un point fini

Remarques :

- L'hypothèse $a \in \overline{D}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a .

On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{D}$.

- Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut alors se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.
- De même, dans le cas d'une limite ∞ , la définition trouve sa pertinence lorsque A devient grand ou petit (vers $-\infty$) mais il n'est pas nécessaire de le supposer strictement positif ou négatif.

$f(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$
$\frac{1}{x^n}$ $n \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

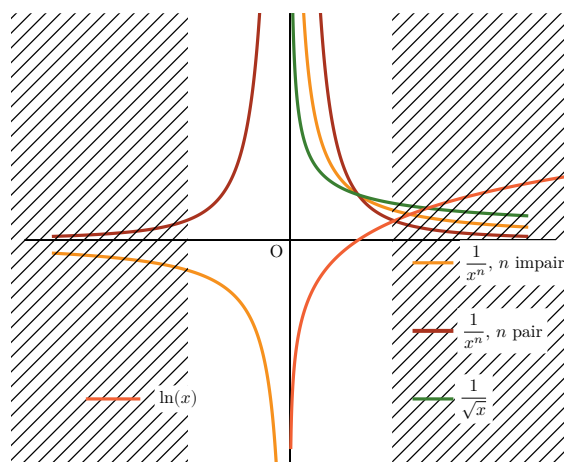


Figure XV.8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \end{aligned} \right\} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Figure XV.9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Exercice 3 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+ .

$$f_1 : x \mapsto x - \ln(x)$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$$

$$f_2 : x \mapsto x\sqrt{1 + (\ln(x))^2}$$

$$f_4 : x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$$

Correction :

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - \ln(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty.$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x\sqrt{1 + (\ln(x))^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x^2 + \underbrace{(x \ln(x))^2}_{\rightarrow 0}} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} - \frac{e^{3x} - 1}{x} = (e^{5x})'(0) - (e^{3x})'(0) = 5 - 3 = 2 \text{ en reconnaissant les taux d'accroissement en } 0 \text{ de deux fonctions dérivables.}$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^u}{u} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ d'après les théorèmes sur les limites de composées et de produits.}$$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D , $f : D \mapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

Preuve : Dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, tout découle de l'inégalité triangulaire :

$$\left| |f(x)| - |\ell| \right| \leq |f(x) - \ell|.$$

Dans le cas $\ell = \pm\infty$, tout découle de la définition de la valeur absolue :

$$|f(x)| = \max \{f(x), -f(x)\}.$$

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de $\mathbb{R}$: la séparation.

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) :

Soit $a \in \overline{D}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Par la contraposée, une fonction admettant deux valeurs d'adhérence au voisinage d'un point a ne peut y avoir de limite.

Preuve : Posons ℓ et ℓ' les deux limites de f en a et supposons $\ell \neq \ell'$.

Il existe donc deux voisinages disjoints $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$ tels que $\ell \in \mathcal{V}_\ell$, $\ell' \in \mathcal{V}_{\ell'}$ et $\mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'} = \emptyset$.

Appliquons alors la définition de la limite de f en a :

— Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_\ell}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_\ell$) tel que

$$x \in \mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_\ell} \implies f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

— Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_{\ell'}}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_{\ell'}$) tel que

$$x \in \mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_{\ell'}} \implies f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}.$$

Il suffit alors de considérer $x \in \mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_\ell} \cap \mathcal{V}_{a, \mathcal{V}_{\ell'}}$ pour avoir la contradiction.

Notation : En cas d'existence de la limite en a , le **théorème (5)** permet de justifier la notation, maintenant non ambiguë, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

Certaines fonctions peuvent ne pas avoir de limite en un point.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus. Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

ATTENTION

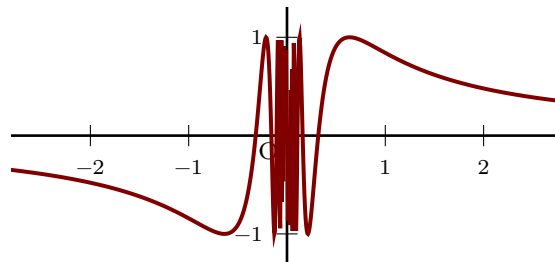


Figure XV.10 – La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

I.3 La limite contrôle la fonction

Proposition 6 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : D \mapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .

Par la contraposée, toute fonction non bornée sur un voisinage de a ne peut avoir de limite finie.

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en a .

Par définition, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,1}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,1} \implies |f(x) - \ell| \leq 1.$$

i.e. $\forall x \in \mathcal{V}_{a,1}, \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$. La fonction f est bornée dans un voisinage de a .

On a mieux que la **proposition (6)** :

Théorème 7 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $f : D \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < M$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < M$.

Preuve :

1. Soient $m < \ell$ et $\varepsilon = \frac{\ell - m}{2} > 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, $\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta &\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) \\ &\implies \ell - \frac{\ell - m}{2} < f(x) \implies \frac{\ell + m}{2} < f(x) \\ &\implies m < f(x). \end{aligned}$$

2. Le cas $\ell < M$ est identique.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le **théorème (7)** nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ i.e. il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

I.4 Limites à droite et à gauche

Tout d'abord, que se passe-t-il en un point où la fonction est définie ?

Proposition 8 :

Si f est définie en $a \in \overset{\circ}{D}$ et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION

La **proposition (8)** ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Preuve : Faisons l'hypothèse que f est définie en a intérieur à D et y possède une limite ℓ .

Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ , il existe alors un voisinage V_a de a inclus dans D pour lequel $f(x) \in V_\ell$ pour tout $x \in D \cap V_a$.

Comme a appartient nécessairement à tout voisinage de a , $f(a)$ appartient à tout voisinage de ℓ .

On en déduit déjà que $\ell \in \mathbb{R}$ car $]f(a); +\infty[$ et $]-\infty; f(a)[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement ne contenant pas $f(a)$ donc à écarter.

Enfin, la condition « $f(a)$ appartient à TOUT voisinage de ℓ » implique que $\ell = f(a)$. (Imaginez des voisinages aussi réduits que l'on veut !)

Conclusion, une fonction admet une limite en un point (intérieur) de D si, et seulement si elle y est continue. ^[2]

Il y a donc peu de problèmes en un point intérieur mais que se passe-t-il alors aux bornes de celui-ci ? Une fonction peut y être définie mais ne pas y avoir de limite.

C'est, par exemple, le cas de la fonction partie entière en $a = 1$ où la fonction, pourtant correctement définie, prend des valeurs différentes suivant « le côté » d'où l'on arrive.

On parlera alors de *limite à droite* ou de *limite à gauche*.

Soit J un intervalle (ou une réunion d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que $a \in \overline{D \cap J}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f|_{D \cap J}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{D \cap J}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in J}} f(x).$$

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à gauche : Si a est adhérent à $D \cap]-\infty; a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f|_{D \cap]-\infty; a[}$ possède une limite en a .

Cette limite est notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]-\infty; a[}} f(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou encore $f(a - 0)$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $D \cap]a; +\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f|_{D \cap]a; +\infty[}$ possède une limite en a .

Cette limite est notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a; +\infty[}} f(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $f(a + 0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $D \cap]-\infty; a[$ ni à $D \cap]a; +\infty[$. Il y est seulement adhérent.

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{D}$ je le redis.

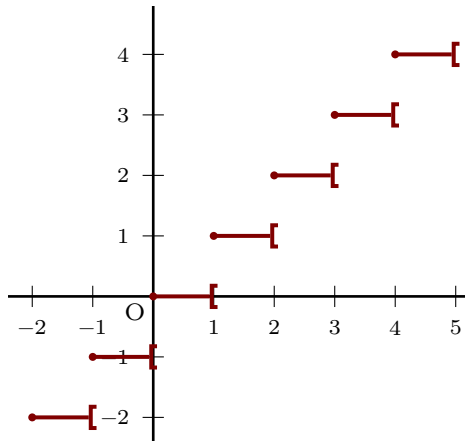


Figure XV.11 – La fonction partie entière n’a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} [x] = n - 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} [x] = n.$$

Remarque : De même que plus haut, on peut dire que la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{J}}} f(x)$ est envisageable ou non suivant que a appartient à $\overline{D \cap \mathbb{J}}$ ou pas.

Ici la définition topologique atteint ses limites et on doit utiliser une définition métrique ou au moins partiellement :

Corollaire 8.1 :

Soit $b \in \mathbb{R}$.

— Dire que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall V_b \in \mathcal{V}(b), \exists \alpha(V_b) \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D, \quad a - \alpha \leq x < a \implies f(x) \in V_b.$$

ou $x \in [a - \alpha; a[$

— Dire que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall V_b \in \mathcal{V}(b), \exists \alpha(V_b) \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D, \quad a < x \leq a + \alpha \implies f(x) \in V_b.$$

ou $x \in]a; a + \alpha]$

Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu’elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité. Plus particulièrement, le **théorème (5)**, la **proposition (6)** le **théorème (7)** sont vrais pour des limites à droite ou à gauche. Et, généralement, tous les théorèmes qui suivront, sauf mention contraire ou explicite seront également vrais dans ces cas.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :

Soit $a \in \overline{D}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a .
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ si f n’est pas définie en a .

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.

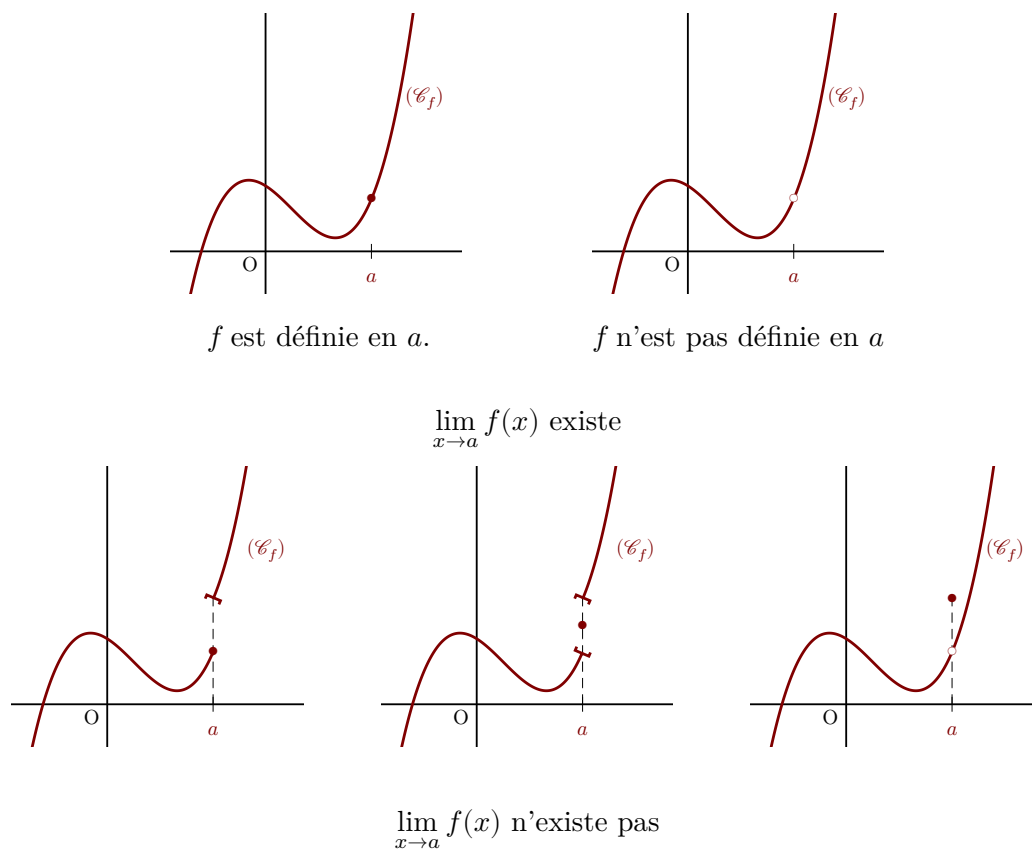


Figure XV.12 – Caractérisation de la limite en fonction des limites à gauche et à droite.

Exemple 2 :

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
- Soit δ_0 , la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \delta_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

[3]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

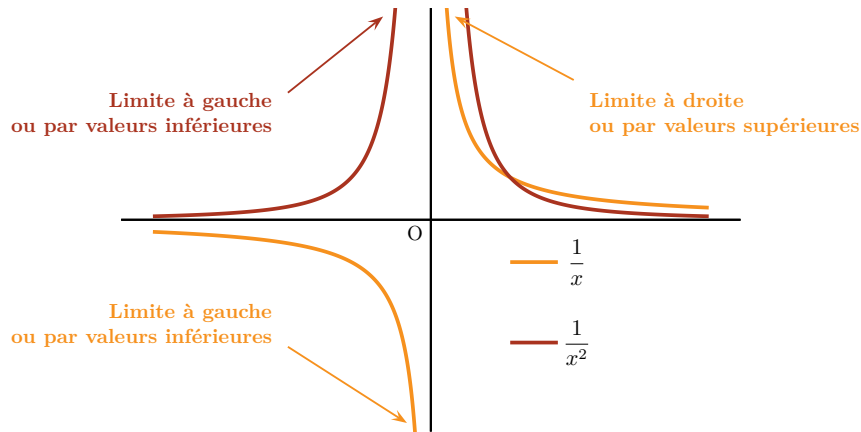


Figure XV.13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

Exemples 3 : Étudions les limites de $\frac{1}{2-x}$ et $\frac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim_{x \rightarrow 2} 2-x = 0$, on est ramené à l'étude de $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $2-x$:^[4]

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 2-x = 0^-.$$

2. On conclut :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D'après les} \\ \text{théorèmes sur} \\ \text{les composées} \\ \text{de limites} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty,$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 2-x = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D'après les} \\ \text{théorèmes sur} \\ \text{les composées} \\ \text{de limites} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x)^2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x)^2 = \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D'après les} \\ \text{théorèmes sur} \\ \text{les composées} \\ \text{de limites} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

En conclusion, on remarquera bien que si $\frac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\frac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

[4]. Au moins dans sa tête!

- La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$

- La fonction sinus cardinal $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Remarque : Cette propriété nous permettra au chapitre suivant de définir correctement le prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie aux bornes de son intervalle de définition.

- La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} [x]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} [x^2]$$

Correction :

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \text{ n'existe pas.}$$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{|x|} = -1 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{|x|} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \text{ n'existe pas.}$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{|x|} = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{|x|} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0.$$

$$7. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} [x] = -1 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [x] = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} [x] \text{ n'existe pas.}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} [x^2] = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} [u] = 0.$$

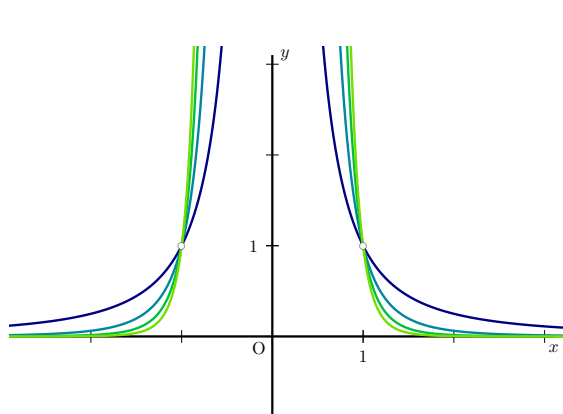
I.5 Asymptote

Le comportement à l'infini, dit *comportement asymptotique*, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

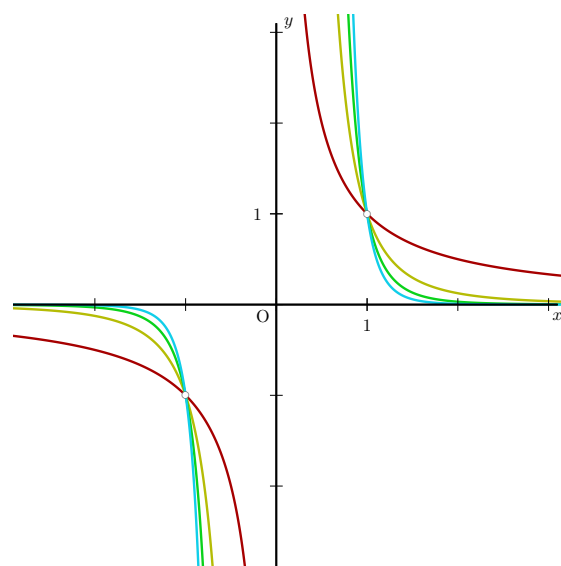
On définit pour cela la notion de droite asymptote^[5] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 4 (Asymptote) : On dit qu'une fonction f admet :

1. une *asymptote verticale* au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
2. une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite ($\mathcal{D}$) d'équation $y = ax + b$, dite *asymptote oblique*, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.



$$x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ pour } n = 2, 4, 6, 8.$$



$$x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ pour } n = 1, 3, 5, 7.$$

Figure XV.14 – Les courbes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour n impair.

Méthode 1 (Déterminer une droite asymptote (non verticale)) :

Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
— Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

[5]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera bientôt de courbes asymptotes.

Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction (Oy) .

- Si cette limite est finie, de valeur a , on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.

2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:

- Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction (Ox) .

- Si cette limite est finie, de valeur b , alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

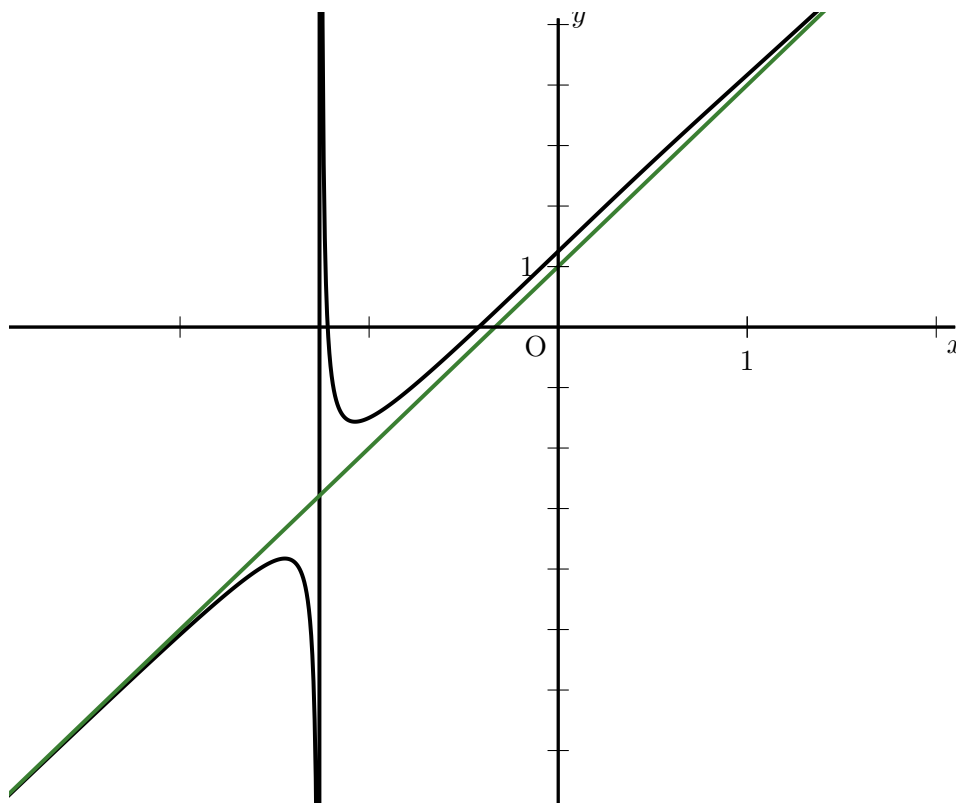


Figure XV.15 – La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto 3x + 1 + \frac{1}{2(x^3 + 2)}$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exercice 5 : Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

$$f_1 : x \mapsto \frac{4x^2 - 2}{2x + 1}$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$$

Correction :

1. Par division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on trouve :

$$\frac{4x^2 - 2}{2x + 1} = 2x - 1 - \frac{1}{2x + 1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) - (2x - 1) = -\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x + 1} = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe de f_1 au voisinage de l'infini.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$ donc la courbe de f_2 admet la même direction asymptotique que la première bissectrice en $+\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{1 + \frac{1}{3x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3}{2}.$

La courbe de f_2 admet donc la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

En $-\infty$, le même raisonnement conduirait successivement à

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1.$$

Puis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \frac{1 + \frac{1}{3x}}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = -\frac{3}{2}.$$

La droite d'équation $y = -x - \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f_2 au voisinage de $-\infty$.

Exercice 6 : Montrer que la courbe de $x \mapsto \cos(x) - x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Correction : D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) - x}{x} = -1$. La courbe admet donc comme direction asymptotique celle de $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

Cependant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ n'existe pas donc la courbe n'admet pas d'asymptote au voisinage de l'infini.

Remarque : Dire que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ est équivalent de dire que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - b = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 (Position relative d'une courbe et de son asymptote) :

Soit f une fonction et $y = ax + b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique ($\mathcal{D}$).

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de ($\mathcal{D}$) en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur un voisinage $]\alpha; +\infty[$ de celui-ci.

x	α	δ	$+\infty$
Signe de $f(x) - (ax + b)$	+	0	-
Position de $\mathcal{C}_f$ et $(\mathcal{D})$	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $(\mathcal{D})$		$\mathcal{C}_f$ au dessous de $(\mathcal{D})$

II/ Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII^{ème} siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :

- Montrer l'efficacité de notre définition de limite.
- Justifier la validité de notre intuition.
- Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

D'autres opérations mènent à des formes dites « indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

- $0 \times \infty$
 - $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
 - $\infty - \infty$
- 1^∞
 - 0^0
- ∞^0
 - 0^∞

Pour ce faire, il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la suite et « lever l'indétermination ».

Notamment, soit factoriser une somme, développer un produit, décomposer une fraction en éléments simples ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, soit essayer de changer la forme de l'expression, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le corollaire (18.1) sur les suites monotones pour pouvoir conclure [6].

ATTENTION

Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a \in \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

II.1 Limite d'une somme

Proposition 10 (Somme) :
Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

[6]. Dans tous les cas, réfléchir avant d'affirmer.

Preuve :**Cas où ℓ et ℓ' sont finies :** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et d'écrire :

$$|f(x) + g(x) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies |g(x) - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $|f(x) + g(x) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| \leq \varepsilon$.Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$.**Cas où ℓ est finie et $\ell' = +\infty$:** Soit $A \in \mathbb{R}$.— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leq 1 \implies f(x) \geq \ell - 1.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geq A - \ell + 1.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x) + g(x) \geq (A - \cancel{X} + \cancel{X}) + (\cancel{X} - \cancel{X}) = A$. Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty$.**Cas où $\ell + \ell' = +\infty$:** Soit $A \in \mathbb{R}$.— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geq \frac{A}{2}.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geq \frac{A}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x) + g(x) \geq A$.Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty$.**Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:**— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ell) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + \ell) - x) = \ell$.— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$.— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $(x + \cos(x) - x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.**ATTENTION**

Exemple 5 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

$$\text{En effet } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D'après les} \\ \text{théorèmes sur} \\ \text{les sommes} \\ \text{de limites} \end{array} \Longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 + 0 = 2 \text{ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.}$$

II.2 Limite d'un produit

Proposition 11 (Produit) :

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ [7]	Forme Indéter.	∞ [7]

Preuve :

Cas où ℓ et ℓ' sont finies : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leq |(f(x) - \ell)g(x) + \ell(g(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell||g(x)| + |\ell||g(x) - \ell'|.$$

Or, d'après la proposition (6), la fonction g est bornée dans un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a , disons par un réel $K > 0$.

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2K}.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies |g(x) - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$

$$\text{Pour } x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}, \text{ on a alors } |f(x)g(x) - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cancel{\times} + \frac{\varepsilon}{2} \cancel{\times} \leq \varepsilon.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell\ell'.$$

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de choisir les voisinages $\mathcal{V}_{a,g}$ et $\mathcal{V}_{a,f}$ respectivement tels que :

$$|g(x) - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2(K + 1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sans que l'inégalité finale ne soit changée.

[7]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

Cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell' = +\infty$: Soit $A > 0$.

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \implies f(x) \geq \frac{\ell}{2}.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geq \frac{2A}{\ell}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geq \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$.

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$.

Cas où $\ell = \ell' = +\infty$: Soit $A > 0$.

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geq \sqrt{A}.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geq \sqrt{A}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geq A$.

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$.

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x-2 = 0$, mais $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

ATTENTION

II.3 Limite d'un quotient

Proposition 12 (Inverse) :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$\infty^{[8]}$	0

[8]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Preuve :**Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$:** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)| |\ell|}.$$

— Comme $\ell \neq 0$, d'après le **théorème (7)**, il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \Rightarrow f(x) \neq 0.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \min \left(\frac{|\ell|}{2}; \frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2} \right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$x \in \mathcal{V}_{a,f}, \quad ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow |f(x)| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)| |\ell|} \leq \frac{\frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}.$$

Cas où $\ell = +\infty$: Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

En particulier, $\forall x \in \mathcal{V}_{a,f}$, $f(x) > 0$ puis $\frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{f(x)} \leq \varepsilon$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Cas où $\ell = 0$: On suppose, par exemple, que 0 est atteint par valeurs supérieures.Soit $A > 0$.— Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > 0.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{A}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} \geq A$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

En remarquant que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, on en déduit alors les résultats sur les limites de quotients :

Proposition 13 (Quotient) :

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	$\ell'^{[9]}$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\infty^{[10]}$	Forme Indéter.	0	$\infty^{[10]}$

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}.$

Correction :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{x^2 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right)} = 0.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x}} = 4$ grâce à la partie conjuguée.

II.4 Limite d'une composée

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :

Soient $f : D \mapsto E$ et $g : E \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D , $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

Preuve : Parmi les 27 cas possibles, démontrons ce théorème quand a et c sont finis et $b = +\infty$, par exemple.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]c - \varepsilon; c + \varepsilon[$ un voisinage ouvert de c .

[9]. y compris $\ell' = 0$.

[10]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Comme $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, $\exists A(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}$,

$$X > A \implies g(X) \in]c - \varepsilon; c + \varepsilon[.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b(= +\infty)$, i.e., qu'il existe $\alpha(A) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$x \in]a - \alpha; a + \alpha[\implies f(x) \in]A; +\infty[\text{ i.e. } f(x) > A.$$

Conclusion, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in]a - \alpha; a + \alpha[$ entraîne $f(x) > A$ puis $g(f(x)) \in]c - \varepsilon; c + \varepsilon[.$

On a bien montré que $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable i.e. on ne s'intéresse plus à la limite de $(g \circ f)(x)$ quand $x \rightarrow a$, mais de $g(X)$ quand $X \rightarrow b$.

Exemple 6 : On cherche la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln^2(x) + 2 \ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x) + 2 \ln(x)}{\ln^2(x) + 1} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} X = \ln(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} X = -\infty \end{array}}}}{\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{X^2 + 2X}{X^2 + 1}} = 1.$$

Exercice 8 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f .

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 6x - 7}$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1+x}{1-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

Correction :

1. D'après le domaine de définition de $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 6x - 7}$, la seule limite envisageable en 1 est celle par valeurs supérieures :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 6x - 7} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x+7} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

La courbe admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote.

2. De même, seule la limite en 1 par valeurs inférieures est envisageable et, d'après les théorèmes sur les limites de produits, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1+x}{1-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 2\sqrt{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} = +\infty.$$

La courbe admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote.

3. Ici aussi, seule la limite en 0 par valeurs supérieures est à envisager :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}} = \sqrt{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

La courbe admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

En posant $g \equiv |\dots|$ dans la **proposition (14)**, on retrouve le **corollaire (4.1)** :

Corollaire 14.1 (Limite et valeur absolue) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D , $f : D \mapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires de la **proposition (14)** précédente. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

Corollaire 14.2 (Limite d'une suite explicite) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geq A$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Rien à démontrer ici. C'est la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ en remplaçant x par n .

Exemple 7 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 14.3 (Limite d'une suite quelconque) :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I .

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b.$$

Preuve :

— Soit J_b un voisinage ouvert quelconque de b ^[11].

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ ouvert de a ^[12] (dépendant de J_b) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{V}_a \cap I \implies f(x) \in J_b.$$

— Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ i.e. , il existe un rang $n_0(\mathcal{V}_a) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \in \mathcal{V}_a.$$

— Conclusion, $n \geq n_0$ entraîne $u_n \in \mathcal{V}_a$ puis $f(u_n) \in J_b$.

On a bien prouvé que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b.$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \rightarrow \ell$.

Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n).$$

On est à l'aube d'un de vos premiers théorèmes d'interversion de limites !

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit **continue** en ℓ .

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow \scriptstyle \begin{smallmatrix} u \\ + \\ \infty \end{smallmatrix} & & \downarrow \scriptstyle \begin{smallmatrix} u \\ + \\ \infty \end{smallmatrix} \\ \ell & = & f(\ell) \end{array} \quad \text{Autrement dit} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right).}$$

(sous conditions de continuité de f)

La limite cherchée serait alors nécessairement une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

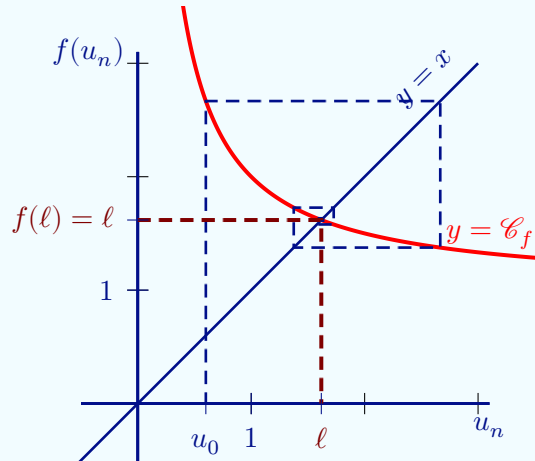
Nous y reviendrons plus avant dans les chapitres suivants car, pour l'instant, rien ne nous assure que $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$!!!

Exemple 8 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f .

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (14.3) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite) :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a , il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 (cos n'a pas de limite en $\pm\infty$) : Considérons les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Correction : Soit T une période de f et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La suite $(x_0 + nT)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Puisque f admet une limite ℓ en $+\infty$, la suite $(f(x_0 + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Or, par T -périodicité, on sait que $f(x_0 + nT) = f(x_0)$ pour tout $n \geq 1$.

Par passage à la limite, on obtient $f(x_0) = \ell$ et donc la fonction f est constante égale à ℓ .

On retrouve ici que les fonctions cos et sin ne peuvent avoir de limites en l'infini.

III/ Propriétés de la limite

III.1 Limite et relation d'ordre

Proposition 15 (Limite et ordre) :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a .

$$\text{Si, } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_a, g(x) \leq f(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell' \leq \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Preuve :

Avec le **théorème (7)** : D'après le **théorème (7)**, si $\ell' - \ell > 0$ alors $g(x) - f(x) > 0$ sur un voisinage de $\mathcal{V}_a$ de a .

Par la contraposition, si $g(x) - f(x) \leq 0$ i.e. $g(x) \leq f(x)$ sur un voisinage de a alors $\ell' \leq \ell$.

Preuve directe : Soit $\mathcal{V}_a$ un voisinage de a et supposons que $\forall x \in \mathcal{V}_a, g(x) \leq f(x)$ avec $\ell' > \ell$.

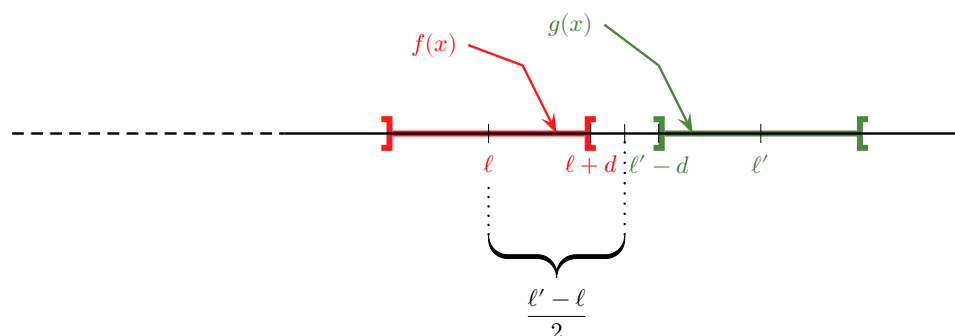
Posons alors, comme pour la démonstration de l'unicité de la limite, $d < \frac{\ell' - \ell}{2}$.

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell, f}$ de ℓ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_{\ell, f} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell - d < f(x) < \ell + d.$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell', g}$ de ℓ' tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_{\ell', g} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell' - d < g(x) < \ell' + d.$$



D'où, pour $x \in \mathcal{V}_{\ell, f} \cap \mathcal{V}_{\ell', g} \cap \mathcal{V}_a$, on obtiendrait :

$$f(x) < \ell + d < \ell' - d < g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x).$$

D'où la contradiction et la nécessité que $\ell' \leq \ell$.

Remarques :

- La **proposition (15)** n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leq \ell'$:

Prenez, par exemple $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

- La **proposition (15)** permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une fonction ce qui n'est pas le cas des théorèmes qui suivent.
- La **proposition (15)** peut s'étendre aux limites à gauche ou à droite. (Il suffit simplement de modifier l'intervalle de définition des fonctions).

Théorème 16 :

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_a, & g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_a, & g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_a, & f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Ce théorème est également vrai pour des limites à gauche ou à droite.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ un voisinage quelconque de ℓ .

Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, il existe deux voisinages $\mathcal{V}_{g,a}$ et $\mathcal{V}_{h,a}$ de a tels que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies \ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{V}_{h,a} \implies \ell - \varepsilon \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a} \cap \mathcal{V}_{h,a}$, on a alors :

$$\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon].$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Théorème de majoration : La démonstration est identique en plus simple.

Soit $A \in \mathbb{R}$ et $[A; +\infty[$ un voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{g,a}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies A \leq g(x).$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a}$, on a alors :

$$A \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \in [A; +\infty[.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Théorème de minoration : La démonstration est identique.

Exercice 10 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

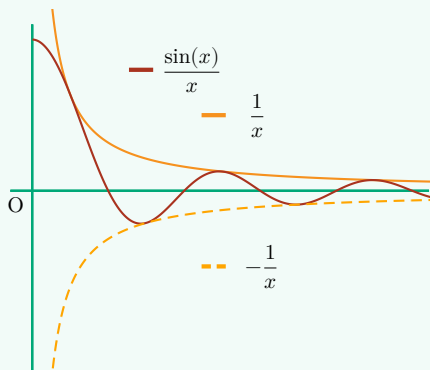
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Correction :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a :

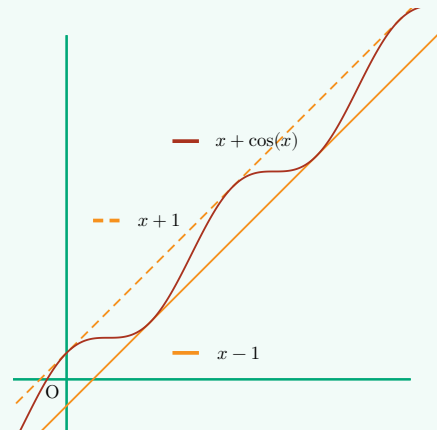
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$



2. De la même manière, $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq x + \cos(x) (\leq x + 1)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x) = +\infty.$$



3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a : } \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$.

Donc, suivant le signe de x , on a :

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 \quad \text{ou} \quad 1 < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 - x.$$

Dans tous les cas, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

4. Pour $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

De même, $\forall x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$.

III.2 La monotonie contrôle la limite

Les variations de la fonction peuvent aussi « forcer » certaines propriétés de la limite.

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$) et $f :]a; b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b , et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{]a; b[} (f) < +\infty$.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.

Preuve : On ne traite ici que le cas où $b < +\infty$. Le cas infini étant plus simple.

- On suppose que f est majorée et on considère $F = \{f(x), x \in]a; b[\}$. L'ensemble F est donc une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée.

F admet donc une borne supérieure $\ell = \sup_{]a; b[} \{f(x), x \in]a; b[\} = \sup(f)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de ℓ , $\ell - \varepsilon$ n'est plus un majorant de F . Il existe donc $u \in]a; b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(u) \leq \ell$.

Comme f est croissante, $\forall x \in]a; b[$,

$$x \geq u \implies \ell - \varepsilon < f(u) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon. \quad (\text{XV.1})$$

Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a; b[$, si $|x - b| \leq \eta$, alors $b - \eta \leq x < b$ i.e. $u \leq x < b$.

D'après (XV.1), on a alors $\ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell + \varepsilon$ d'où $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Et donc $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell < +\infty$.

- On suppose maintenant que f n'est pas majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.

Comme A n'est pas un majorant de f , il existe $u \in]a; b[$ tel que $A \leq f(u)$.

Comme f est croissante, $\forall x \in]a; b[$,

$$x \geq u \implies A \leq f(u) \leq f(x). \quad (\text{XV.2})$$

Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a; b[$, si $|x - b| \leq \eta$, alors $u \leq x < b$.

D'après (XV.2), on a alors $f(x) \geq A$.

Et donc $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.

Dans le cas croissant, on a donc montré que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{]a; b[} (f)$ (éventuellement $+\infty$).

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :

- Si f est décroissante et minorée, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf_{]a; b[} (f) > -\infty$.
- Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

III.3 Limites à gauche et à droite

Proposition 18 :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$) et $f :]a; b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a; b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Preuve : Dire que f est définie en x_0 revient à dire que $f(x_0)$ existe et $-\infty < f(x_0) < +\infty$.

Notons $f_1 = f|_{]a, x_0[}$. La fonction f_1 est croissante, et majorée par $f(x_0)$.

D'après le **théorème (17)**, f_1 admet donc une limite finie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \sup_{]a, x_0[} (f_1)$.

Or, par définition, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

D'autre part, $\sup_{]a, x_0[} (f_1)$ étant *le plus petit* des majorants de f_1 , et $f(x_0)$ étant un majorant de f_1 , on peut en déduire que $\sup_{]a, x_0[} (f_1) \leq f(x_0)$.

On a donc prouvé que f admettait une limite à gauche en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$.

C'est plus facile pour la limite à droite en considérant $f_2 = f|_{]x_0, b[}$ croissante donc minorée par $f(x_0)$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{]x_0, b[} (f_2) \geq f(x_0).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 :

Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons ces énoncés :

À retenir 1 :

Le théorème de la limite monotone affirme que dans le cas particulier d'une fonction $f :]a; b[\mapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a; +\infty[$:

- la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ par passage à la limite,
- pour tout $c \in]a; b[$, les limites $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$,
- la limite $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV/ Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) : Soit $f : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists V_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall x \in D \cap V_a, \quad f(x) \in V_\ell,$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

On définit de la même manière que précédemment les limites à gauche et à droite (en a).

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :

Soient $f : D \mapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) : Soit $f : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $\forall x \in D, \quad |f(x)| \leq K$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

En particulier,

Corollaire 19.1 :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : D \mapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{D}$ alors f est bornée sur un voisinage de a .

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{C}$ la limite de f en a . Alors,

$$\forall x \in D, \quad |f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq 1$ et

$$\forall x \in D \cap [a - \alpha; a + \alpha], \quad ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| \leq 1 \implies |f(x)| \leq 1 + |\ell|.$$

Globalement,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in D \cap [a - \eta; a + \eta], \quad |f(x)| \leq M.$$

Donc, f est bornée dans un voisinage de a .

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions de la variable réelle - LIMITES

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos(x)}{1-x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin(x)}{2 - \sin(x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) + 1}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sin(5x^2)}{x+1}$
13. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin(x)}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin(x)$

Correction : Par commodité d'écriture, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \dots = \pm\infty$ signifiera $\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots = +\infty$, dans cet exercice.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1 - \frac{3}{\sqrt{x}}} = +\infty.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées.
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \pm 1.$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = 0.$
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \frac{\frac{x+1}{x} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}} + 1} = 1.$
7. $\forall x \neq 1, -\frac{1}{1-x} \leq \frac{\cos(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos(x)}{1-x} = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq \frac{x + \sin(x)}{2 - \sin(x)} \leq \frac{x+1}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin(x)}{2 - \sin(x)} = \pm\infty$ d'après le théorème de comparaison.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$ d'après le théorème de comparaison.
10. $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = 1.$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sin(5x^2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin(5x^2)$ donc pas de limites.

13. $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos(e^x)}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2+1} = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
14. $\forall x \in \mathbb{R}, x - \sin(x) \geq x - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$ d'après le théorème de comparaison et celui sur les limites de composées.
15. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin(x) = \frac{\sqrt{x} \cos^2(x)}{1 + \sin(x)} \geq \frac{\sqrt{x}}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin(x) = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$.

- Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leq \frac{1}{x}$.
- En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Correction :

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ d'où $x^2 > 0$ entraîne $\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leq \frac{1}{x}$.
- D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

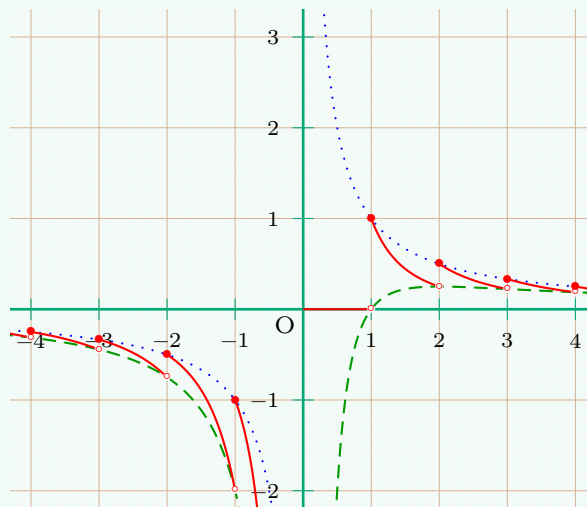


Figure XV.16 – Courbes de $x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos(x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x) - \cos(x))}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}$
12. $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \quad (\alpha > 0)$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
16. $\lim_{x \rightarrow \pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right)$

Correction :

1. $\frac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x + 2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2 . Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.
2. $\frac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \rightarrow -\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \rightarrow 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} = 1 - \cos(x)$. Lorsque $x \rightarrow \pi$ la limite est donc 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x - (1+x^2)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$

$$= \frac{x - x^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) \times \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{x+5 - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$.
Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3 - 1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2 - 1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \rightarrow 0$, alors $a \rightarrow 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$. Donc si $x \rightarrow 1$ la limite de $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ est n . Donc la limite de $\frac{x - 1}{x^n - 1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.

La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ tend vers $f'(1) = n$.

9. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction x^k , et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α , soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

10. La fonction $f(x) = \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x) - \cos(x))}$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)(\cos(2x) - \cos(x))}$.

Or $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Posons $u = \cos(x)$, alors

$$f(x) = \frac{1 - u}{u(2u^2 - u - 1)} = \frac{1 - u}{u(1 - u)(-1 - 2u)} = \frac{1}{u(-1 - 2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos(x)$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

11.

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ et $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \rightarrow 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

12. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x + \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}} - 1}{\sqrt{x + \alpha}}.$$

Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x} - \alpha}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x - \alpha}{(\sqrt{x} - \alpha)(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x} - \alpha}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{x} + \alpha}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

13. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$. Donc pour $y > 0$, $\frac{y-1}{y} < \frac{\lfloor y \rfloor}{y} \leq 1$.

On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\frac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend 1.

On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$.

En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend vers 1.

14.
$$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{1}{x + 3}.$$

La limite de $\frac{e^x - e^2}{x - 2}$ en 2 vaut e^2 ($\frac{e^x - e^2}{x - 2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x = 2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

15. Soit $f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geq 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = \frac{(2k\pi)^4}{1 + (2k\pi)^\alpha \sin^2(2k\pi)} = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \frac{v_k^4}{1 + v_k^\alpha \sin^2(v_k)} = \frac{v_k^4}{1 + v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2(x)}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4 - \beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2(x)$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2(x)$ est bornée par 1).

Donc le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. La limite vaut donc $+\infty$.

16. $\lim_{x \rightarrow \pi} 1 + \cos(x) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow \pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Correction : Supposons $a \geq b$. Alors

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = a \left(\frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or, $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$, donc $0 \leq \left(\frac{b}{a} \right)^x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$.

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq 1^{\frac{1}{x}}.$$

Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1 d'après le théorème d'encadrement.

$$\text{Conclusion, si } a \geq b \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a.$$

Si $b \geq a$ alors cette limite vaudrait b .

Cela se résume dans le cas général où a, b sont quelconques par

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a, b).$$

Exercice 5 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+ .

$$f_1 : x \mapsto \frac{3x^2 - 1}{x^2}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{2x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$f_{10} : x \mapsto x^x$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{e^{\sin(x)} - 1}{5^x - 2^x}$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f_{14} : x \mapsto \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$$

$$f_{15} : x \mapsto \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

$$f_{16} : x \mapsto \arctan\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$f_{17} : x \mapsto \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2 - 2x}$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{1}{1-x} - (1 + x + \dots + x^n)$$

Correction :

1. Au voisinage de 0, $3x^2 - 1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 1}{x^2} = -\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, $\frac{2x - 1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x - 1}{\sqrt{x}} = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \pm x = 0$.

4. On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $\tan$ qui y est dérivable donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \tan^2(x) = 1$.

5. Même chose avec la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

6. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $1 - \cos(x) > 0$ et $1 + \cos(x) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}} = +\infty$

7. $\forall x \neq 0$, $\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \times \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{5}{3}$ donc, d'après la limite connue $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \frac{5}{3}$.

8. Même chose avec $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(x)}{x} \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
9. $\forall x \neq 0, \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^x = e^{x \ln(x)}$. D'après les théorèmes sur les croissances comparées et ceux sur les limites de composées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 3$ d'après les théorèmes de croissances comparées en 0.
12. En reconnaissant l'inverse du taux de variation de la fonction $x \mapsto e^{\sin(x)}$ en 0 qui y est dérivable et de nombre dérivé non nul, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\sin(x)} - 1} = \frac{1}{(e^{\sin(x)})'(0)} = \frac{1}{\cos(0) e^{\sin(0)}} = 1.$$

13. Même chose après avoir factorisé par 2^x : $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x \left(\left(\frac{5}{2} \right)^x \right)'(0) = \ln \left(\frac{5}{2} \right)$.
14. $\forall x > 0, \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $1 - \sqrt{x} < \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \leq 1$ et, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = 1$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x^2} = 2$.
16. D'après les théorème de croissances comparées $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc, d'après les théorèmes de limite de composées $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{\pi}{4}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-2)(\sqrt{1-x} + 1)} = \frac{1}{4}$.
18. $\forall x \neq 1, \frac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n) = \frac{x}{1-x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n)}{x^n} = 0$.

Exercice 6 : Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet de limite en aucun point.

(On pourra utiliser l'existence, pour tout réel x , d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels convergeant vers x .)

Correction : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ où $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels.

On a alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbb{1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}(r_n) = 1$.

Cependant, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$ où $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de d'irrationnels.

On a alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbb{1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}(q_n) = 0$.

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet donc de limite en aucun point.

Exercice 7 : Montrer que les courbes des fonctions $x \mapsto \frac{e^x}{2}$, $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$.

Correction :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} - \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0.$$

Donc, les courbes des fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$ dans cet ordre.

Exercice 8 : Pour les fonctions suivantes, étudier les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de leur courbe représentative.

$$f_1 : x \mapsto 3 - \frac{1}{x+2}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \text{ où } c \neq 0.$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}.$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1}.$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{2x-2}{x^2+x-2}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$$

$$f_8 : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$$

Correction : On notera $\mathcal{C}_i$ la courbe représentative de la fonction f_i .

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -2} 3 - \frac{1}{x+2} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote d'équation $x = -2$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{x+2} = 0^-$.

Donc $\mathcal{C}_1$ admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote et se situe en dessous de celle-ci au voisinage de $\pm\infty$.

2. Comme $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_2$ admet une asymptote d'équation $x = -\frac{d}{c}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{c} - (ad-bc) \underbrace{\frac{1}{c^2x+cd}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0^+} = \frac{a}{c}.$

Donc $\mathcal{C}_2$ admet la droite d'équation $y = \frac{a}{c}$ pour asymptote et sa position est donnée par le signe de $-(ad-bc)$.

3. Une division euclidienne de polynômes s'écrit $\frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1} = -x + 2 + \frac{2}{x^2 + 1}.$

$\mathcal{C}_3$ admet donc la droite d'équation $y = -x + 2$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en l'infini.

4. Une division euclidienne de polynômes s'écrit $\frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1} = x - 3 + \frac{8x}{3x^2 + 1}.$

$\mathcal{C}_4$ admet donc la droite d'équation $y = x - 3$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.

5.
$$\begin{aligned} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1} &= \frac{x^6 - 1}{(x-1)(x^4 - 1)} = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{(x-1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Comme 1 n'est pas racine du numérateur, $\mathcal{C}_5$ admet une asymptote d'équation $x = 1$.

Commentaires : La valeur -1 est appelée une fausse singularité.

$$\text{De plus, } \forall x \neq 1, \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1} = x + 1 + \underbrace{\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 - 1}}_{\text{du signe de } x^3 \text{ en } \pm\infty}.$$

$\mathcal{C}_5$ admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.

6. $\frac{2x-2}{x^2+x-2} = \frac{2}{x+2}$ donc $\mathcal{C}_6$ admet une asymptote d'équation $x = -2$. Le pôle 1 qui est aussi une racine du numérateur est une fausse singularité.

De plus $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{2x-2}{x^2+x-2}}_{\text{du signe de } x \text{ en } \pm\infty} = 0$. Donc, $\mathcal{C}_6$ admet l'axe des abscisses pour asymptote et se situe dessus celui-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.

7. $\frac{2x^2-3x+1}{x-1} = 2x-1$. Donc $\mathcal{C}_7$ n'a pas d'asymptotes.

8. f_8 est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \pm 1$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, $\mathcal{C}_8$ admet la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$.

Pour déterminer la position, on étudie le signe de $\sqrt{x^2-x+1} - \left(x - \frac{1}{2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$$\sqrt{x^2-x+1} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1} + \left(x - \frac{1}{2}\right)} > 0.$$

Donc, $\mathcal{C}_8$ se situe au dessus de son asymptote en $+\infty$.

En $-\infty$, on a successivement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-x+1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Puis } \sqrt{x^2-x+1} - \left(-x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1} + \left(-x + \frac{1}{2}\right)} > 0.$$

Donc, $\mathcal{C}_8$ admet la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ pour asymptote en $-\infty$ et se situe au-dessus au voisinage de $-\infty$.

Limites I

1. Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists V_x \in \mathcal{V}(x), V_x \subset A.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. $]a; +\infty[=]a; +\infty[.$

On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall V_b \in \mathcal{V}(b), \exists U_a \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in U_a \cap D \implies f(x) \in V_b.$$

(donner la définition avec les voisinages et que les voisinages)

4. Donner la caractérisation de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ à partir d'inégalités $\leq$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq \beta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon \text{ ou } b - \varepsilon \leq f(x) \leq b + \varepsilon.$$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

- (a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

- (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Limites I

1. On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall V_x \in \mathcal{V}(x), A \cap V_x \neq \emptyset.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $\overline{[a; b]} = [a; b]$.

On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall V_b \in \mathcal{V}(b), \exists U_a \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in U_a \cap D \implies f(x) \in V_b.$$

(donner la définition avec les voisinages et que les voisinages)

4. Donner la caractérisation de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ à partir d'inégalités $\leq$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha(A) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \text{ ou } a - \alpha \leq x \leq a + \alpha \implies f(x) \leq A.$$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

(a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Limites II

1. Donner la caractérisation de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ à l'aide d'intervalles fermés et seulement des intervalles :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{D}, x \in [a - \alpha; a + \alpha] \implies f(x) \in [b - \varepsilon; b + \varepsilon].$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} - \frac{e^{3x} - 1}{x} = (e^{5x})'(0) - (e^{3x})'(0) = 5 - 3 = 2 \text{ en reconnaissant les taux d'accroissement en 0 de deux fonctions dérivables.}$$

3. Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Compléter :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	Forme Indéter.	0	∞

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

- (a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

- (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \implies u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \implies \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Limites II

1. Donner la caractérisation de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ à l'aide d'intervalles fermés et seulement des intervalles :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \in]-\infty; \beta] \Rightarrow f(x) \in [A; +\infty[.$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{\uparrow \\ u = \frac{1}{x}}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x e^{\frac{1}{x}} = 0$ d'après les théorèmes sur les limites de composées et de produits.

3. Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Compléter :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	Forme Indéter.	∞

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

- (a) Justifier que $\alpha = \sup \left(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \right)$ est correctement défini et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha \leq \alpha + \varepsilon.$$

- (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α , $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geq \alpha - \varepsilon.$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p(\alpha, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq u_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers α .

Autour d'une fonction de Lambert

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x e^{-x}$.

Partie A : Définition de la réciproque w de f .

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations complet.

2. Montrer que f établit une bijection de $I =]-\infty; 1]$ sur un intervalle J à préciser.

On note w la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

3. Montrer que w est dérivable sur un intervalle J' strictement inclus dans J que l'on précisera. Justifier que $\forall y \in J', w'(y) = \frac{e^{w(y)}}{1 - w(y)}$.

On admettra par la suite que la fonction w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J' .

4. Calculer $w(0)$ et $w(-e)$ ainsi que $w'(0)$ et $w'(-e)$.

5. Montrer que f admet en $-\infty$ une branche infinie dont on précisera la nature. En déduire la nature de la branche infinie de w en $-\infty$.

6. Donner rapidement les équations des tangentes à la courbe de f en 0, 1 et $-e$ ainsi que celles de leur symétrique tangentes à la courbe de w .

7. Tracer soigneusement les courbes représentatives de f et w en prenant pour échelle au moins 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

On prendra les approximations usuelles des physiciens $e \simeq 3^{\llcorner - \gg}$ et $\frac{1}{e} \simeq \frac{1}{3}^{\llcorner + \gg}$.

Partie B : Calcul d'une primitive W de la réciproque w .

8. Justifier que $\forall y \in J, w(y) e^{-w(y)} = y$.

9. Si $y \in J$, après avoir justifié son existence, calculer $\int_0^{w(y)} (t - t^2) e^{-t} dt$.

10. Si $y \in J$, calculer $\int_0^y w(x) dx$ en effectuant le changement de variable $t = w(x)$.

11. En déduire que $W : y \mapsto y w(y) + y + e^{-w(y)}$ est une primitive de w sur J .

Partie C : Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux.

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle J' et on s'intéresse à la résolution du problème différentiel d'inconnue z suivant :

$$\begin{cases} z'' + w(y)z' + w'(y)z = w'(y) \\ z'(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

On définit alors la fonction $Z: y \mapsto z'(y) + w(y)z(y)$.

12. Montrer que si z est $\mathcal{C}^2$ sur J' , alors Z est $\mathcal{C}^1$ sur J' .

13. Soit z une fonction $\mathcal{C}^2$ sur J' . Démontrer que z est solution de (E) si, et seulement si $Z' = w'$ sur J' .

14. En déduire que z est solution de (E) **et** $z'(0) = 0$ si, et seulement si $\forall y \in J', Z(y) = w(y)$.

15. Résoudre sur J , l'équation différentielle

$$z' + w(y)z = w(y). \quad (\text{E}')$$

16. Conclure quant au problème posé.

Autour d'une fonction de Lambert

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x e^{-x}$.

Partie A : Définition de la réciproque w de f .

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations complet.

Correction : Par produit d'un polynôme et de l'exponentielle d'un polynôme, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 - x) e^{-x}$$

qui est du signe de $1 - x$.

Les limites aux bornes sont faciles à trouver d'après les théorèmes sur les limites de produits et de croissances comparées.

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	−	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. Montrer que f établit une bijection de $I =]-\infty; 1]$ sur un intervalle J à préciser.

On note w la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

Correction : Grâce à ce qui précède, f est **continue** (car $\mathcal{C}^\infty$) sur l'**intervalle** I et est **strictement croissante** sur I .

D'après le théorème du même nom, la fonction f établit donc une bijection de I sur son image $J = f(I) = \left] -\infty; \frac{1}{e} \right]$.

Commentaires : Je rappelle que f n'est pas du tout une bijection. Elle en induit ou établit une sur son image i.e. seule sa corestriction à l'image est bijective.

Comme f est continue sur I , le théorème de la bijection assure que sa réciproque $w = f^{-1}$ est continue sur J .

Commentaires : N'oubliez pas de préciser que I est un intervalle sinon c'est mort !

3. Montrer que w est dérivable sur un intervalle J' strictement inclus dans J que l'on précisera. Justifier que

$$\forall y \in J', \quad w'(y) = \frac{e^{w(y)}}{1 - w(y)}.$$

Correction : D'après la question précédente, f est bijective et dérivable sur I . De plus, sa dérivée est non nulle sur $I' = I \setminus \{1\}$. Sa réciproque sera donc dérivable sur $J' = J \setminus \left\{ f(1) = \frac{1}{e} \right\} =]-\infty; \frac{1}{e}[$.

En outre,

$$\forall y \in]-\infty; \frac{1}{e}[, w'(y) = \frac{1}{f'(w(y))} = \frac{1}{(1-w(y))e^{-w(y)}} = \frac{e^{w(y)}}{1-w(y)}.$$

On admettra par la suite que la fonction w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J' .

4. Calculer $w(0)$ et $w(-e)$ ainsi que $w'(0)$ et $w'(-e)$.

Correction : Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $w(0) = 0$ puis $w'(0) = \frac{e^{w(0)}}{1-w(0)} = 1$.

Pour calculer $w(-e)$, il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = -e$, ce qui donne clairement $x = -1$ (et c'est la seule solution car f est bijective sur $I =]-\infty; 1]$).

Donc $w(-e) = -1$ puis $w'(-e) = \frac{e^{w(-e)}}{1-w(-e)} = \frac{1}{2e}$.

5. Montrer que f admet en $-\infty$ une branche infinie dont on précisera la nature. En déduire la nature de la branche infinie de w en $-\infty$.

Correction : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc la courbe de f présente une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice, la courbe de w présente une branche parabolique de direction (Ox) en $-\infty$.

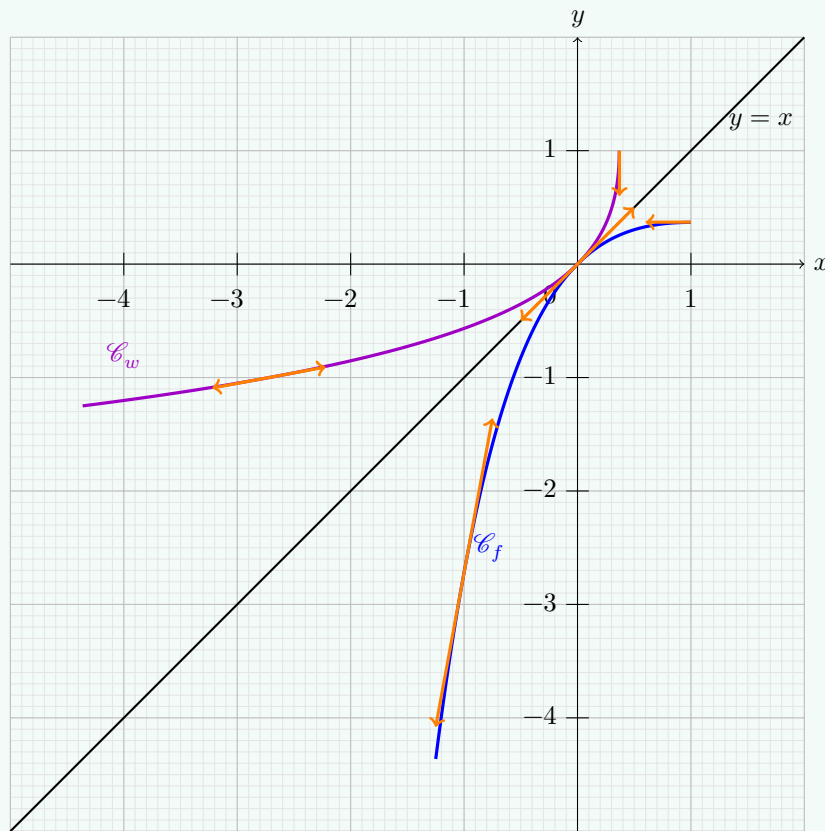
6. Donner rapidement les équations des tangentes à la courbe de f en 0, 1 et -1 ainsi que celles de leur symétrique tangentes à la courbe de w .

Correction : Rapidement :

- $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donnent $(T_0) : y = x$ confondue avec l'axe de symétrie qui sera donc aussi la tangente à w en 0.
- $f(1) = \frac{1}{e}$ et $f'(1) = 0$ donnent $(T_{1,f}) : y = \frac{1}{e}$ parallèle à l'axe des abscisses. La tangente à w en $\frac{1}{e}$ sera donc parallèle à l'axe des ordonnées.
- $w(-e) = -1$ et $w'(-e) = \frac{1}{2e}$ donnent $(T_{-e,w}) : y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2}$. La tangente à la courbe de f en -1 aura donc pour équation $(T_{-1,f}) : y = 2ex + e$.

7. Tracer soigneusement les courbes représentatives de f et w en prenant pour échelle au moins 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

On prendra les approximations usuelles des physiciens $e \simeq 3^{''-''}$ et $\frac{1}{e} \simeq \frac{1}{3}^{''+''}$.

Correction :**Partie B :** Calcul d'une primitive W de la réciproque w .8. Justifier que $\forall y \in J, w(y) e^{-w(y)} = y$.**Correction :** Il suffit de se rappeler la définition d'une réciproque :

$$\forall y \in J, y = f(f^{-1}(y)) \iff y = f(w(y)) = w(y) e^{-w(y)}.$$

9. Si $y \in J$, après avoir justifié son existence, calculer $\int_0^{w(y)} (t - t^2) e^{-t} dt$.**Correction :** La fonction w est définie et continue sur J et à valeurs dans I , intervalle de $\mathbb{R}$ où la fonction polynomiale $t \mapsto t - t^2$ et l'exponentielle $t \mapsto e^{-t}$ donc leur produit sont continus.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale est correctement définie.

De plus, ces mêmes fonctions (au signe près) sont également de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. On peut donc réaliser une double IPP en dérivant la fonction polynomiale :

$$\begin{aligned} \int_0^{w(y)} (t - t^2) e^{-t} dt &= [(t^2 - t) e^{-t}]_0^{w(y)} + \int_0^{w(y)} (1 - 2t) e^{-t} dt \\ &= (w(y)^2 - w(y)) e^{-w(y)} + [(2t - 1) e^{-t}]_0^{w(y)} - 2 \int_0^{w(y)} e^{-t} dt \\ &= (w(y) - 1) w(y) e^{-w(y)} + (2w(y) - 1) e^{-w(y)} + 1 - 2[-e^{-t}]_0^{w(y)} \\ &= y(w(y) - 1) + 2w(y) e^{-w(y)} - e^{-w(y)} - 1 + 2e^{-w(y)} \\ &= yw(y) + y + e^{-w(y)} - 1. \end{aligned}$$

10. Si $y \in J$, calculer $\int_0^y w(x) dx$ en effectuant le changement de variable $t = w(x)$.

Correction : On n'oubliera pas de rappeler que w est continue sur J donc que l'intégrale est correctement définie.

Poser $t = w(x)$ revient à poser $x = f(t)$ (car $w = f^{-1}$) qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On a alors,

$$\begin{aligned} \int_0^y w(x) dx &= \int_{f(0)}^{f(w(y))} w(x) dx = \int_0^{w(y)} w(f(t)) f'(t) dt \\ &= \int_0^{w(y)} t(1-t) e^{-t} dt = \int_0^{w(y)} (t - t^2) e^{-t} dt \\ &= yw(y) + y + e^{-w(y)} - 1. \end{aligned}$$

11. En déduire que $W : y \mapsto yw(y) + y + e^{-w(y)}$ est une primitive de w sur J .

Correction : La fonction w étant **continue** sur J , le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction $y \mapsto \int_0^y w(x) dx$ est une primitive de w sur J .

La fonction $y \mapsto yw(y) + y + e^{-w(y)} - 1$ est donc une primitive de w sur J . À une constante près, la fonction W est donc aussi une primitive de w sur J .

Commentaires : Ici, il était dangereux de dériver W (en justifiant la dérivabilité au préalable) car w n'est dérivable que sur J' et non sur J tout entier. On aurait donc obtenu facilement $W' = w$ sur J' , mais il reste à étudier ce qu'il se passe en $y = \frac{1}{e}$, chose qu'on abordera uniquement aux chapitres sur la dérivabilité et l'intégration...

Partie C : Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux.

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle J' et on s'intéresse à la résolution du problème différentiel d'inconnue z suivant :

$$\begin{cases} z'' + w(y)z' + w'(y)z = w'(y) \\ z'(0) = 0. \end{cases} \quad (E)$$

On définit alors la fonction $Z : y \mapsto z'(y) + w(y)z(y)$.

12. Montrer que si z est $\mathcal{C}^2$ sur J' , alors Z est $\mathcal{C}^1$ sur J' .

Correction : Si z est $\mathcal{C}^2$ sur J' , alors en particulier z et z' sont $\mathcal{C}^1$ sur J' . Donc, par produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur J' (rappelons que w est $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$, sur J'), on a bien Z de classe $\mathcal{C}^1$ sur J' .

13. Soit z une fonction $\mathcal{C}^2$ sur J' . Démontrer que z est solution de (E) si, et seulement si $Z' = w'$ sur J' .

Correction : Par ce qui précède, Z est $\mathcal{C}^1$ sur J' et sa dérivée est

$$y \mapsto z''(y) + w'(y)z(y) + w(y)z'(y).$$

Ainsi, une fois n'est pas coutume, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} Z' = w' \text{ sur } J' &\iff \forall y \in J', \quad Z'(y) = w'(y) \\ &\iff \forall y \in J', \quad z''(y) + w(y)z'(y) + w'(y)z(y) = w'(y) \\ &\iff z \text{ est solution de (E) sur } J'. \end{aligned}$$

14. En déduire que z est solution de (E) et $z'(0) = 0$ si, et seulement si $\forall y \in J', \quad Z(y) = w(y)$.

Correction : D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E) sur } J' &\iff Z' = w' \text{ sur } J' \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall y \in J', \quad Z(y) = w(y) + K. \end{aligned}$$

En prenant en compte la condition initiale $z'(0) = 0$, on a :

$$Z(0) = w(0) + K \iff z'(0) + w(0)z(0) = w(0) + K \iff K = 0,$$

car $z'(0) = w(0) = 0$.

Finalement, on a bien :

$$z \text{ solution de (E) et } z'(0) = 0 \text{ si, et seulement si } Z = w \text{ sur } J'.$$

15. Résoudre sur J , l'équation différentielle

$$z' + w(y)z = w(y). \quad (E')$$

Correction : (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'application $y \mapsto 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J est clairement une solution particulière.

Comme w est continue sur J , les solutions homogènes sont les fonctions de la forme $y \mapsto \lambda e^{-W(y)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ où W est la primitive de w sur J' calculée à la partie précédente.

Les solutions générales sur J sont donc les fonctions :

$$y \mapsto 1 + \lambda e^{-W(y)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

16. Conclure quant au problème posé.

Correction : Grâce aux questions précédentes, une fois n'est pas coutume, on a les équivalences :

$$z \text{ solution de (E) sur } J' \text{ et } z'(0) = 0 \iff Z = w \text{ sur } J'$$

$$\iff z \text{ est solution sur } J' \text{ de } z' + w(y)z = w(y)$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in J', \quad z(y) = 1 + \lambda e^{-W(y)}.$$

Fonctions d'une variable réelle - Continuité

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans le paragraphe 3, sont à valeurs réelles.

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A; +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty; A[$ si $a = -\infty$.

1. Continuité en un point

- Continuité, prolongement par continuité en un point. La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$
- Continuité à gauche, à droite.
- Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

2. Continuité sur un intervalle

- Continuité sur un intervalle.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Principe de démonstration par dichotomie.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

- Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. *La démonstration est hors programme.*
- Image d'un segment par une fonction continue.
- Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle. *La démonstration n'est pas exigible.*

3. Fonctions complexes

- Brève extension des définitions et résultats généraux sur la continuité.
- Caractérisation de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingénierie (Archimède^[1])
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée^[2], écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre nous suivons le processus inverse et donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. On commencera par redéfinir de manière uniforme et cohérente la notion de continuité basée sur la notion de limite revue également dans le chapitre précédent.

Notre progression nous ramènera également sur un théorème fondamental de l'analyse réelle, le fameux *théorème des valeurs intermédiaires* que vous connaissez déjà bien mais dont la démonstration vous échappait encore fondamentalement.

CONTENU

I	Continuité	997
I.1	Fonction continue	997
I.2	Stabilité algébrique	1000
I.3	Prolongement par continuité	1002

[1]. Archimède de Syracuse, né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort en cette même ville en 212 av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Bien que peu de détails de sa vie soient connus, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité classique. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vis d'Archimède.

Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps¹. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie, et a donné un encadrement de Pi d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Archimède est mort pendant le siège de Syracuse où il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

[2]. Claude Ptolémée, communément appelé Ptolémée (Ptolémaïs de Thébaïde (Haute-Égypte) vers 90 - Canope vers 168) est un astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie (Égypte). Il est également l'un des précurseurs de la géographie. Sa vie est mal connue. Son *cognomen* *Ptolemaeus* semble indiquer des origines gréco-égyptiennes, et son *nomen* *Claudius* une citoyenneté romaine.

I.4	Continuité et suites.	1004
II	Théorèmes de continuité globale.	1007
II.1	Théorème de Bolzano et dichotomie.	1007
II.2	Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences	1011
II.3	Image d'un segment	1014
III	Continuité des fonctions monotones	1016
III.1	Lien entre monotonie et continuité.	1016
III.2	Continuité et bijectivité	1018
IV	Fonctions à valeurs complexes	1022
	<i>Feuille d'exercices n° 17 : Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ</i>	1024
	<i>Devoir en temps libre n° 17 : De la continuité et des points fixes</i>	1035
	<i>Correction</i>	1036
	<i>Programme de Khôlle des semaines 15 et 16</i>	1039
	<i>Devoir surveillé n° 4 : Matrices - Suites - Fonctions</i>	1041
	<i>Correction</i>	1045
	Programme du chapitre XVII	1059

Les fonctions que l'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0; 1[\cup [2; 3]$, voire $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans tout ce chapitre, la lettre D qui nous servira d'ensemble de définition désignera cependant, sauf mention contraire, une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

On notera par ailleurs $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Continuité

I.1 Fonction continue

Définition 1 (Fonction continue) : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in D$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D .

On note $\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R})$ leur ensemble.

- On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / f(V_{a, V_{f(a)}} \cap D) \subset V_{f(a)}$.
 - ou
 - $\forall V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_{a, V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in D, x \in V_{a, V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$.
- ce qui revient à écrire :
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
 - $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in D, x \in [a - \alpha; a + \alpha] \implies f(x) \in [f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon]$.

Interprétation graphique : Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

On a déjà vu que si f est définie en a et qu'elle admet une limite en a , alors sa limite est nécessairement $f(a)$. Demander que f soit continue en $a \in D$ est donc équivalent à demander admettre une limite en a (la définition y étant nécessaire).

ATTENTION

Pour pouvoir parler de continuité en a , il est nécessaire que f soit définie en a . Cela revient en fait à exiger seulement que la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Cela n'a donc pas de sens de chercher si la fonction inverse est continue en 0. S'il faut lever le crayon pour tracer la courbe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, c'est simplement parce qu'elle n'est pas définie en 0.

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a .
- f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in D, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (\text{XVI.1})$$

- f est continue à gauche en a si $f_{|D \cap]-\infty; a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|D \cap]a; +\infty[}$ est continue en a .

Exemple 1 : La fonction valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $||x| - |a|| \leq |x - a|$ d'après l'inégalité triangulaire généralisée.

Pour $\alpha = \varepsilon$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha \implies ||x| - |a|| \leq \varepsilon$ et la continuité en a quelconque de $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto |\cdot|$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

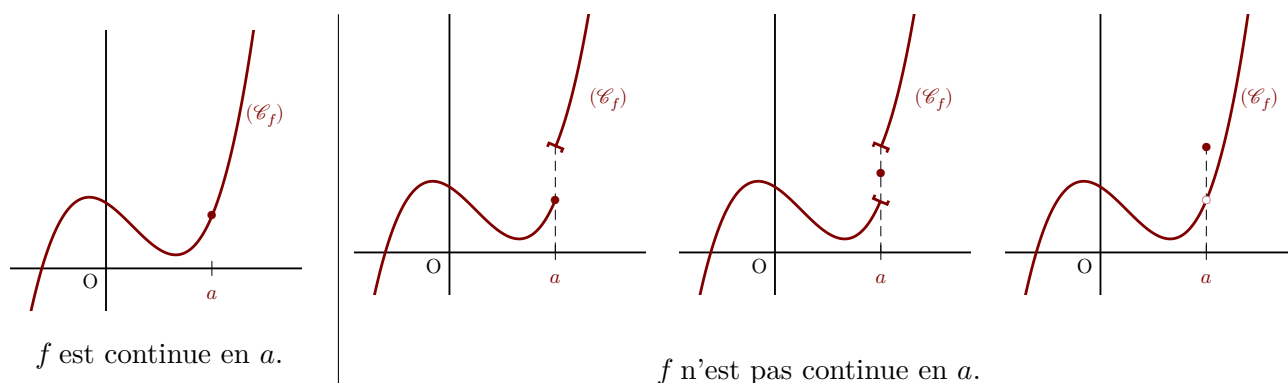


Figure XVI.1 – Continuité et discontinuité en un point.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\text{Id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto [x]$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Plus précisément, la fonction $x \mapsto [x]$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est continue à gauche qu'en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

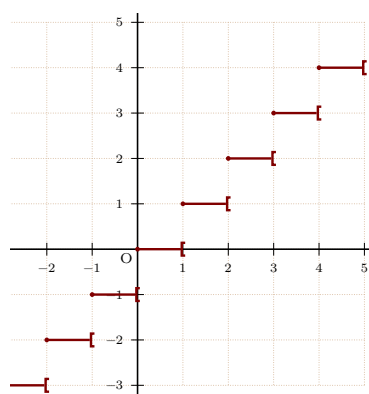


Figure XVI.2 – $x \mapsto [x]$

Le résultat suivant est la version continue d'un résultat analogue sur les limites du chapitre précédent :

Théorème 1 (Continuité à gauche et à droite) :

Soient $f : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a .

Pour tout $x \in [0; 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \mapsto 0$ est continue sur $[0; 1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $[0; 1[$?

Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0; 1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 À GAUCHE *i.e.* à l'extérieur de $[0; 1[$.

Alors que la restriction $x \mapsto \lfloor x \rfloor|_{[0; 1[}$ est bien continue sur $[0; 1[$ tout entier, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ne l'est que sur $]0; 1[$. En particulier, elle N'est PAS continue en 0.

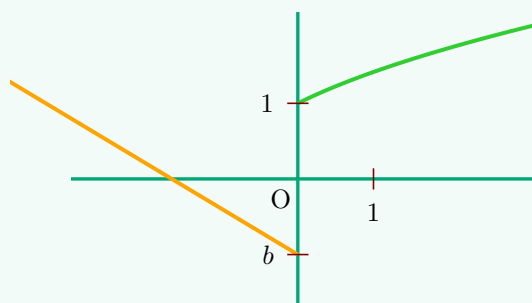
ATTENTION

Exercice 1 : Tracer le graphe de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0.

Correction :



La fonction f est définie en 0 et on a $f(0) = \sqrt{1} = 1$ donc elle y sera continue si, et seulement si $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} ax + b = b = f(0) = 1$ donc si, et seulement si $b = 1$.

I.2 Stabilité algébrique

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D .

1. $|f|$ est continue sur D .
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D .
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D .
4. Si g ne s'annule pas sur D alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur D .
5. Si $f(D) \subset E$ et si g est continue sur E alors $g \circ f$ est continue sur D .

Que ce soit en un point ou sur un intervalle, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Même chose pour l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas ainsi que pour la composée de deux fonctions composables. Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues que nous avons prouvés sur les limites de fonctions.

Remarques :

- On dit que $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et produits.
- Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f; g)$ et $\inf(f; g)$ le sont aussi.

Il suffit de remarquer que :

$$\sup(f; g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f; g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

En particulier $f^+ = \sup(f; 0)$ et $f^- = \inf(f; 0)$ le sont.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est continue) :

Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition D d'une fonction f , il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble D' de D et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de f sur D' .

On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de $D \setminus D'$.

ATTENTION

On prendra bien garde à préciser que les dénominateurs des quotients ne s'annulent pas, que les expressions sous les racines sont positives, que celles dans les logarithmes strictement positives, celles dans les arcsin et arccos entre -1 et 1 , ... et on précisera bien les domaines manipulés dans les composées.

Exemple 3 : La fonction $x \mapsto \left(\ln \left(x^2 + e^{\frac{1}{x}} \right) \right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet,

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \mapsto e^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $x \mapsto \ln \left(x^2 + e^{\frac{1}{x}} \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $x \mapsto \arcsin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

— La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $]-\infty; 0[$.

— La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier sur $]-\infty; 0[$ à valeurs dans $]0; 1[$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions continues, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $]0; 1[$.

— La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1; 1]$ donc, en particulier sur $]0; 1[$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions continues, la fonction $x \mapsto \arcsin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (à valeurs dans $]0; \frac{\pi}{2}[$).

Exemple 4 (Fonction k -lipschitzienne) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est k -lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout $(x; y) \in I^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

La fonction est dite *contractante* si $k < 1$.

Théorème 3 :

Toute fonction lipschitzienne est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Correction : C'est un simple exercice de limites :

1. D'après les théorèmes sur les quotients de fonctions continues de dénominateur ne s'annulant pas, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Commentaires : *À ne pas oublier sinon le calcul de limite qui suit ne sert à rien.*

De plus, résultat de croissance comparée en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. D'après les théorèmes sur les composées et les quotients de fonctions continues de dénominateur ne s'annulant pas, la fonction g est définie et continue sur $[-2; 2[\cup]2; +\infty[$.

De plus, soit en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction dérivable $x \mapsto \sqrt{x+2}$ en 2, soit en utilisant la partie conjuguée comme ici, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4} = f(2).$$

La fonction g est donc également continue en 2 donc sur $[2; +\infty[$.

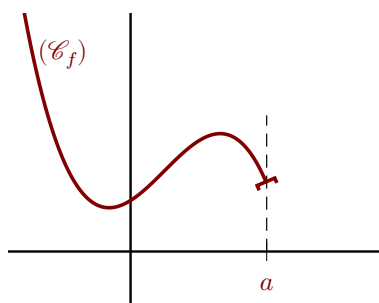
I.3 Prolongement par continuité

Définition 2 : Soient $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus D$ adhérent à D .

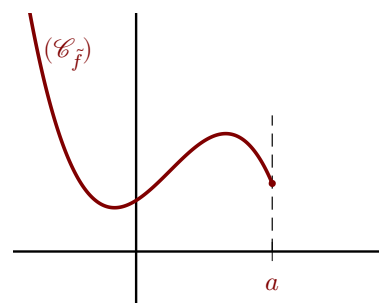
On dit que f est *prolongeable par continuité* en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : D \cup \{a\} \mapsto \mathbb{R}$ continue en a telle que :

$$\tilde{f}|_D = f.$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée *prolongement par continuité* de f en a .



f n'est pas définie en a .



$\tilde{f}$ est définie, continue en a et prolonge f en a .

Figure XVI.3 – Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

ATTENTION

Dans la définition, il doit être clair que a n'appartient pas à D i.e. f n'est pas définie en a .

Les fonctions f et $\tilde{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\tilde{f}$ par souci de simplicité sans autre forme de procès.

Théorème 4 :

Soient $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus D$ adhérent à D .

f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a .

Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de f en a est donné par :

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) : Supposons que f soit prolongeable par continuité en a .

Alors il existe une fonction continue $\tilde{f}$ telle que $\forall x \in D, \tilde{f}(x) = f(x)$

Comme $\tilde{f}$ est continue en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \cup \{a\}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leq \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon$$

Et comme $\forall x \in D, \tilde{f}(x) = f(x)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon$$

La fonction f admet bien en a une limite finie (qui vaut $\tilde{f}(a)$).

($\Leftarrow$) : Supposons que f admette une limite finie ℓ en a , et posons :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : D \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Par construction, $\tilde{f}|_D = f$, donc $\tilde{f}$ est bien un prolongement de f . Montrons qu'il est continue en a :

Comme f admet une limite ℓ finie en a , cela se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leq \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon$$

Par ailleurs, si $x = a$, on a $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = 0$. On peut donc étendre la propriété précédente à tout x de $D \cup \{a\}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \cup \{a\}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon$$

En d'autres mots, $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$ i.e. la fonction $\tilde{f}$ est continue en a .

On a bien trouvé un prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f en a .

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln(x)$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ admettent un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = g(0) = 1$.

- Pour tout $\alpha > 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Montrer que f peut se prolonger en une fonction continue en 0.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$.

En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. La fonction f est clairement continue sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$. De plus, pour tout $x \in [0; 1[$, $f(x) = \sqrt{x}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Pour tout $x \in [-1; 0[$, $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

La fonction f admet donc des limites à droite et à gauche en 0 qui coïncident donc elle peut se prolonger en une fonction continue sur $] -1; 1[$ en posant $f(0) = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc $f(x+1) = f(x) + 1$ et, par récurrence,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(x+p) = f(x) + p.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1 \iff x-p \in [0; 1[$.

Comme $f(x) = f(x-p+p) = f(x-p) + p$, d'après les théorèmes sur les sommes de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$.

I.4 Continuité et suites

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité) :

Soient $f : D \mapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$.

f est continue en a si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D , qui tend vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

En résumé, pour une fonction continue

$$f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \dots\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\dots).$$

Preuve :

Sens direct : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la continuité de f en a , il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$|x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a .

Il existe donc un entier $n_0(\alpha)$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leq \alpha$.

Conclusion, pour $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$.

La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Sens réciproque : Montrons sa contraposée i.e. si montrons que si f n'est pas continue en a alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a et telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

On suppose donc que f n'est pas continue en a :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \exists x_0(\alpha, \varepsilon) \in I, |x_0 - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{n}$, $\exists a_n(\alpha, \varepsilon) \in D$, tel que :

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(a_n) - f(a)| > \varepsilon.$$

Par construction, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et pourtant $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers $f(a)$ car à une distance strictement supérieure à 0.

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

— celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ET si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

— celui des fonctions discontinues :

Par la contraposée pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a , il suffit de trouver deux suites qui convergent vers a mais telles que leur image converge soit pas soit vers deux limites différentes comme à l'exercice (5) .

Exercice 5 : Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

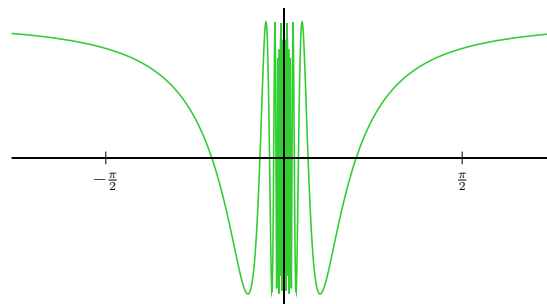


Figure XVI.4 — $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.

Correction : Considérons les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Elles convergent toutes les deux vers 0.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = -1$.

La fonction f ne peut donc pas admettre de limite en 0.

Exemple 6 (Fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$) :

Cet exemple a pour but de montrer que la notion de continuité en un point peut se révéler complexe.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est rationnel sous sa forme irréductible }^{[3]}, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Montrons que f , ainsi construite, est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

- Si x_0 est rationnel alors $f(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$ et, par densité de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, x_0 est limite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'irrationnels.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$, la fonction f ne peut être continue en x_0 .

- Si x_0 est irrationnel, soit $\varepsilon > 0$. Il existe q entier positif tel que $\frac{1}{q}$ soit inférieur à ε .

Posons alors $p = \lfloor x_0 q! \rfloor$, on a :

$$\frac{p}{q!} \leq x_0 < \frac{p+1}{q!} \quad \text{i.e.} \quad I = \left] \frac{p}{q!}; \frac{p+1}{q!} \right[\in \mathcal{V}(x_0).$$

Tout x de $I = \left] \frac{p}{q!}; \frac{p+1}{q!} \right[$ vérifie :

- si x est irrationnel alors $f(x) = 0$.
- si $x = \frac{a}{b}$ est rationnel alors on a :

$$\frac{p}{q!} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{q!} \implies p < \frac{aq!}{b} < p+1$$

Mais alors $\frac{aq!}{b}$, coincé strictement entre deux entiers, ne peut être entier.

Si $|b| \leq q$ alors la fraction $\frac{aq!}{b}$ pourrait se simplifier par b et cela contredirait le fait que $\frac{aq!}{b} \notin \mathbb{Z}$.

Conclusion, $|b| > q \implies |f(x)| = \frac{1}{|b|} < \frac{1}{q} < \varepsilon$.

À ε donné strictement positif quelconque, on a donc trouvé un voisinage I de x_0 tel que l'image de tout x de ce voisinage appartienne au voisinage $]f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon[=]-\varepsilon; \varepsilon[$ de $f(x_0)$.

C'est bien la définition de la continuité de f en x_0 .

[3]. En particulier, $q \in \mathbb{N}^*$ est strictement positif.

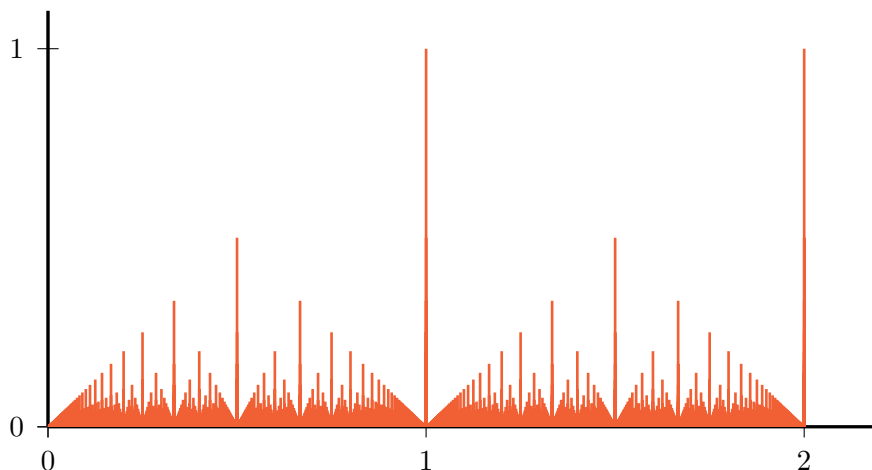


Figure XVI.5 – Graphe de la fonction f , dite de Thomae, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

II/ Théorèmes de continuité globale

ATTENTION

Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions à valeurs réelles.

La continuité globale désigne la continuité sur un intervalle par opposition à la continuité locale en un point.

II.1 Théorème de Bolzano et dichotomie

Théorème 6 (dit de Bolzano) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$ i.e. $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$.

La condition $f(a)f(b) \leq 0$ est équivalente à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

Un peu d'histoire : Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard.

Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX^{ème}.

En 1817, Bolzano (1781-1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique.

La première définition de la continuité, encore intuitive, a été publiée par Cauchy en 1821.

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer, par exemple, que $f(a) \leq 0$. Soit $A = \{x \in [a; b] / f(x) \leq 0\}$.

A contient a , donc est non vide, et est majoré par b . Il admet donc une borne supérieure $c \leq b$.

Montrons que c convient :

- Si $f(c) < 0$ alors, comme f est continue, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $[c - \varepsilon; c + \varepsilon]$ de c sur lequel f est à valeurs strictement négative. En particulier, $f\left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 0$ puis $c + \frac{\varepsilon}{2} \in A$, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A .
- Si $f(c) > 0$, alors f est strictement positive sur un voisinage $[c - \varepsilon; c + \varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$.

Or, par définition de la borne supérieure, $c - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A i.e. $\exists y \in]c - \varepsilon; c[$ tel que $f(y) \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse précédente.

La seule hypothèse restante est alors $f(c) = 0$, ce que l'on souhaitait.

Exercice 6 : Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

En donner un encadrement à 10^{-1} de chacune d'elles.

Correction : Posons $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

1. Comme $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, d'après le **théorème (6)**, il existe $x_2 \in [0; 1]$ tel que $f(x_2) = 0$.
2. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $0 \in f(]-\infty; 0])$, d'après le **théorème (6)**, il existe $x_1 \in]-\infty; 0]$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. De même sur $[1; +\infty[$ et le **théorème (6)**, donne $x_3 \in [1; +\infty[$ tel que $f(x_3) = 0$.

Comme $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$, on a bien trouvé trois racines distinctes de l'équation.

Enfin, par dichotomie, on trouve $x_1 \simeq -2,6$, $x_2 \simeq 0,3$ et $x_3 \simeq 1,3$

Corollaire 6.1 :

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction **continue** sur un segment $[a; b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 - si $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,
 - sinon, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La **proposition (7)** peut être vue comme une démonstration séquentielle du **théorème (6)**.

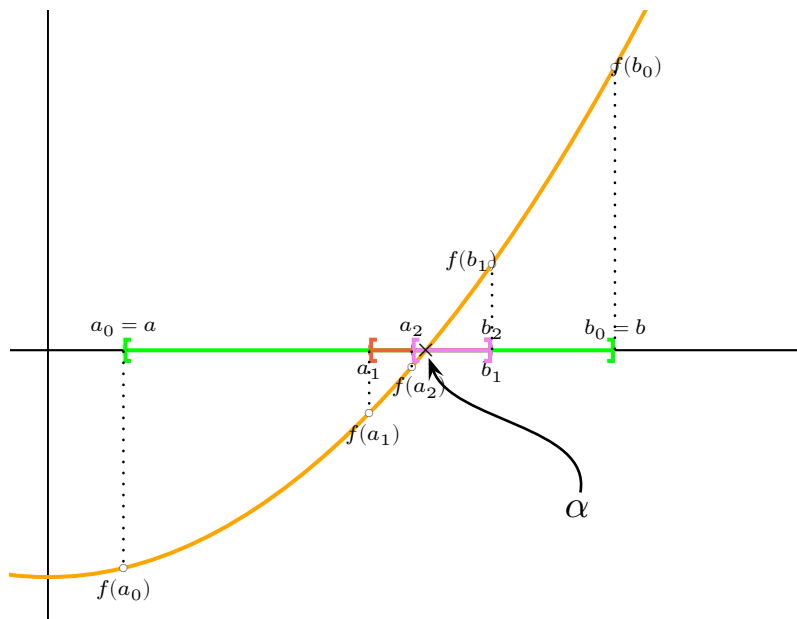


Figure XVI.6 – Méthode par dichotomie

Preuve : Cette propriété est une conséquence du théorème des suites adjacentes. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante par construction. Afin de montrer qu'elles sont adjacentes, il reste à prouver que leur différence $b_n - a_n$ tend vers 0, ce qui découle de l'affirmation :

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Prouvons celle-ci par récurrence.

— Au rang 0, on a $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b - a}{2^0}$. La propriété est vraie.

— Supposons la vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, suivant les cas :

$$\text{— } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$\text{— ou } b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite α .

Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$.

Par construction, on aura toujours $f(a_n)$ du même signe que $f(a)$, disons négatif par exemple comme sur la figure (XVI.6). La fonction étant continue, par passage à la limite, $f(\alpha) \leq 0$.

De même, $f(b_n)$ est du même signe que $f(b)$, positif ici, ce qui implique $f(\alpha) \geq 0$.

On conclut alors que $f(\alpha) = 0$.

Remarque : a_n est une valeur approchée de α par défaut à $\frac{b - a}{2^n}$ près, b_n est une valeur approchée par excès.

```

1 def dichotomie (f,a,b,epsilon): # f continue et f(a)*f (t) <=0
2                               # avec a<b
3     while b-a >= epsilon:
4         milieu = (a+b)/2
5         if f(a)*f(milieu) <= 0: # f s'annule dans la
6                               # première moitié
7             b = milieu
8         else :
9             a = milieu        # f s'annule dans la
10                              # deuxième moitié
11     return (a+b)/2.

```

Figure XVI.7 – Dichotomie en *Python*

Exemple 7 : On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g , étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α . Ayons pour cela recours à la dichotomie.

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.

La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1; 0]$.

- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5; 0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5; -0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée.

Remarque : Pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \leq n$$

II.2 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Théorème 8 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

En particulier, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a; b]; \mathbb{R})$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f dans $[a; b]$.

Pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

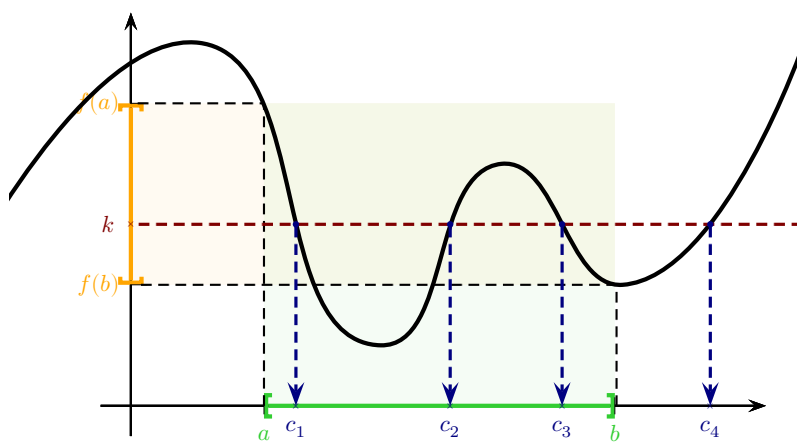


Figure XVI.8 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

Preuve : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer f non constante i.e. $f(I)$ non réduit à un point qui serait bien un intervalle de toute façon.

Soient a, b deux réels distincts de I , supposons $a < b$, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Posons $g : t \mapsto f(t) - k$, alors g est continue sur l'intervalle $[a; b]$ et $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires.

D'après le **théorème (6)**, il existe donc $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = k$.

Conclusion, tout élément entre deux images de I par f possède un antécédent dans I . Cela ne suffit pas encore pour faire de $f(I)$ un intervalle.

Soient $u < v$ deux éléments de $f(I)$. (Montrons que $[u; v] \subset f(I)$.)

Il existe alors $a, b \in I$ (distincts car f est supposée non constante) tels que $f(a) = u$ et $f(b) = v$.

Pour tout $k \in [u; v]$ il existe donc $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$ i.e. $k \in f(I)$, ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle.

Si I est un INTERVALLE et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(I)$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(I)$ sont de même nature.

Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, ...

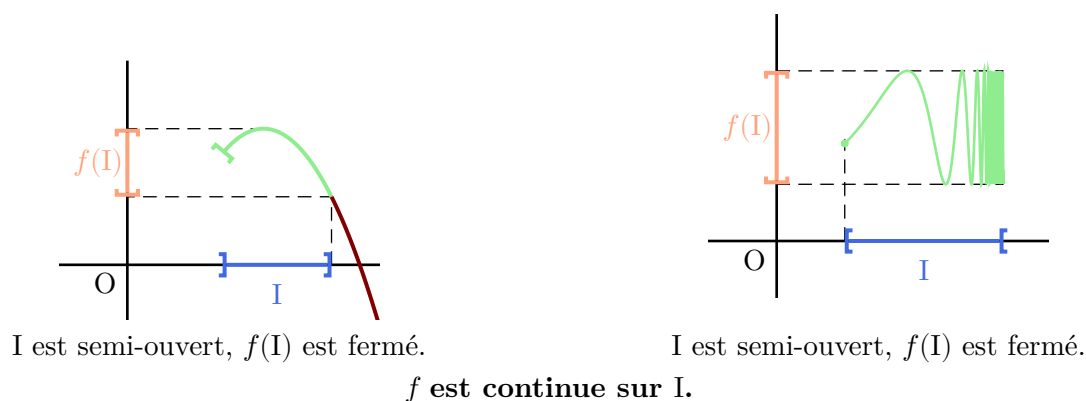
Comme le montrera le **théorème (9)**, ce sera, par contre, bien le cas lorsque l'intervalle est un segment i.e. un intervalle de la forme $[a; b]$.

ATTENTION



I est un intervalle, $f(I)$ n'est pas un intervalle. I et $f(I)$ sont des intervalles (des segments).
 f n'est pas continue sur I .

Figure XVI.9 – Image d'un intervalle par une fonction non continue



I est semi-ouvert, $f(I)$ est fermé.

I est semi-ouvert, $f(I)$ est fermé.

f est continue sur I .

Figure XVI.10 – Image d'un intervalle par une fonction continue

Une réflexion : La propriété des valeurs intermédiaires correspond à une notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction « d'un seul trait » (c'est-à-dire sans soulever le crayon).

Cette remarque amène à se demander s'il n'y a pas équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité ?

La réponse est malheureusement négative.

Un contre-exemple nous est donné par la fonction de l'exercice précédent $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, le théorème de Darboux affirme que toute fonction $[a; b] \mapsto \mathbb{R}$ qui admet une primitive satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

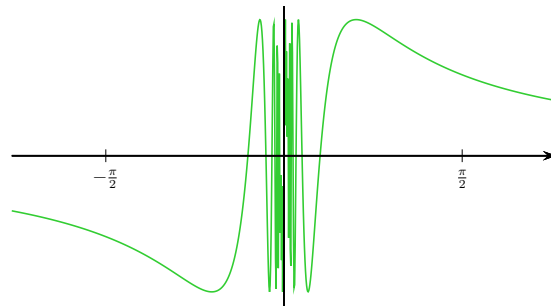


Figure XVI.11 – $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 : Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Démontrer que f a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

Correction : Soit $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$.

Un point fixe de f est une valeur d'annulation de φ .

Or, φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Si f est décroissante alors φ est strictement ^[4] décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.

Remarque : On peut généraliser ce résultat au cas où $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

En effet, on raisonne par l'absurde pour l'existence : puisque φ est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.

- Si $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$ alors $f(x) > x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{\mathbb{R}}(f)$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) < 0$ alors $f(x) < x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup_{\mathbb{R}}(f)$.

L'unicité est évidente.

Exercice 8 : Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure.

Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt exactement six kilomètres.

Correction : Il faut formaliser le problème : notons $L(t)$ la longueur du chemin que le marcheur a parcouru au temps t . Il est naturel de supposer que le marcheur ne fait pas de bond instantané, donc que L est continue sur $[0; 1]$.

On a $L(0) = 0$ et $L(1) = 12$. La distance qu'il parcourt en $\frac{1}{2}$ h à partir d'un temps t est $d(t) = L\left(t + \frac{1}{2}\right) - L(t)$. D'après les théorèmes généraux, d est également continue sur $[0; 1]$.

On a $d\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - L\left(\frac{1}{2}\right)$ et $d(0) = L\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Si $d(0) = L\left(\frac{1}{2}\right) \leq 6$ alors $d\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - L\left(\frac{1}{2}\right) \geq 6$. Comme d est continue, on peut conclure avec le TVI qu'il existe $t_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que $d(t) = 6$.
 - Si $d(0) = L\left(\frac{1}{2}\right) \geq 6$, on fait le même raisonnement avec la fonction δ définie par $\delta(t) = L(t) - L\left(t - \frac{1}{2}\right)$: distance qui a été parcourue au bout d'un temps t .
- De même, $\delta(1) = 12 - L\left(\frac{1}{2}\right) \leq 6$ et $\delta\left(\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2}\right) \geq 6$ amène à la même conclusion.

II.3 Image d'un segment

Rappel 1 (Segment) : Soient $a < b$ des réels. On appelle *segment* l'ensemble noté $[a; b]$ défini par :

$$[a; b] = \left\{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \right\}.$$

En particulier, les segments de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.

Théorème 9 (Théorème des bornes atteintes^[5]) :

Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists c, d \in [a; b] \text{ tels que } f(c) = \min_{x \in [a; b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x \in [a; b]} f(x).$$

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a; b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f([a; b]) = [m; M] \quad \text{où} \quad m = \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

ATTENTION

Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée. Pensez à la fonction $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Preuve :

(Hors-Programme)

Soient un segment $[a; b]$ et f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après le **théorème (8)**, $f([a; b])$ est un intervalle. Montrons que f possède un maximum^[6].

[5]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.

Posons $s = \sup f([a; b]) \in \overline{\mathbb{R}}$. Le but de la démonstration est de ramener s dans $\mathbb{R}$.

Comme s est adhérent à $f([a; b])$, elle est la limite d'une suite d'éléments de $f([a; b])$. Nous pouvons donc nous donner une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a; b]$ pour laquelle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = s$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était convergente, disons de limite $x \in [a; b]$, on pourrait aussitôt affirmer que $f(x) = s$ par continuité, ce qui montrerait que $s \in \mathbb{R}$ i.e. f est majorée ou encore mieux, $s = \max f([a; b])$.

Le problème, c'est que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune raison d'être convergente. Elle est cependant bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, disons de limite $x \in [a; b]$.

Or, par continuité de f , on a alors $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = s$.

On conclut alors, comme dit précédemment, $s \in \mathbb{R}$, donc f est majorée mais aussi $s = \max f([a; b])$.

En particulier, $f([a; b]) = [\min f([a; b]); \max f([a; b])]$.

Remarques : Il est très important de remarquer où jouent les hypothèses :

- La fermeture du segment est nécessaire pour « retenir » la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de sa suite extraite.
- Le caractère borné permet d'utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- La continuité de f permet de passer à la limite la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou sa suite extraite.
- Enfin, le caractère réel permet de considérer la borne supérieure de $f([a; b])$.

Qu'une seule de ces hypothèses disparaissent et c'en est fini de la démonstration !

Exemples 8 : Le fait que $[a; b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \mapsto x$ définie sur $[0; +\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie sur $[0; +\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \mapsto 1-x$ définie sur $]0; 1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0; 1]$ n'est pas majorée.

Exercice 9 : Montrer qu'une fonction continue et strictement positive sur un segment y est minorée par un réel strictement positif.

Correction : Si f est continue sur un segment $[a; b]$ alors, d'après le **théorème (9)** elle admet un minimum en un certain réel x_m de $[a; b]$, donc pour tout x de $[a; b]$, on a $f(x) \geq f(x_m)$.

Or, f est strictement positive sur $[a; b]$.

Donc $f(x_m) > 0$.

Corollaire 9.1 :

Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

Preuve : Soit $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction continue T -périodique.

D'après le théorème précédent, f est donc bornée sur $[0; T]$, disons par $K \geq 0$ i.e. $\forall x \in [0; T], |f(x)| \leq K$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par se ramener dans l'intervalle $[0; T]$ par translation :

$$\frac{x}{T} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \leq \frac{x}{T} \iff 0 \leq x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T < T \iff x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0; T].$$

$$\text{D'où } |f(x)| = \left| f \left(\underbrace{x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T}_{\substack{\in \mathbb{T}\mathbb{Z} \\ \in [0; T]}} \right) \right| \leq K \text{ et } f \text{ est bornée sur tout } \mathbb{R}.$$

III/ Continuité des fonctions monotones

III.1 Lien entre monotonie et continuité

Tout d'abord une conséquence direct du **théorème (9)** et de celui de la limite monotone.

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I est bijective de I sur $f(I)$ qui est un intervalle i.e. quels que soient $a < b$ deux réels de I , tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a; b]$.

De plus, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f ,

- si $I = [a; b]$ alors $f(I) = [f(a); f(b)]$ ou $f(I) = [f(b); f(a)]$,
- si $I = [a; b[$ alors $f(I) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$ ou $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$,
- si $I =]a; b]$ alors $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$ ou $f(I) = \left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$,
- si $I =]a; b[$ alors $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$ ou $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$ respectivement.

En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.

Preuve : Montrons, par exemple, le cas où f est strictement croissante sur $I = [a; b[$.

On sait déjà que f est bijective de $[a; b[$ sur son image $f([a; b[)$. Montrons que $f([a; b[) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$.

Comme f est continue, on sait aussi, d'après le TVI, $f([a; b[)$ est un intervalle.

Comme $f(a) \in f([a; b[)$ et comme $f(a)$ minore $f([a; b[)$ par croissance de f , on en déduit que $f(a) = \min f([a; b[)$.

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f([a; b[)$, donc $f([a; b[)$ est l'un des intervalles $[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$ ou $[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$.

Peut-on avoir $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in f([a; b[)$?

Il existerait dans ce cas un réel $x \in [a; b[$ pour lequel $f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ sur $[x; b[$, ce qui contredirait la STRICTE croissance de f .

Conclusion, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \notin f([a; b[)$ et $f([a; b[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$.

Les autres cas se traitent de la même façon et on a évidemment un énoncé analogue lorsque f est strictement décroissante.

ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

Théorème 11 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **monotone** sur un **intervalle** I .

La fonction f est continue sur I si, et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Preuve : Le sens direct est une conséquence du **théorème (8)** des valeurs intermédiaires.

Montrons la contraposée de la réciproque. Supposons f non continue sur I et montrons que $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Comme f n'est pas continue sur I , il existe $x_0 \in I$ où f n'est pas continue. Supposons que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ i.e. que x_0 n'est pas une borne de I .

Sans perte de généralités, on peut supposer f croissante. On a donc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Remarque : Si x_0 est la borne supérieure de I seule la première inégalité peut être vraie et seulement la seconde si x_0 est la borne inférieure de I . On peut donc supposer que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ sans perdre en généralité.

Supposons, par exemple, que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$. En particulier, x_0 n'est pas la borne inférieure de I .

1. $\left] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); f(x_0) \right[\cap f(I)$ est nécessairement vide.

En effet, si $x \in I$ est tel que $x < x_0$, alors $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et si $x \geq x_0$, alors $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc, dans tous les cas, $x \in I \Rightarrow f(x) \notin \left] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); f(x_0) \right[$.

On a bien montré que $\left] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); f(x_0) \right[\cap f(I) = \emptyset$.

2. Montrons enfin que $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Soit $x_1 \in I$ avec $x_1 < x_0$ (ce qui est possible car x_0 n'est pas la borne inférieure de I). On a :

$$f(x_1) < \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0).$$

Si $f(I)$ était un intervalle, alors on aurait :

$$[f(x_1); f(x_0)] \subset f(I) \quad \text{et donc} \quad \left] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); f(x_0) \right[\subset f(I).$$

Ce qui n'est pas possible : $f(I)$ n'est donc pas un intervalle ce qui termine la démonstration.

Remarques :

- Ce théorème énonce une réciproque du théorème **théorème (8)** des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.
- Ce résultat d'apparence anodine est à employer prudemment. La continuité, même vue globalement, est une notion locale et le fait que l'ensemble-image soit un intervalle ne garantit aucunement que la fonction est continue sur son intervalle de définition.

À titre d'exemple, on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'ensemble-image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puisqu'égal à $\mathbb{R}$. Pourtant, la fonction f n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue sur son intervalle de définition.

III.2 Continuité et bijectivité

Nous avons déjà rencontré ce théorème dans le premier chapitre d'analyse en version light. Nous sommes enfin prêts pour la version intégrale avec démonstration.

Théorème 12 (Théorème de la bijection) :

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur I .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est strictement monotone sur I .
- (ii) f est injective sur I , donc bijective de I sur $f(I)$.

Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(I)$.

Remarque : Étant donné que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques. Si le graphe de f peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le pourrait-il pas ?

Preuve :

1. Montrons tout d'abord l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) :

- Nous savons déjà que (i) $\Rightarrow$ (ii) sans hypothèse de continuité. En effet, f est évidemment surjective sur $f(I)$. Strictement monotone, elle est injective donc bijective sur I .
- Pour montrer l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i), supposons le contraire i.e. f n'est pas strictement monotone :

- ◇ f n'est pas strictement décroissante i.e. il existe deux éléments de I tels que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$,
ET
- ◇ f n'est pas strictement croissante i.e. il existe deux éléments de I tels que $x' < y'$ et $f(x') \geq f(y')$.

Comme f est injective, les inégalités ne peuvent qu'être strictes.

On pose alors $\forall t \in [0; 1]$, $g(t) = f(x + t(x - x')) - f(y + t(y - y'))$ et on a :

- (a) g est définie et continue sur $[0; 1]$.
- (b) $g(0) = f(x) - f(y) < 0$.

$$(c) \quad g(1) = f(x') - f(y') > 0.$$

D'après le **théorème (8)** des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0; 1[$ tel que :

$$g(c) = 0 \iff f(x + c(x' - x)) = f(y + c(y' - y))$$

Or, f est injective,

$$\begin{aligned} &\iff x + c(x' - x) = y + c(y' - y) \\ &\iff \underbrace{(1-c)}_{>0} \underbrace{(x-y)}_{<0} = \underbrace{c}_{>0} \underbrace{(y'-x')}_{>0}. \end{aligned}$$

Ceci est impossible donc f est strictement monotone.

2. Sous ces conditions montrons que f^{-1} est strictement monotone et supposons, par exemple, que f est strictement croissante.

Soit $x = f(a)$ et $y = f(b)$ élément de $f(I)$ tels que $x < y$.

Comme f est croissante, on ne peut qu'avoir $a \leq b$ et même $a < b$ par injectivité et $x \neq y$ sinon, f croissante, entraînerait le contraire de $x < y$.

Donc f^{-1} est strictement croissante dans ce cas, strictement monotone dans tous les cas et de même monotonie que f .

3. Montrons enfin que f^{-1} est continue. C'est une promenade de santé maintenant que le **théorème (11)** a été démontré.

En effet, f^{-1} est donc une fonction (strictement) monotone entre $f(I)$ et I qui sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Elle est donc continue.

Remarques :

- La continuité de f n'est pas nécessaire pour démontrer la continuité de f^{-1} .

En effet, on pourrait faire appel au lemme suivant :

Lemme 1 :

Toute surjection monotone d'une partie de $\mathbb{R}$ sur un intervalle est continue.

Preuve : Soient X une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : X \mapsto I$ une surjection croissante (si g est décroissante, considérer $-g$) et non constante (car ce cas est immédiat).

Posons $x_0 \in X$, $y = g(x_0)$ et montrons que g est continue en x_0 .

- Si $y \in \overset{\circ}{I}$, on considère $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[y - \varepsilon; y + \varepsilon] \subset I$ alors, en posant $x_- = g^{-1}(y - \varepsilon)$ et $x_+ = g^{-1}(y + \varepsilon)$, on obtient :

$$x_- < x_0 < x_+ \quad \text{et} \quad g([x_-; x_+] \cap X) \subset [y - \varepsilon; y + \varepsilon].$$

- Si $y = \sup(I)$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $x_- < x$ tel que $g([x_-; +\infty[\cap X) \subset [y - \varepsilon; y]$.
- Si $y = \inf(I)$, on trouve de même, pour tout $\varepsilon > 0$, un $x_+ > x$ tel que $g(]-\infty; x_+] \cap X) \subset [y; y + \varepsilon]$.

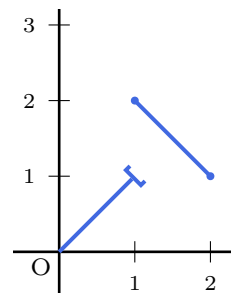
Dans les trois cas, on a démontré que g est continue en x .

En particulier, toute bijection monotone entre intervalles réels est continue. C'est le cas de f^{-1} .

- Dans la même idée, la continuité de f n'est pas nécessaire pour montrer « (i) f strictement monotone $\implies$ (ii) f est injective ».

Une fonction strictement monotone est toujours injective, qu'elle soit continue ou non. Par contre il est essentiel de supposer que f est continue sur un intervalle pour démontrer la réciproque : si on enlève la contrainte de la continuité de la fonction, on peut trouver des fonctions injectives et non monotones comme, par exemple, la fonction f définie sur $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 3 - x & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$$



Définition 3 (Homéomorphisme) : On appelle *homéomorphisme* toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le **théorème (12)** affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones. Elles ne sont alors pas continues
- Il existe des fonctions bijectives et continues, dont la bijection réciproque n'est pas continue.

On vient de voir que ce n'est jamais le cas lorsque f est monotone sur un intervalle I .

Exemple 9 : En début d'année, l'existence des fonctions arcsin, arccos et arctan a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 12.1 :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f^{-1} admet des limites aux bornes de $J = f(I)$ données par :

$$\lim_{y \rightarrow \sup(J)} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(I) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(I) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de f^{-1} en $\inf(J)$.

Preuve : Le TVI strictement monotone montre que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

Supposons, par exemple, que f et f^{-1} sont strictement croissantes. D'après le théorème de la limite monotone, la limite $\lim_{y \rightarrow \sup(J)} f^{-1}(y)$ existe. Notons-la L .

Or, $\lim_{x \rightarrow \sup(I)} f(x) = \sup(J)$.

D'après les théorèmes sur les limites de composée et la continuité de f^{-1} , on en déduit donc :

$$\lim_{x \rightarrow \sup(I)} f^{-1}(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \sup(J)} f^{-1}(y) = L.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow \sup(I)} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \sup(I)} x = \sup(I).$$

Conclusion, $L = \sup(I)$.

On retrouve la continuité de $\exp$, $\arctan$, $\arccos$, $\arcsin$ sur leur intervalle de définition respectif avec leurs limites aux bornes.

$$\text{Par exemple, } \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sup\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10 :

1. Montrer que $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

$$x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$$

2. (*) Exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Correction :

1. Sur $] -1; 1[$, $1 - x^2$ ne s'annule pas donc la fonction f est clairement dérivable sur cet intervalle et on a :

$$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $] -1; 1[$. Elle y établit une bijection de $] -1; 1[$ sur son image $\left[\lim_{x \rightarrow -1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right[=] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il suffit de trouver l'unique solution $f^{-1}(y) = x \in]-1; 1[$ de $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = y \quad \text{avec } 1-x^2 \neq 0, \text{ on a :} \\ &\Leftrightarrow x = (1-x^2)y \\ &\Leftrightarrow yx^2 + x - y = 0 \end{aligned}$$

Équation du second degré en x dont le discriminant $\Delta = 1 + 4y^2$ est strictement positif. On trouve deux solutions potentielles dans le cas où $y \neq 0$:

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

Le plus simple pour séparer le bon grain de l'ivraie est de remarquer que x et y ont toujours le même signe car $1 - x^2 > 0$ sur $] -1; 1[$.

Or, si $y \neq 0$, $yx_2 = -\frac{1 + \sqrt{1+4y^2}}{2} < 0$. Cela ne peut donc être x_2 .

$$\text{Avec } f(0) = 0, \text{ on en déduit finalement que } f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

IV/ Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions $f : I \mapsto \mathbb{C}$, où $I \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée *analyse complexe*, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

Rappel 2 (Limite) : La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

C'est exactement la même définition que pour une fonction réelle, la seule toute petite différence étant que la valeur absolue en fin de définition s'est transformée en module.

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
- La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

En effet, on ne peut définir de limites infinies dans $\mathbb{C}$ de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de f tendra vers $+\infty$ mais ça ne dit rien sur f elle-même dans la mesure où, dans $\mathbb{C}$, on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de $+\infty$ et de $-\infty$ n'a évidemment aucun sens.

- Les grands théorèmes d'existence de limite – théorèmes d'encadrement, minoration, majoration et théorème de la limite monotone – n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la *relation d'ordre* $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Exemples 10 : Les fonctions $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+it}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, à une exception près.

À retenir 1 :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $(\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ et $(\mathcal{C}^0(D; \mathbb{R}), +, \circ, \cdot)$ sont des $\mathbb{C}$ -algèbres, non commutative pour la seconde.
2. Si f est continue sur D , alors les fonctions $\bar{f}$ et $|f|$ aussi.

3. Si $f : [a; b] \mapsto \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a; b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes *i.e.* il existe $t_0, t_1 \in [a; b]$ tels que :

$$|f(t_0)| = \max_{t \in [a; b]} |f(t)| \quad \text{et} \quad |f(t_1)| = \min_{t \in [a; b]} |f(t)|.$$

Preuve :

3. En effet : la fonction $|f|$ est continue sur $[a; b]$ et à valeurs réelles. Elle répond donc aux exigences du **théorème (9)** des bornes atteintes.

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

Par exemple, la fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[0; 2\pi]$.

0 est bien compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin f([0; 2\pi])$ car f ne s'annule pas.

Remarque : Ici $f([0; 2\pi])$ n'est pas un intervalle, mais un cercle !

ATTENTION

Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ

I/ Continuité et prolongement _____

Rappel 1 : En résumé et avec les bonnes hypothèses :

- Une fonction f est continue en x_0 si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Une fonction est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 1 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

3. $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5. $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7. $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. $f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

9. $f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. $f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11. $f_{11} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Correction : Simple exercice de limites. Après avoir justifié par les théorèmes généraux que la fonction f est continue sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et que, dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ou pas avec $x_0 \in \overline{D}$.

On trouve :

- $f_2, f_4, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{11}$ sont continues
- f_1, f_3, f_5, f_{10} ne sont pas continues.

Exercice 2 : Étudier la continuité des fonctions suivantes en $n \in \mathbb{Z}$:

1. $f_1 : x \mapsto x - [x]$ 2. $f_2 : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$ 3. $f_3 : x \mapsto [x]^2 - x[x] + x^2$

Correction : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$, il suffit de comparer $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f(x)$. Elle sont clairement continues sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f_1(x) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_1(x)$ donc f_1 n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_2(x) = n$ donc f_2 est continue en $n \in \mathbb{Z}$ donc sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f_3(x) = n^2 - n + 1 \neq n^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_3(x)$ donc f_3 n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$$f_1 : x \mapsto x \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

Correction :

1. f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ n'existe pas et $f_1(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. f_2 est continue sur $[-4; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) \frac{\sin(x)}{x} = 4.$$

Donc, $f_2(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 4$.

3. f_3 est continue sur $[-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Par parité, il suffit de regarder la continuité sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

— En 0, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = -1$.

— En 1, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \pm\infty$. Donc, la limite est au mieux infinie (elle n'existe pas de toute façon) donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité en 1 ou -1.

On pourra donc seulement prolonger f_3 par continuité sur $[-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est une fonction constante

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) = f(0)$ i.e. f est constante à $f(0)$.

Il est facile de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, par continuité de f en 0, on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et obtenir :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

La fonction f est constante.

Exercice 5 : On considère la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$, appelé fonction de Dirichlet, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite d'irrationnel $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x .

1. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(v_n) = 0$, par passage à la limite, $\chi_{\mathbb{Q}}$ ne peut être continue en x .

2. On considère $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Si $x = 0$, alors $f(0) = 0$. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0, $f(x_n) = x_n\chi_{\mathbb{Q}}(x_n)$ est bornée par $|x_n|$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

Ainsi, f est continue en 0.

— Si $x \neq 0$, on considère les mêmes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x .

Alors,

$$f(u_n) = u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \quad \text{et} \quad f(v_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ces deux limites diffèrent (car $x \neq 0$), donc f n'admet pas de limite en x et n'est pas continue en x .

En conclusion, f est uniquement continue en 0.

II/ Théorèmes des valeurs intermédiaires et conséquences

Exercice 6 : Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. *Variante :* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ admet (au moins) une solution sur $[0; 1]$.

Correction :

1. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0; 1]$ et vérifie $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car f prend ses valeurs dans $[0; 1]$.

D'après le théorème de Bolzano, l'équation $\varphi(x) = 0$ donc $f(x) = x$ admet une solution sur $[0; 1]$ i.e. f admet un point fixe sur $[0; 1]$.

2. Le raisonnement est identique avec la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x^n$, continue sur $[0; 1]$ et vérifie $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

D'après le théorème de Bolzano, l'équation $\varphi(x) = 0$ donc $f(x) = x^n$ admet une solution sur $[0; 1]$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Correction : Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le théorème des bornes atteintes. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment.

Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés sur les limites :

$$\begin{aligned} \forall A > 0, \exists M_1 > 0, \forall x \geq M_1, f(x) \geq A. \\ \forall A > 0, \exists M_2 < 0, \forall x \leq M_2, f(x) \geq A. \end{aligned}$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[M_2; M_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants :

- On doit être sûr que le minimum de f est effectivement atteint dans l'intervalle $[M_2; M_1]$,
- et il faut donner une valeur à A pour avoir effectivement des valeurs de M_1 et M_2 .

On choisit par exemple $A = f(0)$. Pour cette valeur de A , la définition de la limite donne les réels M_1 et M_2 .

La fonction f est continue sur $[M_2; M_1]$ donc il existe donc $x_0 \in [M_2; M_1]$ tel que, pour tout $x \in [M_2; M_1]$, on ait $f(x) \geq f(x_0)$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'autre part, si $x > M_1$ ou si $x < M_2$, on a $f(x) \geq A = f(0) \geq f(x_0)$.

En conclusion, f atteint bien son minimum en x_0 .

Exercice 8 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction :

$f \circ g$: Comme $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, il est clair que $f \circ g$ est bornée.

$g \circ f$: Comme f est bornée, $f(\mathbb{R}) = [m; M]$ un segment de $\mathbb{R}$ sur lequel g continue est bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Donc $g \circ f$ est bornée.

Exercice 9 : Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-2} près.

Correction : La fonction $\varphi : x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$ avec, $\forall x \in \left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$, $\varphi'(x) = \tan^2(x) > 0$ donc elle y est strictement croissante.

Continue, elle y établit donc une bijection entre $\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$ et $f\left(\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[\right) =]-\pi; +\infty[$ qui contient 0.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution α telle que $\tan(\alpha) = \alpha$.

Par dichotomie, on trouve $4,49 < \alpha < 4,5$.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Correction : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de a :

- Si $a > -1$, puisque $f(x) \leq -1$ si $x \in]-\infty, 2]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x) = a$ dans cet intervalle.

D'autre part, f est continue strictement croissante sur $]2; +\infty[$, et $a \in]f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-5; +\infty[$. Il y a donc une solution unique dans l'intervalle $]2; +\infty[$ à l'équation $f(x) = a$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$.

- Si $a = -1$, on fait le même raisonnement, en remarquant qu'il n'y a pas de solutions dans $]-\infty; 0[$ ni dans $]0; +\infty[$.

En revanche, on a aussi $f(0) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ admet donc 2 solutions.

- Si $a \in]-5; -1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$, $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x) = a$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < -5$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et puisque f est strictement croissante, continue sur $] -\infty; 0[$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) = -1$, l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique dans $] -\infty; 0[$.
- Enfin, si $a = -5$, on trouve deux solutions, l'une dans $] -\infty; 0[$, et aussi 2.

Exercice 11 :

1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x(x-1)}$ réalise une bijection de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1. Sur $]0; 1[$, la fonction $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ est dérivable et on a :

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) < 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$. D'après le théorème du même nom, elle établit une bijection de $]0; 1[$ sur son image.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, f réalise une bijection de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0; 1[$, sa réciproque l'est également sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0).$$

$$\text{Or, } f(x) = 0 \iff \frac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 12 : Soit n , un entier naturel ($n \geq 2$). On considère l'équation $(E_n) : x^n - nx + 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet sur $[0; 1]$ une unique solution notée α_n .
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = 1$. On écrit alors $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Correction :

1. La fonction $f : x \mapsto x^n - nx + 1$ est continue sur $[0; 1]$.

Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 2 - n \leq 0$ pour $n \geq 2$, d'après le théorème de Bolzano, (E_n) admet sur $[0; 1]$ au moins une solution.

Sur $]0; 1[$, f est de plus dérivable de dérivée $f'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$. Elle est donc strictement monotone. La solution est unique. On la note α_n .

2. Comme $f(1) \neq 0$, $\alpha_n \in [0; 1[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^n = 0$ d'après les théorèmes sur les suites géométriques.

On conclut avec les théorèmes sur les limites de sommes :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Il suffit d'utiliser encore la relation (E_n) :

$$\frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = n\alpha_n = 1 + \alpha_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc, $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 13 : On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; \frac{2}{3}[$. On la notera u_n .
- Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
- Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- Montrer que u_n est convergente vers une limite que l'on notera ℓ .
- Déterminer la limite de $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire la valeur de ℓ .

Correction :

- La fonction f_n , somme de $x \mapsto x^n + 9x^2$ et $x \mapsto -4$ deux fonctions continues sur $[0; \frac{2}{3}]$ l'y est également. Somme de deux fonctions croissantes dont l'une l'est strictement, f est également strictement croissante. Comme $f(0) = -4 < 0$ et $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^n > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in]0; \frac{2}{3}[$.
- Il suffit d'étudier le signe de la différence pour $x \in]0; 1[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x - 1) < 0.$$

3. Par définition de $u_p \in]0; 1[$, $f_p(u_p) = 0$ et on a :

$$f_{n+1}(u_n) - f_{n+1}(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et, par stricte croissance de f_{n+1} , $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente vers une limite $\ell \leq \frac{2}{3}$.
5. Comme $u_n \in]0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$. Revenons à la définition de u_n : $9u_n^2 = 4 - u_n^n$.

En passant à la limite, $9\ell^2 = 4 \iff \ell = \frac{2}{3}$ car ℓ est positif.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc $\frac{2}{3}$.

Exercice 14 : Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs. Démontrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Correction : Le réel $\frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b)$ est clairement un réel de l'intervalle $[f(a); f(b)]$ (ou $[f(b); f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), puisqu'il s'écrit $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$, avec $\lambda \in [0; 1]$ qui est égal à $\frac{p}{p+q}$.

Puisque la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $c \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = \frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b).$$

Multipliant par $p + q$, c'est exactement le résultat voulu.

Exercice 15 (★) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires *i.e.* que pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}$ et tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut trouver $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Correction : Pour prouver que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0, mais telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0) = 0$.

Ici, $u_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ convient, puisque $f(u_n) = 1$ pour tout entier n .

Maintenant, il faut prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soient $a < b$ deux réels.

- Si $0 \notin [a; b]$, alors f est continue sur $[a; b]$, et on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f .
- Sinon, on a donc $0 \in [a; b]$. Sans perte de généralité, on peut supposer $b \neq 0$.

Soit μ entre $f(a)$ et $f(b)$ que l'on peut supposer dans l'intervalle $[-1; 1]$ et soit $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\sin(\theta) = \mu$.

Posons alors $v_n = \frac{1}{2n\pi + \theta}$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, par valeurs supérieures :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_{n_0} \in [0; b] \subset [a; b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(v_n) = \mu.$$

On a donc bien trouvé (au moins) un élément v_{n_0} de $[a; b]$ tel que $f(v_{n_0}) = \mu$ pour μ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Ainsi, f est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a; b]$: la fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a; b]$ sans être continue sur $[a; b]$.

Exercice 16 ((*) Existence d'une plus petite période) : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante.

On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

- $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose

$$A = \{\tau > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + \tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T .
2. Démontrer que $T > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f .

Correction :

1. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque f est périodique) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.
2. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Soit $\varepsilon = |f(y) - f(x)| > 0$.

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|y - z| < \delta$ entraîne $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

Supposons que $T = 0$. Alors il existe $\tau \in A$ tel que $0 < \tau < \delta$. Mais alors, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + n\tau \leq y < x + (n+1)\tau$, et donc $|y - (x + n\tau)| < \delta$.

On en déduit que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x + n\tau)| < \varepsilon = |f(y) - f(x)|.$$

Une contradiction. On a donc $T > 0$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers T .

Puisque $f(x + \tau_n) = f(x)$, la continuité de f en $x + T$ entraîne que $f(x + T) = f(x)$.

Ainsi, T est bien une période de f , et par construction, c'est la plus petite période de f .

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue.

On suppose que f possède des limites finies λ et μ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(\tan x)$.

1. Montrer que g possède un prolongement par continuité à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On notera $\hat{g}$ le prolongement.
2. A l'aide de $\hat{g}$, montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose de plus que $\lambda = \mu$. Montrer que f atteint l'une de ses bornes. Atteint-elle forcément les deux ?

Correction :

1. Notons que g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, comme composée de fonctions continues.

$$\text{On a } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \end{cases} \quad \text{donc par composition} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(\tan(x)) = \lambda, \text{ i.e. } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lambda.$$

La fonction g , non définie en $-\frac{\pi}{2}$ admet une limite finie λ en $-\frac{\pi}{2}$. On en déduit qu'elle est prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$. On aura $\hat{g}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lambda$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} g(x) = \mu$, donc g est prolongeable par continuité en $+\frac{\pi}{2}$. On aura $\hat{g}\left(+\frac{\pi}{2}\right) = \mu$.

Conclusion, g possède un prolongement par continuité à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donné par

$$\begin{aligned} \hat{g}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \lambda & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \\ f(\tan x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \mu & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

2. La fonction $\hat{g}$ est **continue** sur le **segment** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Or, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. On en déduit que la fonction $\hat{g}$ est bornée.

Posons $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad m \leq \hat{g}(x) \leq M$.

Par définition du prolongement, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(\tan(\arctan t)) = \hat{g}(\arctan t) \in [m; M]$ i.e. f est bornée.

3. Si $\lambda = \mu$, alors, on a $\hat{g}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \hat{g}\left(+\frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction $\hat{g}$ étant **continue** sur le **segment** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, elle atteint ses bornes.

Posons donc :

$$— m = \min_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} (\hat{g}) \text{ et } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \hat{g}(\alpha) = m.$$

$$— M = \max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} (\hat{g}) \text{ et } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \hat{g}(\beta) = M.$$

- (a) Si l'une des valeurs α et β n'est pas une borne de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, disons par exemple $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons alors $x_0 = \tan(\alpha)$. On a $f(x_0) = f(\tan \alpha) = \hat{g}(\alpha) = m$.

Or, d'après la question 2. la valeur m (qui est le minimum de $\hat{g}$) est également un minorant de f . C'est donc un minorant qui est atteint en x_0 , i.e. le minimum de f . On a prouvé que f atteint sa borne inférieure.

Même raisonnement si β est différent d'une des bornes. Dans ce cas, f atteindra sa borne supérieure.

Dans les deux cas, f atteint l'une de ses bornes.

- (b) Supposons qu'on ait $\{\alpha, \beta\} = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ (i.e. α et β sont les bornes de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

Alors, comme $\hat{g}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \hat{g}\left(+\frac{\pi}{2}\right)$, on a $\hat{g}(\alpha) = \hat{g}(\beta)$, i.e. $m = M$.

Comme $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $m \leq \hat{g}(x) \leq M$, on a par antisymétrie $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\hat{g}(x) = m = M$: la fonction $\hat{g}$ est constante.

Et comme $f = \hat{g} \circ \arctan$, la fonction f est elle-même constante. Donc f atteint ses bornes.

Dans tous les cas, f atteint l'une de ses bornes.

Si on considère la fonction continue $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ dont les deux limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont nulles, on voit que $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$.

La fonction f atteint bien sa borne supérieure, mais pas sa borne inférieure.

De la continuité et des points fixes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a; b]$ dans lui-même.

Montrer qu'il existe un élément c de $[a; b]$ tel que $f(c) = c$.

2. Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

3. (a) Montrer que toute application lipschitzienne est continue sur $\mathbb{R}$.

- (b) Montrer que si f est contractante i.e. k -lipschitzienne avec $k \in]0; 1[$ sur $\mathbb{R}$ alors, la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$ vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

- (c) Soit $k \in [0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une application croissante de $[a; b]$ dans lui-même.

On pose $A = \{x \in [a; b], x \leq f(x)\}$.

- (a) Justifier l'existence de $c = \sup(A)$ et montrer que $c \in [a; b]$.

- (b) Montrer par l'absurde que $f(c) \leq c$.

- (c) Montrer par l'absurde que $f(c) \geq c$.

- (d) Conclure.

De la continuité et des points fixes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a; b]$ dans lui-même.

Montrer qu'il existe un élément c de $[a; b]$ tel que $f(c) = c$.

Correction : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a; b]$ dans lui-même.

Posons $\phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) - x$$

- ϕ est **continue** sur l'intervalle $[a; b]$;
- $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

Donc d'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe $c \in [a; b]$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

2. Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

Correction : Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction f étant décroissante, d'après le théorème de convergence monotone, on peut en déduire que :

- f admet une limite $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $-\infty$;
- f admet une limite $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

Posons $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) - x$$

Dans tous les cas de figure, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$.

Enfin, comme

- ϕ est **continue** sur l'intervalle $\mathbb{R}$;
- ϕ est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ (somme de f décroissante et de $-Id_{\mathbb{R}}$ strictement décroissante);
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$

D'après le *théorème de la bijection* il **existe un unique** $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

Si on suppose f croissante, le résultat ne subsiste pas nécessairement. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x + 1$ n'admet aucun point fixe tout en vérifiant les hypothèses de la question.

3. (a) Montrer que toute application lipschitzienne est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Comme f est k -lipschitzienne, on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$.

Or, $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ i.e. f est continue en a donc sur $\mathbb{R}$.

- (b) Montrer que si f est contractante i.e. k -lipschitzienne avec $k \in]0; 1[$ sur $\mathbb{R}$ alors, la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$ vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

Correction : f étant k -lipschitzienne, on a donc successivement

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(0)| &\leq k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad -k|x| &\leq f(x) - f(0) \leq k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) - k|x| &\leq f(x) \leq f(0) + k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) - k|x| - x &\leq f(x) - x \leq f(0) + k|x| - x \end{aligned}$$

On en déduit que

$$- \quad \forall x < 0, \quad f(0) + (k-1)x \leq \phi(x).$$

Or $k-1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0) + (k-1)x) = +\infty$ et par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$$

$$- \quad \forall x > 0, \quad \phi(x) \leq f(0) + (k-1)x.$$

Or, $k-1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) + (k-1)x) = -\infty$ et par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$$

- (c) Soit $k \in [0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

Correction : Reprenons les notations des questions précédentes. On a alors :

$$\begin{aligned} - \quad \phi &\text{ est continue sur l'intervalle } \mathbb{R}; \\ - \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

Montrons maintenant l'**unicité du point fixe** en supposant que a, b soient deux points fixes **distincts** de f sur $\mathbb{R}$.

Comme f est contractante, on a, en particulier,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a| \iff |b - a| \leq k|b - a| \iff_{|b-a| \neq 0} 1 \leq k.$$

Cela contredirait la définition de k , donc il ne peut exister plus d'un point fixe.

Finalement, $\exists ! c \in \mathbb{R}, f(c) = c$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une application croissante de $[a; b]$ dans lui-même.

On pose $A = \{x \in [a; b], x \leq f(x)\}$.

- (a) Justifier l'existence de $c = \sup(A)$ et montrer que $c \in [a; b]$.

Correction : Par hypothèse, on a $a \leq f(a)$. Donc $a \in A$ et A est **non vide**.

Par ailleurs, par définition A est une partie de $[a; b]$, donc A est **majoré** (par b).

D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, on en déduit que A , partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure et l'on peut poser $c = \sup(A)$.

Comme $a \in A$ et c un majorant de A , on a $a \leq c$.

De plus, b est un majorant de A et c le plus petit majorant de A , d'où $c \leq b$.

Tout cela pour dire que $c \in [a; b]$.

(b) Montrer par l'absurde que $f(c) \leq c$.

Correction : Supposons que $c < f(c)$ et posons $x = f(c)$.

Par définition de l'ensemble d'arrivée de f , il est déjà clair que $x \in [a; b]$.

Par hypothèse, $c < x$. Or, c est un majorant de A , donc $x \notin A$ i.e. $f(x) < x$.

Par ailleurs, f est croissante, donc $c < x \implies f(c) \leq f(x)$.

Conséquence, $f(c) \leq f(x) < x$ qui est contradictoire car $x = f(c)$.

Donc, $f(c) \leq c$.

(c) Montrer par l'absurde que $f(c) \geq c$.

Correction : Supposons que $f(c) < c$.

Alors, $f(c)$ n'est plus un majorant de A . Il existe donc $x \in A$ tel que $f(c) < x \leq c$.

Comme $x \in A$, on a également $f(x) \geq x$.

On aurait alors $f(c) < x \leq f(x)$.

Or, $x \leq c$ entraîne, par croissance de f , $f(x) \leq f(c)$ ce qui est contradictoire.

Donc, $f(c) \geq c$.

(d) Conclure.

Correction : Par antisymétrie chère à certains, $f(c) = c$ i.e. c est un point fixe de f .

$$\exists c \in [a; b], f(c) = c.$$

Commentaires : *On a perdu l'unicité.*

Suites, Limites et Continuité (début)

1. Suites numériques

- Mode de définition d'une suite réelles : de façon explicite, implicite, par récurrence (simple ou double).
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
- Suites monotones. Suites convergentes, divergentes. Une suite convergente est bornée.
- Une suite est bornée si et seulement la suite des valeurs absolues est majorée.
- Une suite est asymptotiquement du même signe que sa limite (si celle-ci existe et est non nulle).
- Si $u_n \rightarrow l$ alors $|u_n| \rightarrow |l|$ avec réciproque si $l = 0$.
- Théorème d'encadrement et de convergence monotone.
- Définition d'une suite extraite. Si la suite converge alors toute suite extraite converge vers la même limite. Réciproque si la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers la même limite.
- Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
- Moyenne de Cesàro. Si la suite converge alors sa moyenne de Cesàro converge vers la même limite.
- Suites complexes : définition de la limite. Toute suite complexe qui converge est bornée, unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires.

2. Limites

- Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Unicité de la limite.
- Limite à droite, à gauche.
- Opérations sur les limites.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
- Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.
- Théorème de la limite monotone.
- Caractérisation séquentielle de la limite.

3. Continuité

- Définition de la continuité, continuité à droite, à gauche.
- Prolongement par continuité.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.

Questions de cours possibles ^[7] :

1. Unicité de la limite pour une suite.
2. Théorème d'encadrement, de majoration ou de minoration pour les suites qui devront être énoncés rigoureusement.
3. Théorème de la limite monotone pour les suites.
4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell > 0$ alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, u_n \geq M > 0$ à partir d'un certain rang.
5. (★) Pour $q \in \mathbb{R}$, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si $q \in]-1; 1[$.
6. (★) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie au moins à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$.
7. Théorème des suites adjacentes.

8. Exprimer la limite (finie ou infinie d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition à l'aide de voisinage, d'inégalités, d'intervalles et de majoration de normes. De même pour la limite par valeurs inférieures.
9. Unicité de la limite pour une fonction.
10. Si f admet une limite finie en un point alors elle est bornée en un voisinage de ce point.
11. (★) Comportement de la limite avec les inégalités strictes et larges pour les fonctions.
12. Théorème d'encadrement, de majoration ou de minoration pour les fonctions qui devront être énoncés rigoureusement.
13. (★) Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
14. Montrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$.
15. Montrer que f , continue sur D , est prolongeable par continuité en $a \in \overline{D} \setminus D$ si, et seulement si f admet une limite finie en a .
16. Théorème de Bolzano via la borne sup et/ou l'algorithme de dichotomie.
17. Théorème des valeurs intermédiaires. *L'énoncé devra être parfaitement su en entier !*

Matrices – Suites – Fonctions

1 août 2025

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 – Soit $g: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2 - \ln(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction g .
2. Donner les limites de g aux extrémités de D .
3. Dresser le tableau de variations complet de g en justifiant.
4. On note $I = [1; e]$. Justifier que $g(I) \subset I$.
5. (a) Énoncer **rigoureusement** le théorème donnant l'inégalité des accroissements finis.
(b) Montrer que g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I .
6. Pour $x \in D$, on note $h(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

Montrer que g admet un unique point fixe $\alpha \in I$.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(x_n)}$.

7. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à I .
8. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$.
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
(c) Qu'en déduit-on sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
9. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que x_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
10. Écrire une fonction `valeur_approchee(k)` en langage Python renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-k} près (l'argument k est de type `int`). On pourra initialiser la suite en prenant $x_0 = 1$. Commenter la fonction de façon pertinente.

Exercice 2 – L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^2 x^n e^x dx \quad \text{et} \quad J_n = \frac{1}{2^{n+1}} I_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = x^n e^x$.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n .
(b) Calculer I_0 et I_1 ainsi que J_0 et J_1 .
2. Étude de la fonction f_2 .
 - (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f_2 ?
 - (b) Dresser le tableau de variations complet de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.

3. Étude des variations de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0; 2], f_n(x) \leq e^2 x^n$. En déduire que $0 \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.
 (b) Quelle est la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{n+1} = 2^{n+1} e^2 - (n+1)I_n$.
 (b) En déduire les valeurs de I_2 et de J_2 .

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left(\frac{x}{2} - 1\right) x^n e^x.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0; 2], g_n(x) \leq 0$.
 (b) En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.
 (d) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.
 (e) En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Une somme infinie ?

- (a) En procédant par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

- (b) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq 3$, montrer que $\frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4}$. Que peut-on en déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n}$?
 (c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!}$?

En fin d'année, on notera cette limite $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$. Une telle somme infinie est appelée "série".
 L'année prochaine vous y verrez le développement de $\exp$ en série entière...

Exercice 3 –

Définition :

- On dit qu'une matrice ligne ou colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1.

Par exemple, la matrice colonne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est stochastique car $\frac{1}{2} \geq 0, \frac{1}{6} \geq 0, \frac{1}{3} \geq 0$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$.

- On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque chacune de ses lignes l'est.

Partie A : Des propriétés des matrices stochastiques

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients positifs ou nuls. Montrer que A est stochastique si et seulement si $AX = X$.

2. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Soit $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Rappeler la formule donnant le coefficient sur la ligne i et la colonne j de la matrice produit AB .
 - (b) En déduire que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB .
 - (c) En déduire que si A et B sont stochastiques alors la matrice AB l'est aussi.

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille $(3, 3)$

Dans cette partie, on étudie les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{2}z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.
4. Justifier que la matrice A est stochastique.

5. (a) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = QD^nQ^{-1}X_0$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- (a) Exprimer X_n en fonction de n .
 - (b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique.
8. Prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des limites que l'on notera ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z .
9. Prouver que $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL .

Matrices - Suites - Fonctions

Exercice 1 – Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2 - \ln(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction g .

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e^2, \end{cases}$$

Donc, $D =]0; e^2]$.

2. Donner les limites de g aux extrémités de D .

Correction : Comme $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, alors $2 - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc par composition, $g(x) = \sqrt{2 - \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

La courbe représentative de g admet donc une asymptote d'équation $x = 0$.

Commentaires : Combien auront pensé à parler de l'asymptote et donner ainsi de la valeur à sa copie ?

De même en e^2 : $2 - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow e^2} 0$ donc, par continuité de la fonction racine en 0, $\lim_{x \rightarrow e^2} g(x) = g(e^2) = 0$.

3. Dresser le tableau de variations complet de g en justifiant.

Correction : Pour tout $x \in]0; e^2[$, $2 - \ln(x) > 0$ donc g est dérivable sur $]0; e^2[$ et on a :

$$\forall x \in]0; e^2[, g'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur I .

Finalement :

x	0	e^2
$g'(x)$		—
g	$+\infty$	0

Commentaires : Il est bien sûr tout à fait inutile de calculer la dérivée de g pour avoir ses variations mais comme on en a besoin après ...

4. On note $I = [1; e]$. Justifier que $g(I) \subset I$.

Correction : Soit $x \in I$. Par décroissance de g ,

$$g(e) \leq g(x) \leq g(1) \iff 0 < 1 \leq g(x) \leq \sqrt{2} < 2 < e.$$

Donc I est stable par g .

Commentaires : *La continuité, la stricte monotonie ou encore le théorème de la bijection sont parfaitement inutiles ici.*

5. (a) Énoncer **rigoureusement** le théorème donnant l'inégalité des accroissements finis.

Correction : En substance, l'énoncé qui nous intéresse ici :

Soient I un intervalle non trivial et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si :

- (i) f est dérivable sur I ,
 - (ii) il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq M$ sur I ,
- alors f est M -lipschitzienne sur I .

- (b) Montrer que g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I .

Correction : D'après la question (3), g est dérivable sur $]0; e^2[$, donc sur I et

$$\forall x \in I, |g'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \ln(x)}}, \text{ car } x \geq 1.$$

D'autre part, $g(I) \subset I$ entraîne $(0 <) 1 \leq g(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$ puis $(0 <) \frac{1}{\sqrt{2 - \ln(x)}} \leq 1$.

On en déduit que $|g'(x)| \leq \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, g est bien $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I .

Commentaires : *Pour ceux qui se seront essayé à écrire l'inégalité $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, c'est pour tous $x, y \in I$ et pas seulement pour 1 et e .*

En outre, pourquoi écrire des quotients ?

6. Pour $x \in D$, on note $h(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

Montrer que g admet un unique point fixe $\alpha \in I$.

Correction : Somme de $\ln$ et d'un polynôme, h est dérivable sur $D \subset]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in D, h'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc h est continue et strictement croissante sur D et en particulier sur l'intervalle $I \subset D$.

D'après le théorème du même nom, h réalise donc une bijection de I sur son intervalle image $f(I) = [h(1); h(e^2)] = [-1; e^4]$.

Comme $0 \in [-1; e^4]$, il admet un unique antécédent $\alpha \in I$ par h i.e. tel que $h(\alpha) = 0$.

Commentaires : *Le théorème de Bolzano suffisait amplement mais à condition de préciser ensuite l'unicité à l'aide la bijectivité de g .*

Subséquentement,

$$\begin{aligned} h(\alpha) = 0 &\iff \alpha^2 + \ln(\alpha) - 2 = 0 \\ &\iff 2 - \ln(\alpha) = \alpha^2 \\ &\iff \sqrt{2 - \ln(\alpha)} = \alpha && (\text{stricte croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff g(\alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

La fonction g admet donc un point fixe $\alpha \in I$. Le raisonnement par équivalences ci-dessus nous assure que c'est le seul.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(x_n)}$.

7. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à I .

Correction : On procède par récurrence. Soit (P_n) : « x_n existe et $x_n \in I$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par hypothèse, $x_0 \in I$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie. Comme $x_n \in I$ et que I est stable par g (question 4), alors $g(x_n) = x_{n+1}$ existe et appartient à I , d'où (P_{n+1}) .

Conclusion. Par récurrence, tous les termes x_n existent et sont dans I c'est-à-dire $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

8. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$.

Correction : D'après la question (5b), g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Pour $x = x_n \in I$ et $y = \alpha \in I$, on a directement :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|.$$

Commentaires : *La fonction g n'étant lipschitzienne que sur I , il était important de préciser que x_n et α étaient bien dans I .*

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Correction : Définissons (P_n) : « $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha|$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $|x_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |x_0 - \alpha|$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| && \text{(d'après } (P_n)) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|, \end{aligned}$$

donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, puisque $x_0 \in I = [1; e]$ et $\alpha \in I$, alors $|x_0 - \alpha| \leq e - 1 \leq 2$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(c) Qu'en déduit-on sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction : Comme $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, alors $\frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$.

D'après le théorème d'encadrement ou de domination ici, $|x_n - \alpha| \rightarrow 0$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

9. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que x_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Correction : On cherche N tel que $|x_N - \alpha| \leq 10^{-6}$, ce qui est assuré dès lors que $\frac{1}{2^{N-1}} \leq 10^{-6}$, donc on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-6} &\iff 2^{n-1} \geq 10^6 && \text{(stricte décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff (n-1) \ln 2 \geq 6 \ln 10 && \text{(stricte croissance de } \ln) \\ &\iff n \ln 2 \geq 6 \ln 5 + 7 \ln 2 \\ &\iff n \geq 7 + \frac{6 \ln 5}{\ln 2} \quad (\text{car } \ln 2 > 0). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $N = 1 + \left\lceil 1 + \frac{6 \ln 10}{\ln 2} \right\rceil$. (De tête, $N = 21$...).

10. Écrire une fonction `valeur_approchee(k)` en langage Python renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-k} près (l'argument k est de type `int`). On pourra initialiser la suite en prenant $x_0 = 1$. Commenter la fonction de façon pertinente.

Correction : Comme précédemment, x_n est une valeur approchée de α à 10^{-k} près dès que $|x_n - \alpha| \leq 10^{-k}$, ce qui est assuré dès que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-k}$.

```

1 from math import sqrt, log          # pour utiliser les fonctions racine et ln
2 def valeur_approchee(k):
3     n = 0                            # initialisation du rang de la suite
4     x_n = 1                          # initialisation du premier terme
5                                     # de la suite
6     while 1/2**(n-1) > 10**(-k):    # on cherche le premier rang n
7                                     # tel que 1/2**(n-1) <= 10**(-k)
8         x_n = sqrt(2-log(x_n))      # mise à jour du terme de la suite
9         n += 1                      # mise à jour du rang
10    return x_n                       # on renvoie la valeur approchée
11                                     # (et non le rang n, attention)

```

Exercice 2 – L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^2 x^n e^x dx \quad \text{et} \quad J_n = \frac{1}{2^{n+1}} I_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = x^n e^x$.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n .

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 2]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale $I_n = \int_0^2 f_n(x) dx$ est bien définie.

Commentaires : Lorsque $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ n'est pas une exponentielle mais une fonction polynomiale.

De plus, sur une question aussi facile, la moindre des choses est de citer le théorème fondamental.

- (b) Calculer I_0 et I_1 ainsi que J_0 et J_1 .

Correction : On a $I_0 = \int_0^2 x^0 e^x dx = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$ puis $J_0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

Ensuite, les fonctions $x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $[0; 2]$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^2 x e^x dx = [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\
 &= 2e^2 - 0e^0 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) \\
 &= e^2 + 1.
 \end{aligned}$$

On en déduit $J_1 = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

2. Étude de la fonction f_2 .

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f_2 ?

Correction : Les théorèmes sur les limites de produits, nous donnent facilement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$.

Les mêmes théorèmes, pour $x \in \mathbb{R}_+$ ce qui est assuré pour x dans un voisinage de l'infini, nous affirme que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$.

La courbe $\mathcal{C}_2$ admet donc une branche parabolique de direction (Oy) .

Commentaires : *J'ai beaucoup aimé tous ceux qui m'ont parlé d'une asymptote ou tangente (au choix suivant les copies), verticale à l'infini. On la trace comment svp ?*

- (b) Dresser le tableau de variations complet de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.

Correction : Sur $\mathbb{R}_+$, f_2 est le produit de deux fonctions croissantes à valeurs positives donc croissante.

On dresse alors le tableau de variations de f_2 avec la limite précédente :

x	0	$+\infty$
$f_2'(x)$	0	+
f_2	0	$+\infty$

3. Étude des variations de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0; 2]$, $f_n(x) \leq e^2 x^n$. En déduire que $0 \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.

Correction : Par croissance de la fonction exponentielle, pour tout $x \in [0; 2]$, alors $e^x \leq e^2$.

En multipliant par $x^n \geq 0$, on obtient $f_n(x) = x^n e^x \leq e^2 x^n$.

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité entre 0 et 2 :

$$I_n = \int_0^2 x^n e^x dx \leq \int_0^2 e^2 x^n dx = e^2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{e^2 2^{n+1}}{n+1}.$$

En divisant par 2^{n+1} , on obtient bien l'inégalité cherchée

$$J_n \leq \frac{e^2}{n+1}.$$

- (b) Quelle est la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction : Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{n+1} = 2^{n+1} e^2 - (n+1)I_n$.

Correction : Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto e^x$ sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 2]$. Une intégration par parties s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^2 x^{n+1} e^x \, dx = [x^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 (n+1)x^n e^x \, dx \\ &= 2^{n+1} e^2 - 0 - (n+1) \int_0^2 x^n e^x \, dx \\ &= 2^{n+1} e^2 - (n+1)I_n. \end{aligned}$$

- (b) En déduire les valeurs de I_2 et de J_2 .

Correction : Grâce à la relation de récurrence précédente, on a en particulier

$$I_2 = 2^2 e^2 - 2I_1 = 4e^2 - 2(e^2 + 1) = 2e^2 - 2.$$

$$\text{Puis, } J_2 = \frac{1}{2^3} I_2 = \frac{2e^2 - 2}{8} = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $$x \mapsto \left(\frac{x}{2} - 1\right) x^n e^x.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0; 2], g_n(x) \leq 0$.

Correction : Pour tout $x \in [0; 2]$, $e^x > 0$ et $x^n \geq 0$ donc $g_n(x)$ est du signe de $\frac{x}{2} - 1$. Négatif donc sur $[0; 2]$.

Conclusion, $\forall x \in [0; 2], g_n(x) \leq 0$.

- (b) En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \frac{1}{2^{n+2}} \int_0^2 x^{n+1} e^x dx - \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 x^n e^x dx \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 x^n \left(\frac{x}{2} - 1 \right) e^x dx && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 g_n(x) dx. \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in [0; 2]$, $g_n(x) \leq 0$. Par positivité de l'intégrale (ou croissance) on en déduit :

$$J_{n+1} - J_n = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 g_n(x) dx \leq 0.$$

Autrement dit, la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (4a), $I_{n+1} = 2^{n+1} e^2 - (n+1)I_n$ donc en divisant tout par 2^{n+2} , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+2}} I_{n+1} &= \frac{2^{n+1} e^2}{2^{n+2}} - (n+1) \frac{I_n}{2^{n+2}} \\ J_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - (n+1) \times \frac{1}{2} \times \frac{I_n}{2^{n+1}} \\ J_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n. \end{aligned}$$

(d) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.

Correction : D'après (5b), la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &\leq 0 && \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n - J_n \leq 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} - \frac{n+3}{2} J_n \leq 0 \\ &&& \Leftrightarrow \frac{n+3}{2} J_n \geq \frac{e^2}{2} \\ &&& \Leftrightarrow J_n \geq \frac{e^2}{n+3}. && (n+3 > 0) \end{aligned}$$

(e) En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction : D'après les questions (3a) et (5d),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e^2}{n+3} \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+1}.$$

Ainsi, en multipliant par $n \geq 0$, nous avons :

$$\frac{n}{n+3} e^2 \leq nJ_n \leq \frac{n}{n+1} e^2.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+3} e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} e^2 = e^2$, d'après le théorème d'encadrement, $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = e^2.$$

6. Une somme infinie ?

(a) En procédant par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la propriété (H_n) :
 « $J_n = \frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right)$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, on a d'une part $J_0 = \frac{e^2 - 1}{2}$ et d'autre part :

$$\frac{(-1)^0 0! e^2}{2^{0+1}} \left(\sum_{k=0}^0 \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) = \frac{e^2}{2} \left(\frac{(-2)^0}{0!} - e^{-2} \right) = \frac{e^2}{2} (1 - e^{-2}) = \frac{1}{2} (e^2 - 1) = J_0.$$

La propriété (H_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie : démontrons la propriété (H_{n+1}) . D'après la formule de récurrence sur (J_n) , on a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n \\ (\text{hyp. de réc.}) \rightarrow &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \left[\frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) \right] \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (-2)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2} (n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2}} \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! e^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right). \end{aligned}$$

La propriété (H_{n+1}) a été prouvée.

Conclusion. On a montré la propriété (H_0) et que $\forall n \in \mathbb{N}, (H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$, donc par récurrence on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq 3$, montrer que $\frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4}$. Que peut-on en déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n}$?

Correction : Introduisons la propriété (H_n) : « $\frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4}$ ».

Initialisation. Pour $n = 3$, on a d'une part $\frac{3!}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ et d'autre part $\frac{n}{4} = \frac{3}{4}$ également, donc (H_3) est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 3$ tel que (H_n) est vraie ; démontrons (H_{n+1}) :

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{2 \times 2^n} = \frac{n+1}{2} \times \frac{n!}{2^n} \geq \frac{n+1}{2} \times \frac{n}{4} = \frac{n+1}{4} \times \frac{n}{2},$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Or, comme $n \geq 3$ alors $\frac{n}{2} \geq \frac{3}{2} \geq 1$, ainsi en multipliant cette inégalité par $\frac{n+1}{4} > 0$ on obtient $\frac{n+1}{4} \times \frac{n}{2} \geq \frac{n+1}{4}$.

On a bien obtenu l'inégalité au rang $n+1$, à savoir $\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{4}$.

Conclusion. La propriété (H_3) est vraie et $\forall n \geq 3, (H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$. Donc par récurrence, on a démontré que $\forall n \geq 3, \frac{n!}{2^n} \geq \frac{n}{4}$.

Enfin, on sait que $\frac{n}{4} \rightarrow +\infty$. On conclut à l'aide du théorème de minoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty.$$

(c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!}$?

Correction : D'après, (6a), on a :

$$|J_n| = \left| \frac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right| \right|.$$

Comme $J_n \geq 0$, cette égalité s'écrit

$$J_n = \frac{n! e^2}{2^{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right|.$$

Avec $\frac{n! e^2}{2^{n+1}} \neq 0$, on obtient enfin :

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right| = \frac{2^{n+1}}{n! e^2} J_n = 2e^{-2} \times \frac{1}{\frac{n!}{2^n}} \times J_n.$$

Comme $\frac{n!}{2^n} \rightarrow +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{n!}{2^n}} = 0$ de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

Le théorème sur la limite d'un produit suffit à conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right| = 0$ i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}.$$

En fin d'année, on notera cette limite $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$. Une telle somme infinie est appelée "série".
L'année prochaine vous y verrez le développement de exp en série entière...

Exercice 3 –

Définition :

- On dit qu'une matrice ligne ou colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1.

Par exemple, la matrice colonne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est stochastique car $\frac{1}{2} \geq 0$, $\frac{1}{6} \geq 0$, $\frac{1}{3} \geq 0$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$.

- On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque chacune de ses lignes l'est.

Partie A : Des propriétés des matrices stochastiques

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients positifs ou nuls.

Montrer que A est stochastique si et seulement si $AX = X$.

Correction : Comme ses coefficients sont positifs, A est stochastique si, et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Le coefficient sur la ligne i de AX est $\sum_{k=1}^n a_{ik}$, donc $AX = X$ si, et seulement si A est stochastique.

Commentaires : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais $A \neq I_3$!

2. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soit $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Rappeler la formule donnant le coefficient sur la ligne i et la colonne j de la matrice produit AB.

Correction : Le coefficient (i, j) de AB est $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

- (b) En déduire que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB.

Correction : Si tous les a_{ik}, b_{kj} sont positifs, alors $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \geq 0$ d'où la conclusion.

- (c) En déduire que si A et B sont stochastiques alors la matrice AB l'est aussi.

Correction : Si A et B sont stochastiques, alors $AX = X$ et $BX = X$, donc

$$(AB)X = A(BX) = AX = X.$$

D'après (1), AB est stochastique.

Commentaires : On pouvait aussi le faire à la main avec les sommes sur un rectangle mais c'était moins joli et pas dans l'esprit du sujet.

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille (3, 3)

Dans cette partie, on étudie les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{2}z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Correction : On a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Justifier que la matrice A est stochastique.

Correction : Toutes les lignes de A sont positives et de somme 1. Ainsi, A est stochastique.

5. (a) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction : On vérifie que $Q \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Q = I_3$. Cela prouve que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Commentaires : *Quand on vous donne l'inverse, on ne le cherche pas ! On vérifie simplement que ça l'est bien et, petit raffinement, on fait bien attention à ne pas écrire Q^{-1} avant d'avoir prouvé que Q était inversible et on n'écrit pas, par exemple, $QQ^{-1} = \dots$*

- (b) En déduire que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Correction : Puisqu'on nous donne tout, il suffit de calculer QDQ^{-1} et de trouver ... A .

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = QD^nQ^{-1}X_0$.

Correction : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $X_n = A^nX_0 = QD^nQ^{-1}X_0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Exprimer X_n en fonction de n .

Correction : La matrice D étant diagonale, on obtient directement $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$,
puis par produits, en remarquant que $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\frac{1}{6})^n \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$.

- (b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq \frac{1}{2} \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3}$, donc x_n , y_n et z_n sont positifs et on a $x_n + y_n + z_n = 1$.

On en déduit que X_n est stochastique.

Commentaires : *Pour invoquer le produit de matrices stochastiques sachant que A et X_0 l'étaient, il fallait le démontrer par récurrence. C'est plus long.*

8. Prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des limites que l'on notera ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z .

Correction : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{1}{3}$ par somme, car $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

9. Prouver que $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL .

Correction : Ainsi, $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est clairement stochastique, et on trouve $AL = L$.

Commentaires : *Bien sûr, on pouvait aussi calculer le produit AL mais c'était renier la question 1.*

Fonctions d'une variable réelle - DÉRIVABILITÉ

1. Nombre dérivé, fonction dérivée

- Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Définition par le taux d'accroissement.
- La dérivabilité entraîne la continuité.
- Dérivabilité à gauche, à droite et dérivée sur un intervalle.
- Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.
- Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

- Interprétation géométrique : tangente.
- Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
- Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

2. Extremum local et point critique : Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

3. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I et si $|f'|$ est majorée par K , alors pour tous x, y de I , $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$.
- Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
- Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

La fonction f' est alors continue en a . Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

- Interprétations géométrique et cinématique.

4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.
- Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

5. Fonctions complexes

- Brève extension des définitions et résultats précédents.
- Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
- Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

Dans ce chapitre, nous complétons nos outils permettant une étude efficace des fonctions. L'est bien entendu la *dérivation*, que nous abordons ici d'un point de vue essentiellement pratique : comme inscrit dans le programme de PTSI, l'objectif est de savoir dériver et étudier de façon efficace des fonctions explicites.

Rien de très nouveaux donc, si ce n'est un peu plus de maturité en analyse réelle et la section des théorèmes classiques qui va s'enrichir d'un théorème capital : *le théorème des accroissements finis*^[1]. Fondamental notamment pour l'étude des suites récurrentes que nous aborderons au prochain chapitre.

CONTENU

I	Dérivabilité	1062
I.1	Taux d'accroissement et nombre dérivé	1063
I.2	Dérivées à droite et à gauche	1067
I.3	Dérivabilité et approximation affine	1070
II	Fonctions dérivables	1071
II.1	Stabilité algébrique	1071
II.2	Dérivabilité d'une composée	1074
II.3	Dérivabilité de la réciproque	1075
II.4	Dérivée d'ordre supérieur	1078
III	Théorème des accroissements finis	1081
III.1	Extrema	1081
III.2	Théorème de Rolle	1083
III.3	Théorème des accroissements finis	1085
IV	Applications	1089
IV.1	Caractérisation de la monotonie	1089
IV.2	Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$	1092
V	Fonctions à valeurs complexes	1095
	Feuille d'exercices n° 18 : Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ	1098
III	Prolongements	1106
	Test n° 22 : Dérivabilité	1113
	Programme du chapitre XVIII	1117

Dans tout ce chapitre, I représentera, sauf mentions autres, un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ i.e. non vide et non réduit à un singleton ou une réunion d'intervalles tous non triviaux.

[1]. Après le « TVI » voici le « TAF ».

I/ Dérivabilité

Un peu d'histoire :

- La notion de dérivée tire son origine dans l'étude des tangentes, et en particulier de la pente des tangentes. Pierre de Fermat^[2] le premier (en 1636) constate que très souvent, la pente s'obtient en écrivant $\frac{f(a+e) - f(a)}{e}$, en « prenant » $e = 0$ (il ne dispose pas encore de la notion de limite). Il appelle e un « infiniment petit ».
- Newton, en 1669, introduit la notation $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, pour les dérivées des coordonnées d'un point, qu'il appelle « fluxions » des « fluentes » (x, y, z) , qu'il définit comme les vitesses dont les fluentes sont augmentées graduellement et indéfiniment.

Sa notation est encore utilisée actuellement en physique.
- En 1674, Leibniz introduit la notation dx ; pour désigner une variation infinitésimale sur l'abscisse, et dy pour désigner une variation infinitésimale sur l'ordonnée. Si y dépend de x , $\frac{dy}{dx}$ désigne donc la variation infinitésimale de la fonction y rapportée à la variation infinitésimale de x qui l'a provoquée : il s'agit bel et bien de la définition de Fermat, et rien de plus : pas de nouvelle théorie, juste une nouvelle notation, encore largement utilisée aujourd'hui, notamment sous la forme non quotientée (pensez aux intégrales !)
- À la fin du 18^{ème} siècle, Joseph-Louis Lagrange^[3] introduit la terminologie « dérivée » et la notation f' .
- La formalisation rigoureuse est due à Karl Weierstrass^[4] dans la deuxième moitié du 19^{ème} siècle, s'appuyant sur une définition rigoureuse de la notion de limite et de continuité (dont il donne également pour la première fois une définition rigoureuse et précise)

[2]. **Pierre de Fermat**, né dans la première décennie du XVII^{ème} siècle, à Beaumont-de-Lomagne (département actuel de Tarn-et-Garonne), près de Montauban, et mort le 12 janvier 1665 à Castres (département actuel du Tarn), est un magistrat, polymathe et surtout mathématicien français, surnommé « le prince des amateurs ».

Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique. On lui doit notamment le principe de Fermat en optique.

Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.

[3]. **Joseph Louis, comte de Lagrange** (en italien Giuseppe Lodovico ou aussi Giuseppe Luigi De la Grange Tournier¹), né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français. À l'âge de trente ans, il quitte le Piémont et va séjourner à Berlin pendant vingt-et-un ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt-six dernières années à Paris, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Cassini. Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (dès 1797) avec Monge et Fourcroy. Il a aussi été le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

En mécanique des fluides, il introduit le concept de potentiel de vitesse en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit en plus deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marque une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

Lagrange a aussi œuvré dans le domaine de la théorie des probabilités.

[4]. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass**, habituellement appelé Karl Weierstrass, orthographié Weierstraß en allemand, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.

Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques.

C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

I.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 1 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f en a $\tau_{a,f}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a$, $x \neq a$.

Dans ce cas, on appelle cette limite le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$ au sens précédent.

On appelle alors fonction dérivée de f sur I , que l'on note f' (ou $\frac{df}{dx}$), la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x :

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

- On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës, d'où la nécessité de nouvelles définitions. Tandis que Bolzano avait développé une définition suffisamment rigoureuse des limites dès 1817 (et peut-être même auparavant), ses travaux restèrent quasi inconnus de la communauté mathématique pendant des années, et d'autres mathématiciens éminents, comme Cauchy, n'avaient que de vagues définitions de la limite et de la continuité d'une fonction.

En 1861, Weierstrass définit la continuité comme suit :

f est continue en x_0 si, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel δ strictement positif tel que, si x est à une distance de x_0 strictement inférieure à δ , alors la valeur de la fonction f en x est à une distance strictement inférieure à ε de la valeur de la fonction f en x_0 .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Weierstrass formula également une définition de la limite et de la dérivée « en (ε, δ) », telle qu'on l'enseigne généralement aujourd'hui.

Avec ces nouvelles définitions, il put donner des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes qui reposent sur des propriétés des nombres réels jusqu'alors tenues pour intuitives, tels le théorème des *valeurs intermédiaires*, le théorème de *Bolzano-Weierstrass* et le théorème de *Borel-Lebesgue*.

Interprétation graphique :

Soit $A(a; f(a))$ un point de la courbe représentative, donnons nous un autre point $M(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, un point variable « pas trop éloigné » de A .

On considère alors les droites (AM) , sécantes en A et M à $\mathcal{C}_f$.

Le taux d'accroissement $\tau_{a,f}(x)$ désigne le coefficient directeur de la corde (AM) .

$$\tau_{a,f} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

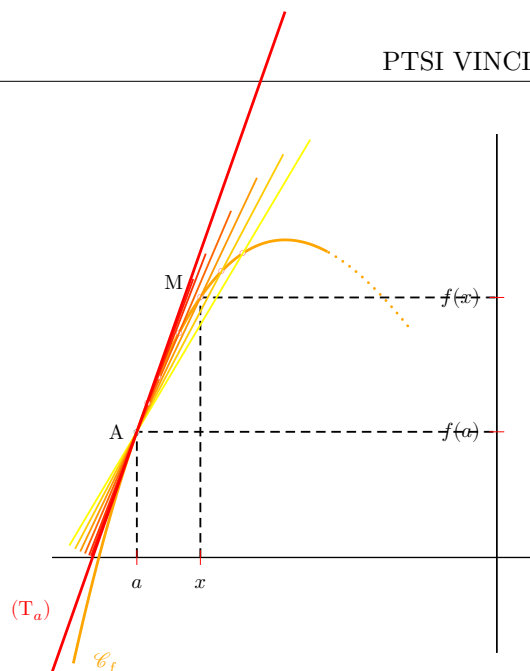


Figure XVII.1 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Dire que f est dérivable en a revient à dire que la fonction

$$\begin{aligned} \tau_{a,f} : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet un prolongement par continuité en a .

Remarques :

- La dérivation est une notion :
 - locale et non ponctuelle : la fonction f doit être définie dans un voisinage de a et pas seulement en a .
 - locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de f à un voisinage de a quel qu'il soit et non de sa description globale.
- Par définition, le nombre dérivé en a , s'il existe, est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe en au point d'abscisse a .

1. Si f est dérivable en a , la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est alors définie comme la droite d'équation

$$(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

2. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors la (demi-)tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est la droite d'équation $x = a$.

Exercice 1 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. Les fonctions constantes.
2. $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$.
3. $x \mapsto \sin(x)$.

Correction : La dérivabilité étant une notion locale, il suffit de regarder la dérivabilité de f en un point a quelconque de I pour pouvoir conclure à la dérivabilité sur I tout entier.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

1. Soit $f : x \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\lambda - \lambda}{x - a} = 0.$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée nul. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto 0.$$

2. Soit $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente.

$$\text{Alors, } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} = na^{n-1}.$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = na^{n-1}$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto nx^{n-1}.$$

3. Soit $f : x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \sin(a) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + \cos(a) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \\ &= \cos(a). \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \cos(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto \cos(x).$$

Commentaires : Pour ceux qui auraient oublié,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \underbrace{\left(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})} \right)^2}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \times \left(-\frac{h}{2} \right) = 0.$$

Exemples 1 :

- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ de nombre dérivé respectivement égal à -1 et 1 en tout point de ces intervalles.

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0}.$$

Donc $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 .

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\forall a, x \in \mathbb{R}_+$ et $a \neq x$, on a :

$$\tau_{a,\sqrt{\cdot}}(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

*D'une manière générale, ce sera le cas pour toutes les réciproques de fonctions dont la dérivée s'annule en ce point (cf. **théorème (6)**).*

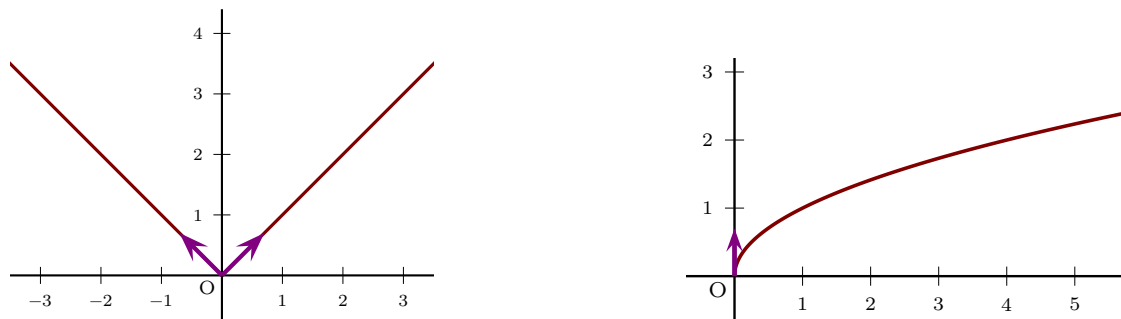


Figure XVII.2 – Les fonctions valeur absolue $x \mapsto |x|$ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0.

Théorème 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Par la contraposée, une fonction non continue au voisinage d'un point ne peut y être dérivable.

Preuve : Soit $a \in I$ quelconque.

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on peut toujours écrire :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a).$$

Comme f est dérivable en a , le membre de droite a bien une limite quand x tend vers a , qui est $f(a)$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$: f est continue en $a \in I$ donc sur I .

Ce théorème explique simplement que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité comme l'était déjà la notion de continuité par rapport à celle de définition. On pourra donc trouver des fonctions continues sans qu'elles soient dérivable mais pas l'inverse.

D'une manière générale, retenir que :

- la représentation graphique d'une fonction continue est en un seul morceau.
- la représentation graphique d'une fonction dérivable admet une tangente en chacun de ses points (cf. **proposition (3)**).

La réciproque de ce théorème est fautive. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur les représentations graphiques de la valeur absolue, de la racine carrée ou, globalement, de celle de la figure (XVII.3) .

ATTENTION

I.2 Dérivées à droite et à gauche

De même que pour les limites ou la continuité, on définit les deux dérivées directionnelles à gauche et à droite :

Définition 2 (Dérivabilité à gauche/à droite en un point) : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

Dérivabilité à gauche : On dit que f est *dérivable à gauche* en a si $f_{]I] - \infty; a]}$ est dérivable en a i.e. si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Dérivabilité à droite : On dit que f est *dérivable à droite* en a si $f_{]I \cap [a; +\infty[}$ est dérivable en a i.e. si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.

Dans les cas d'existence, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ s'appellent respectivement les nombres dérivés à gauche et à droite de f en a .

Remarques :

- Dans les cas d'existence, pour $a \in I$, on a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

et

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- Dire que f est dérivable à gauche ou à droite en a revient à dire que la fonction

$$\begin{aligned} \tau_{a,f} : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet une limite à gauche et à droite respectivement.

- Parce qu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).
- Évidemment, la première condition pour que la dérivée à gauche (resp. à droite) existe est que cette limite ait un sens, donc que f soit bien définie en a et dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de a .

Proposition 2 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_d et f'_g) :

Soit $a \in I$, non égal à une des bornes de I .

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a). \end{cases}$$

Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
 f \text{ est dérivable en } a &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existent,} \\
 &\quad \text{sont finies et égales} \\
 &\Leftrightarrow f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a).
 \end{aligned}$$

Si f admet une dérivée à droite et à gauche en a tel que $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors $A(a; f(a))$ est appelé *point anguleux*, en lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux demies-tangentes (représentées traditionnellement par des demi-flèches) non parallèles d'équation respective :

$$(T_{a,g}) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a), \forall x \leq a \quad \text{et} \quad (T_{a,d}) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a), \forall x \geq a.$$

En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en a .

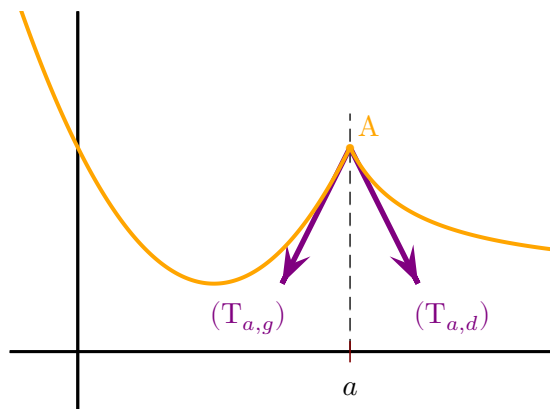


Figure XVII.3 – En un point anguleux, la fonction est continue sans être dérivable.

Exemples 2 :

1. La fonction $x \mapsto |x|$, bien que dérivable à gauche et à droite en 0, n'est pas dérivable en 0.
2. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

Correction : Il est clair que f est dérivable à gauche et à droite en 0.

$$\text{De plus, } f'_g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x) - \ln(1)}{x} = f'_d(0).$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

ATTENTION

Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point.

C'est le cas de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En effet, $x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.

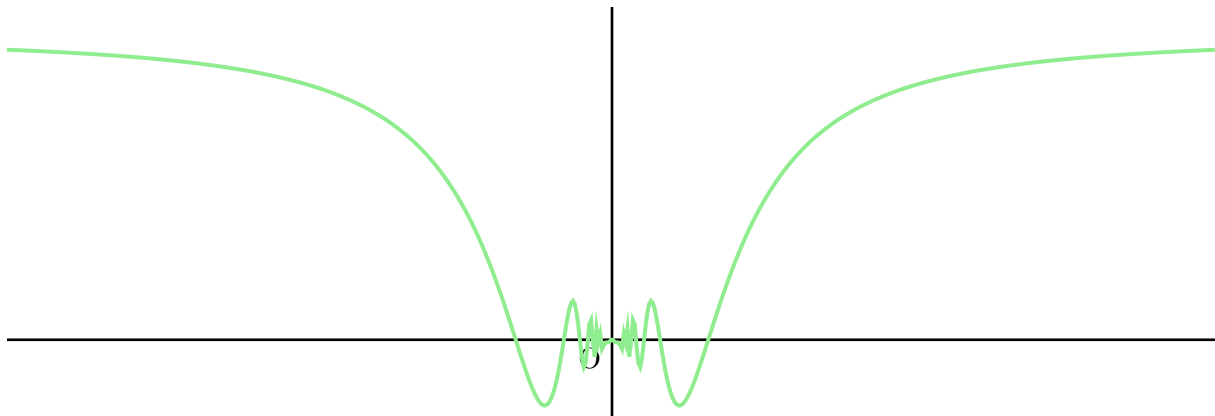


Figure XVII.4 – Une fonction peut être continue sans être dérivable ni à gauche, ni à droite.

Remarque : Quid de la dérivabilité sur un fermé ?

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle fermé) : Soit f définie sur un intervalle fermé $I = [a; b]$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable sur $\overset{\circ}{I} =]a; b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .

Adaptation immédiate à des intervalles semi-ouverts.

Pour peu que f soit dérivable sur I , on peut ainsi étendre la **définition (1)** à un intervalle $J \subset I$ fermé mais alors, il n'est pas équivalent de dire que f est dérivable sur J et que la restriction de f est dérivable sur J .

Par exemple, si $I = [0; 2]$ et $J = [0; 1]$, la dérivabilité de f sur I stipule la dérivabilité de f en 1 (donc la dérivabilité à la fois à gauche et à droite), alors que la dérivabilité de la restriction de f à $[0; 1]$ n'impose que la dérivabilité à gauche en 1.

Remarquez que les problèmes ont toujours lieu en des bornes fermées de J , qui ne sont pas des bornes de I . Ainsi, on pourrait contourner le problème en se restreignant à la dérivabilité sur des intervalles du type $I \cap U$, où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

I.3 Dérivabilité et approximation affine

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f est dérivable en a si, et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0. \quad (\text{XVII.1})$$

De plus, si ℓ existe alors $f'(a) = \ell$:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x). \quad (\text{XVII.2})$$

Preuve : Supposons f dérivable en a . Posons, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Comme f est dérivable en a , $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, et on peut prolonger ε à I tout entier en posant $\varepsilon(a) = 0$.

Par construction, la fonction ε tend vers 0 en a , et on a, pour tout $x \in I$,

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

On a donc (XVII.1) avec $\ell = f'(a)$.

Réciproquement, supposons (XVII.1) vérifiée.

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell + \varepsilon(x).$$

Ainsi, lorsque x tend vers a , $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \ell$. La fonction f est donc dérivable en a , et $f'(a) = \ell$.

— La relation (XVII.2) est appelée *développement limité à l'ordre 1 de f en a* .

La fonction f est donc dérivable en a si, et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a .

— L'application affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée l'approximation affine de f en a . Sa courbe représentative est la tangente de f au point d'abscisse a .

— On peut montrer que cette approximation affine est la meilleure au point a .

On verra plus tard comment contrôler l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f(a) + (x - a)f'(a)$.

Graphiquement, cela revient à approcher le point M de $\mathcal{C}_f$ par le point M' de la tangente en a .

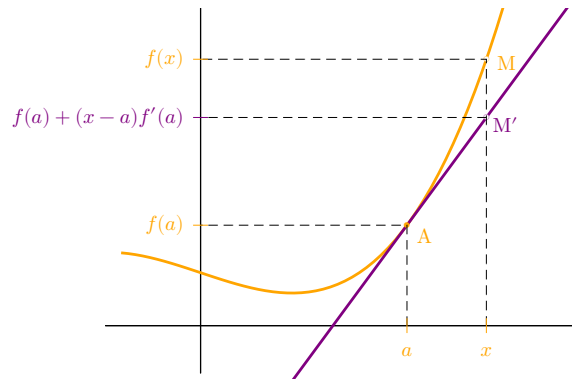


Figure XVII.5 – La tangente est la meilleure approximation affine de f au point a .

Exemple 3 : Par approximation affine

$$\sqrt{4,001} = \sqrt{4 + 0,001} \simeq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0,001 = 2,00025.$$

La calculatrice donne $\sqrt{4,001} \simeq 2,0002499$.

II/ Fonctions dérivables

II.1 Stabilité algébrique

Proposition 4 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

2. Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. L'inverse d'une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

4. Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont le dénominateur ne s'annule pas en a est une fonction dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Preuve : Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$ et soit $x \in I \setminus \{a\}$.

1. Avec la **proposition (3)** : Comme f et g sont dérivable en a ,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_f(x) && \text{avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0. \\ g(x) &= g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_g(x) && \text{avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_g(x) = 0. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\lambda f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)(\lambda f'(a) + g'(a)) + (x-a) \underbrace{(\lambda \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x))}_{=\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0}$$

La fonction $\lambda f + g$ est donc dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Sans la **proposition (3)** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Comme f et g sont toutes deux dérivables en a , en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a).$$

La limite étant stable par combinaisons affines, on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)}{x-a} = \lambda f'(a) + g'(a).$$

La fonction $\lambda f + g$ est donc dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

2. Avec la **proposition (3)** : De même, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_f(x)) (g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_g(x)) \\ &= f(a)g(a) + (x-a)(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) \\ &\quad + (x-a) \underbrace{\left(\begin{aligned} &f(a)\varepsilon_g(x) + g(a)\varepsilon_f(x) \\ &+ (x-a)(f'(a)\varepsilon_g(x) + g'(a)\varepsilon_f(x)) \\ &+ (x-a)\varepsilon_f(x)\varepsilon_g(x) \end{aligned} \right)}_{=\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \end{aligned}$$

La fonction $f \times g$ est donc dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Sans la **proposition (3)** : De même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{[f(x)g(x) - f(a)g(x)] + [f(a)g(x) - f(a)g(a)]}{x-a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}. \end{aligned}$$

Or,

— g étant dérivable en a , elle y est continue i.e. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$.

— f étant dérivable en a , on a, de même, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$.

En conclusion,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

La fonction $f \times g$ est donc dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3. f étant continue en a , et non nulle en a , il existe un voisinage U de a sur lequel elle ne s'annule pas.

La fonction $\frac{1}{f}$ est donc bien définie sur U et, $\forall x \in U \cap (I \setminus \{a\})$, on a :

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \frac{-\frac{f(x) - f(a)}{f(a)f(x)}}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Remarque : On a encore utilisé la continuité de f en a pour écrire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

La fonction $\frac{1}{f}$ est donc dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

4. Simple application de 2 et 3 : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$...

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{si } x < a \\ (x-a)^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

- Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Correction :

1. D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} -(x-a)^2 = 0 = h(a) = (a-a)^2 = 0$. La fonction f est donc continue en a donc sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < a$, on a $\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = -(x-a)$ d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = 0$. La fonction h est donc dérivable en a par valeurs inférieures et $h'_g(a) = 0$.

Pour $x > a$, on a aussi $\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = x - a$ d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = 0$. La fonction h est donc aussi dérivable en a par valeurs supérieures et $h'_d(a) = 0$.

Comme $h'_g(a) = h'_d(a)$, la fonction h est donc dérivable en a donc sur $\mathbb{R}$. En particulier, sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Il est assez clair que h est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

De plus, $h' : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -2(x-a) & \text{si } x < a \\ 2(x-a) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Pour $x < a$, on a $\frac{h'(x) - h'(a)}{x - a} = -2$. La fonction h' est donc dérivable en a par valeurs inférieures et $h''_g(a) = -2$.

Pour $x > a$, on a aussi $\frac{h'(x) - h'(a)}{x - a} = 2$. La fonction h' est donc aussi dérivable en a par valeurs supérieures et $h''_d(a) = 2 \neq h''_g(a)$. La fonction h' n'est donc pas dérivable en a donc sur $\mathbb{R}$.

II.2 Dérivabilité d'une composée

Proposition 5 :

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

La composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a).$$

Preuve : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a) \in J = f(I)$ et soit $x \in I \setminus \{a\}$.

Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement d'après la proposition (3) :

En a pour f : $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

En $A = f(a)$ pour g : $g(x) = g(A) + (x - A)g'(A) + (x - A)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} 0$.

On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(A) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $A = f(a)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underbrace{f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)}_{X_a}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$,

$$= g(A) + (X_a - A)g'(A) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a).$$

Or, $X_a - A = (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$,

$$= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)g'(A)\varepsilon_1(x) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a).$$

$$= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)\underbrace{\left(g'(A)\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(X_a)\right)}_{\varepsilon_3(x)}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$, par continuité de ε_2 en A , $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(X_a) = 0$, puis $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Donc, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + (x - a)\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Par conséquent, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Exercice 4 : Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x(1-x)} \right).$$

Donner sa dérivée le cas échéant.

Correction : Par définition de $\sqrt{\cdot}$, la fonction f ne peut être définie que sur $[0; 1]$. Sur cet intervalle $x + \sqrt{x(1-x)} \geq 0$ s'annulant pour $x = 0$.

D'après les théorèmes généraux on en déduit, successivement, pour tout $x \in]0; 1[$:

- $x \mapsto x(1-x)$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $x \mapsto x + \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $x \mapsto f(x)$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}}{x + \sqrt{x(1-x)}}.$$

II.3 Dérivabilité de la réciproque

Théorème 6 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall b \in J, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Preuve : Soient $b = f(a) \in J$, $y \in J \setminus \{b\}$ et $x \in I$, l'unique antécédent de y par f .

Avec la **proposition (3)** : Comme f est dérivable en a , on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_f(x) \quad \text{avec } \varepsilon_f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

D'où,

$$f(f^{-1}(y)) = b + (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))f'(f^{-1}(b)) + (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))\varepsilon_f(f^{-1}(y))$$

Or, $f(f^{-1}(y)) = y$,

$$y - b = (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))f'(f^{-1}(b)) + (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))\varepsilon_f(f^{-1}(y))$$

Si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= f^{-1}(b) + (y-b) \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} - (f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) \frac{\varepsilon_f(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(b))} \\ &= f^{-1}(b) + (y-b) \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} + (y-b) \times \underbrace{\frac{f^{-1}(b) - f^{-1}(y)}{y-b} \frac{\varepsilon_f(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(b))}}_{= \varepsilon_{f^{-1}}(y)} \end{aligned}$$

Le théorème de la bijection, nous assure que f^{-1} est continue en b donc, d'après les théorèmes sur les composées,

$$\lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_{f^{-1}}(y) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(b) - f^{-1}(y)}{y-b} \frac{\varepsilon_f(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(b))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a-x}{f(x) - f(a)} \frac{\varepsilon_f(x)}{f'(a)} = \frac{1}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_f(x) = 0.$$

En conclusion, f^{-1} est donc dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Sans la **proposition (3)** : On a :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \neq b}} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}},$$

où $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ par injectivité de f^{-1} .

De plus, f' ne s'annulant pas sur I , f est strictement monotone sur l'intervalle I . Le théorème de la bijection nous assure alors de la continuité de f^{-1} sur J i.e. $f^{-1}(y) = x$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b :

$$= \frac{1}{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}},$$

où $f(x) \neq f(a)$ par injectivité de f .

Comme f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \neq 0$, on obtient :

$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

f^{-1} est donc dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

La dérivabilité étant une notion locale, si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Définition 3 (Difféomorphisme) : On appelle *difféomorphisme* toute bijection dérivable entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est dérivable.

Le **théorème (6)** affirme donc que les bijections dérivables entre deux intervalles dont la dérivée ne s'annule pas sur un intervalle I sont des difféomorphismes sur I .

Exemple 4 : La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction $\exp$ est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1}x)} = \frac{1}{x}.$$

Remarques :

— Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en a a pour coefficient directeur $f'(a)$, celle à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $b = f(a)$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{f'(a)}$.

Les tangentes sont donc, elles-aussi, symétriques par rapport à $\Delta : y = x$.

— Moyen mnémotechnique :

Comme $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ alors en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, $(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$ et donc $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ce moyen permet de retrouver la formule, mais ne démontre pas la dérivabilité de f^{-1} .

— Si $f'(a) = 0$, alors, la démonstration précédente prouve que f^{-1} **n'est pas dérivable en b** .

Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $M(a; b)$ où $b = f(a)$. Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $M(b; a)$.

Exemple 5 : $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective et continue sur $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$

est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $f'(x) = 2x$ s'annule pour $x = 0$.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Exercice 5 : Soit $\varphi : x \mapsto x + e^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J .
3. Déterminer $(\varphi^{-1})'(1)$.

Correction :

1. D'après les théorèmes sur les sommes de fonctions continues, il est clair que φ est continue sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. Somme de fonctions strictement monotones sur $\mathbb{R}$, elle l'est également sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection, φ établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image qui est de même nature $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right[= \mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente φ est donc une bijection entre les deux intervalles $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$. Elle y est clairement dérivable et on a :

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = 1 + e^x > 0.$$

Sa fonction réciproque est donc dérivable sur J et on a :

$$\forall y \in J, (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{1 + e^{\varphi^{-1}(y)}}.$$

3. Comme $\varphi(0) = 1$, on obtient $(\varphi^{-1})'(1) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$.

II.4 Dérivée d'ordre supérieur

Une fonction peut être plus ou moins « régulière ». La régularité d'une fonction se mesure à l'aide des propriétés de continuité et de dérivabilité.

Plus on peut dériver une fonction, plus celle-ci sera régulière. Intuitivement, plus une fonction est régulière, plus son graphe est lisse.

Définition 4 (Dérivée n -ième) : Soient I une réunion d'intervalles et $f : I \mapsto \mathbb{K}$. On définit récursivement :

- $f^{(0)} = f$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si, pour tout $l \leq n$, la fonction $f^{(l)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I .

On note $\mathcal{D}^n(I; \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Pour pouvoir définir la dérivée n -ième de f en a , il faut pouvoir dériver $f^{(n-1)}$ en a , et il faut donc que $f^{(n-1)}$ soit définie sur tout un voisinage de a et non seulement en a .

Définition 5 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$) : Une fonction f est dite :

- de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit aussi parfois que f est n fois continument dérivable sur I .

Notation et remarques : Soit I une réunion d'intervalles non triviaux et $n \in \mathbb{N}$.

- Les fonctions de classe $\mathcal{D}^0$ sont les fonctions définies sur I .
- Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues sur I .
- Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont les fonctions (définies, continues,) dérivables sur I et de dérivées (définies et) continues sur I .

Remarquez que la dérivabilité ne suffit pas à obtenir la classe $\mathcal{C}^1$.

- On note $\mathcal{D}^\infty(I; \mathbb{K})$ les fonctions n fois dérivables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile de montrer que

$$\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{K}) = \mathcal{D}^\infty(I; \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{K}) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(I; \mathbb{K}).$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a la suite d'inclusions ensemblistes :

$$\mathcal{C}^\infty \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{C}^{k+1} \subsetneq \mathcal{D}^{k+1} \subsetneq \mathcal{C}^k \subsetneq \mathcal{D}^k \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{C}^1 \subsetneq \mathcal{D}^1 \subsetneq \mathcal{C}^0 \subsetneq \mathcal{D}^0 \subsetneq \mathbb{K}^I = \mathcal{F}(I; \mathbb{K}).$$

Les inclusions sont strictes.

Exemple 6 : L'exponentielle, les fonctions sinus, cosinus, les polynômes, les fractions rationnelles, le logarithme sur leur ensemble de définition sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De manière générale, la plupart des fonctions que l'on nomme « usuelles » ou « de référence » sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition ou, à défaut, sur l'intérieur de celui-ci.

Exercice 6 : Soit $f : x \mapsto x^n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \leq n$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Correction : La fonction polynomiale f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ce résultat à connaître par cœur ou à retrouver rapidement se démontre par récurrence sur $\leq n$: Pour tout réel x on a :

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^n = \frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0}$ donc la propriété est vraie pour $k = 0$.
- Supposons la relation vraie pour un certain entier $k \leq n$.

Comme dit précédemment, $f^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \left(\frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right)' = \frac{n!(n-k)}{(n-k)!} x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1}.$$

La relation est héréditaire.

- D'après le principe de récurrence, la relation est vraie pour tout $k \leq n$.

Remarque : Il est clair que pour $k > n$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Proposition 7 (Stabilité de $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$) :

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et I, J des réunions d'intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}),$$

$$\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

$\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$ est stable par produit :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}),$$

$$f \times g \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

(Formule de Leibniz)

$\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$ est « stable » par quotient et composition :

- ◇ $\forall f, g \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$, si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$.
- ◇ $\forall f \in \mathcal{C}^n(I; J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J; \mathbb{K})$, $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$.

$\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K})$ est presque stable par réciprocity :

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ une bijection de I sur $f(I)$.

Si f' ne s'annule pas sur I alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J; I)$.

Tous les assertions précédentes restent vraies si l'on remplace $\mathcal{C}^k$ par $\mathcal{D}^k$.

Preuve : On raisonne ensuite par récurrence sur n , avec des initialisations toutes triviales ou déjà démontrées.

Combinaisons linéaires : Le cas des combinaisons linéaires tombe sous le sens.

Produit : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k .

Soient $f, g \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{K})$. Les fonctions f et g sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$, donc fg aussi et $(fg)' = f'g + fg'$, mais $f'g$ et fg' sont de classe $\mathcal{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $(fg)'$ aussi, ce qui prouve que fg est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Ensuite :

$$\begin{aligned}(fg)^{(k+1)} &= (f'g)^{(k)} + (fg')^{(k)} \stackrel{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &= \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} \\ &\stackrel{\text{Formule de Pascal}}{=} \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} \text{ et l'hérédité. ...}\end{aligned}$$

Quotient : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k .

Soient $f, g \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{K})$, g ne s'annulant pas sur I . Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc $\frac{f}{g}$ aussi et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Or, $f'g - fg'$ et g^2 qui ne s'annule pas sont de classe $\mathcal{C}^k$.

L'hypothèse de récurrence nous assure alors que $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Composition : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k .

Soient $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^{k+1}(J, \mathbb{K})$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = g' \circ f$, mais $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par hypothèse de récurrence, donc $(g \circ f)'$ aussi par produit, ce qui prouve que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Réciproque : Pour l'hérédité, on suppose le résultat vrai au rang k .

Soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, J)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et dont la dérivée ne s'annule pas sur I . D'après le **théorème (6)** de la dérivabilité d'une fonction réciproque, $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Comme f' ne s'annule pas sur I et est de classe $\mathcal{C}^k$ par hypothèse de récurrence, $(f^{-1})'$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui prouve que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J .

Remarques :

- Il existe une formule explicite pour la dérivée d'ordre n d'une composition (formule de Faà di Bruno), mais cette formule est fort complexe et tout à fait inutile à retenir en PTSI.

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\substack{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}}{k!} \right) \times g^{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)} \circ f.$$

- Une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ dont la bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ est appelée un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

Exemples 7 :

— La fonction $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};]0; +\infty[)$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$.

La fonction $\exp$ établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$.

Sa bijection réciproque, la fonction $\ln$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

— La fonction $\tan_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[} \in \mathcal{C}^\infty\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; \mathbb{R}\right)$ et, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

La fonction $\tan_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$ établit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\tan_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque, la fonction $\arctan$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $\cos_{]0; \pi[} \in \mathcal{C}^\infty(]0; \pi[; \mathbb{R})$ et, $\forall x \in]0; \pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$.

La fonction $\cos_{]0; \pi[}$ établit donc une bijection de $]0; \pi[$ dans $\cos_{]0; \pi[}(]0; \pi[) =]-1; 1[$.

Sa bijection réciproque, la fonction $\arccos$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$.

III/ Théorème des accroissements finis

III.1 Extrema

Théorème 8 (Condition nécessaire d'extremum) :

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en un point intérieur $c \in]a; b[$.

Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.

On dit alors que c est un *point critique* ou *stationnaire* (de f).

Preuve : Comme c est intérieur à $[a; b]$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]c - \alpha; c + \alpha[\subset]a; b[$.

Supposons que f présente un maximum local en c . Quitte à réduire α , on peut supposer que c est un maximum sur $]c - \alpha; c + \alpha[\subset]a; b[$ i.e.

$$x \in]c - \alpha; c + \alpha[\implies f(x) \leq f(c) \iff f(x) - f(c) \leq 0.$$

— À gauche en c i.e. $c - \alpha < x < c$, on a $x - c < 0$ et $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

La fonction f étant dérivable en c , par passage à la limite en c on a :

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

— À droite en c i.e. $c < x < c + \alpha$, on a $x - c > 0$ et $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$.

La fonction f étant dérivable en c , par passage à la limite en c , on a :

$$f'(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

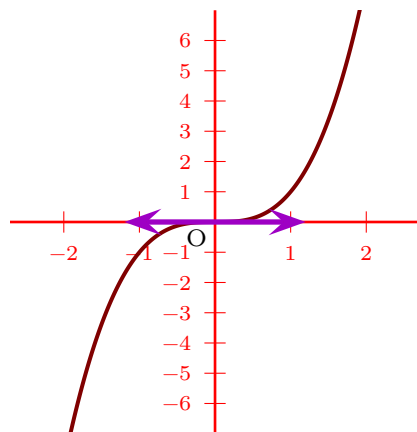
Par conséquent, $f'(c) = 0$.

En un point critique, la courbe représentative de la fonction admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fautive : l'annulation de la dérivée n'est qu'une condition **nécessaire**.

La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 sans que ce ne soit un extremum.



ATTENTION

L'existence d'un extremum n'entraîne en rien la dérivabilité en ce point.

La valeur absolue admet un minimum en 0 où elle n'est pas dérivable.

ATTENTION

C'est évidemment faux si c n'est pas intérieur (cas d'un extremum sur le bord).

Par exemple la fonction $x \mapsto 1+x$ admet un maximum sur $[0; 1]$ en $c = 1$ mais $f'(c) = 1 \neq 0$.

C'est un peu pour cela que l'on préfère regarder des intervalles ouverts lorsqu'on parle de dérivabilité.

Exercice 7 : Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

Correction : D'après les théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- Si $\alpha < 1$, $x \mapsto |x|^\alpha$ n'est pas bornée au voisinage de 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$. La fonction $\sin$ n'ayant pas de limite en $\pm\infty$. La fonction f n'est pas définie en 0.
- Si $\alpha = 1$, $\forall x \neq 0$, $|f(x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc f est continue en 0.

Cependant, $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 donc f n'y est pas dérivable.

- Si $\alpha > 1$, $\forall x \neq 0$, $|f(x)| \leq |x|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc f est continue en 0.

$$\text{Et, } \forall x \neq 0, \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = |x|^{\alpha-1} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|^{\overbrace{\alpha-1}^{>0}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

En conclusion, la fonction f est continue si, et seulement si $\alpha = 1$ et dérivable si, et seulement si $\alpha > 1$.

III.2 Théorème de Rolle

Théorème 9 (Théorème de Rolle ^[5]) :

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. ($a < b$)

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ce théorème exprime simplement que la courbe d'une fonction dérivable passant par deux points de même abscisse possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

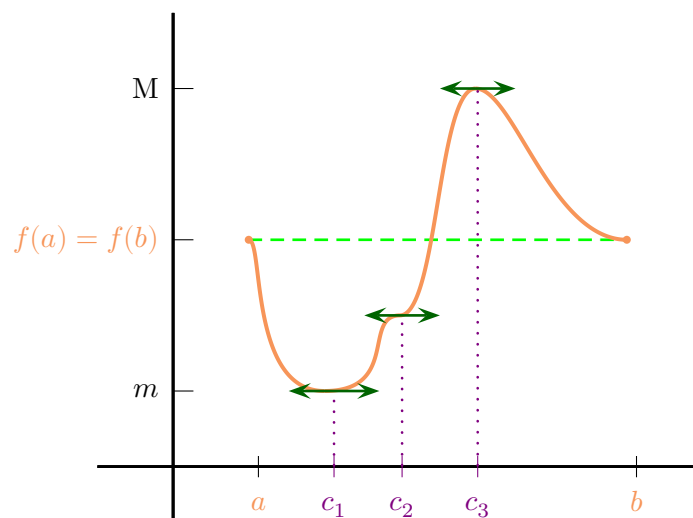


Figure XVII.6 – La courbe d'une fonction dérivable prenant une même valeur en deux points admet une tangente horizontale entre ces derniers.

Preuve : Si f est constante alors tout élément de $]a; b[$ convient.

Sinon, $f([a; b]) = [m; M]$ avec $m < M$ d'après le théorème des bornes atteintes car f est continue sur le segment $[a; b]$.

1. Si $f(a) \neq M$, alors $f(b) \neq M$ également.

Il existe donc $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = M$ et même $c \in]a; b[$ qui est un extremum f intérieur à $[a; b]$.

D'après le **théorème (8)**, on a donc $f'(c) = 0$.

2. Si $f(a) = M$ alors $f(b) \neq m$ et le même raisonnement s'applique avec le minimum.

[5]. **Michel Rolle**, né à Ambert le 21 avril **1652** et mort à Paris le 8 novembre **1719**, est un mathématicien français.

Il est principalement connu pour avoir établi, en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable, une première version du théorème qui porte maintenant son nom.

Il inventa aussi, pour désigner la racine n -ième d'un réel x , la notation normalisée : $\sqrt[n]{x}$.

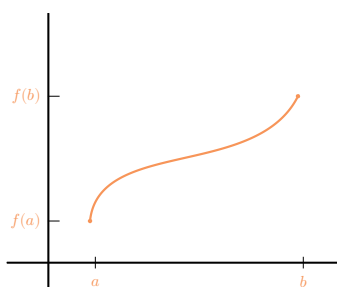


Figure XVII.7 – La condition $f(a) = f(b)$ est nécessaire.

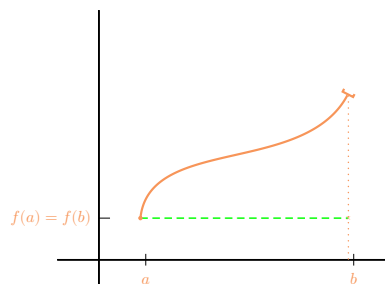


Figure XVII.8 – La continuité est nécessaire.

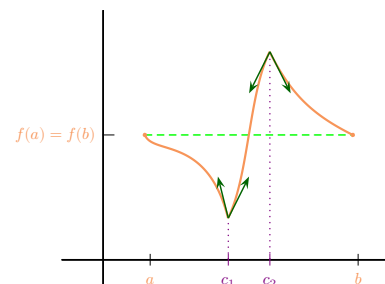


Figure XVII.9 – La dérivabilité est nécessaire.

Remarques :

- Ce théorème est faux si f n'est pas continue en a ou en b . On ne peut se contenter de la dérivabilité sur $]a; b[$ qui entraîne seulement la continuité de f sur $]a; b[$ ouvert.

Il suffit de prendre $f(x) = x$ sur $[0; 1[$ et $f(1) = 0$.

- Ce théorème est faux si f est à valeurs complexes car l'ingrédient principal est le *théorème des valeurs intermédiaires*.

Par exemple $t \mapsto f(t) = e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais sur $[0; 2\pi]$.

Exemple 8 : Si $f \in \mathcal{C}^2([a; b]; \mathbb{R})$ et $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$ alors f'' s'annule sur $]a; b[$.

Exercice 8 (Le Classique) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$ ($a < b$).

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.

Correction : Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - (b-x)^2A$ où $A \in \mathbb{R}$ est tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a; b]$, sa dérivée et dérivable et la fonction φ est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, $\forall x \in]a; b[, \varphi'(x) = -(b-x)f''(x) + 2(b-x)A$

Avec $b-x \neq 0$, on en déduit $A = \frac{f''(c)}{2}$.

Pour $x = a$, et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

III.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 10 (Égalité des accroissements finis) :

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. ($a < b$)

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le théorème des accroissements finis généralise donc le théorème de Rolle.

Graphiquement, il exprime, quant à lui, pour une fonction dérivable, qu'il existe un point de la courbe représentative où la tangente est parallèle à la corde passant par les points d'abscisse a et b .

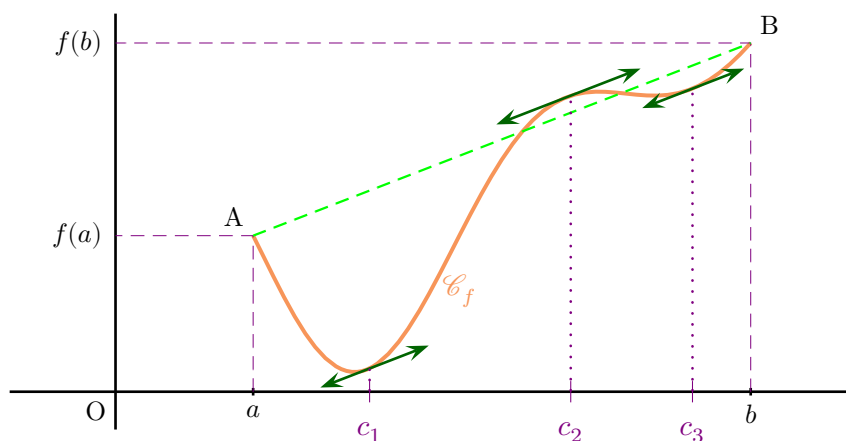


Figure XVII.10 – La courbe d'une fonction dérivable passant par deux points A et B admet une tangente parallèle à la droite (AB) entre ces derniers.

Ce théorème un peu étrange sert très peu en tant que tel, mais ses applications fondamentales en font un des piliers de l'analyse mathématique.

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration sur f ce que traduit le **théorème (11)** et c'est notamment à l'aide du théorème des accroissements finis qu'on démontrera le lien entre signe de la dérivée et variations d'une fonction au **théorème (14)**.

Preuve : Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x).$$

Alors :

- $\varphi(b) = \varphi(a)$,
- φ est clairement continue sur $[a; b]$,
- et φ est dérivable sur $]a; b[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a; b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Théorème 11 (Inégalité des accroissements finis) :

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Un peu de physique^[6] : Ces inégalités ont une interprétation cinématique assez évidente : si on court, par exemple, deux heures avec une vitesse oscillant entre 7 et 12 kilomètres par heure, on aura sûrement parcouru entre 14 et 24 kilomètres.

Exercice 9 : Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Correction : La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[10000; 10001]$ et dérivable sur son intérieur avec

$$\forall x \in]10000; 10001[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f'(x) < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = 0,005.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\sqrt{10001} - 100 = \sqrt{10001} - \sqrt{10000} < 0,005.$$

Le **théorème (11)** est souvent employé en se contentant de l'hypothèse que f' est bornée sur $[a; b]$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a; b], \quad |f'(x)| \leq M.$$

Ceci donne de l'importance à une certaine classe de fonctions :

Exemple 9 (Fonctions lipschitziennes) : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}_+$ alors f est lipschitzienne de rapport k sur I si :

$$\forall (x; y) \in I^2 / x \neq y, \quad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq k.$$

Or, $\forall (x; y) \in I^2$, tels que $x \neq y$, $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ représente la pente de la corde passant par les points $M(x; f(x))$ et $N(y; f(y))$.

Ainsi, f est lipschitzienne si les pentes de toutes les cordes de $\mathcal{C}_f$ sont bornées.

En gros, pas de trop grandes variations des images pour une variation donnée des antécédents. Les fonctions lipschitziennes ont une croissance somme toute modérée.

Exemples 10 :

- Une fonction constante sur un intervalle I est 0-lipschitzienne sur I .
- Grâce à l'inégalité triangulaire, $f : x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x)$ et donc $|\sin'(x)| \leq 1$.

[6]. Pas trop compliquée

On en déduit que pour tous réels x et y ,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

De la même façon, on montre que $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 1-lipschitziennes.

— Pour tout x, y de $[1; +\infty[$, on a :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

La fonction $\sqrt{}$ est donc $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1; +\infty[$.

Exercice 10 : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Correction : Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq y$, on a :

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x - y} \right| = |x + y|.$$

Il n'existe aucune constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq k$.

À k donné, prendre $x = k$ et $y = 1$ par exemple.

Proposition 12 :

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

f' est bornée sur $]a; b[$ si, et seulement si f est k -lipschitzienne sur $[a; b]$.

Preuve : L'implication directe est donnée par le **théorème (11)**.

Réciproquement, si f est k -lipschitzienne sur un intervalle $[a; b]$, alors tous les taux d'accroissements sont majorés en valeur absolue par k , et donc par passage à la limite, $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq k$.

Exemple 11 : Sur tout voisinage de zéro, la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas bornée donc elle ne peut y être lipschitzienne.

Corollaire 12.1 :

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **segment** est lipschitzienne sur ce segment.

En conséquence, si $f \in \mathcal{C}^1([a; b]; \mathbb{R})$ alors $|f(b) - f(a)| \leq \underbrace{\max_{t \in [a; b]} |f'(t)|}_k \cdot |b - a|$.

Preuve : f' est continue sur le segment, donc elle est bornée. On applique la proposition précédente.

Exercice 11 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. En déduire la nature des suites de terme général :

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \text{ et } T_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \text{ (pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ fixé).}$$

3. Déterminer de même le comportement de : $\left(\sum_{p=2}^n \frac{1}{p \ln p} \right)_{n \geq 2}$.

Correction :

1. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $[x; x+1]$ et dérivable sur $]x; x+1[$ dont la dérivée y est donnée par $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in]x; x+1[, \frac{1}{x+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{x}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}. \quad (\text{XVII.3})$$

2. Sommons les inégalités précédentes pour k variant entre deux entiers non nuls s et t avec $p \leq q$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=s}^t \frac{1}{p+1} &< \sum_{p=s}^t (\ln(p+1) - \ln(p)) < \sum_{p=s}^t \frac{1}{p} \\ \sum_{p=s}^t \frac{1}{p} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{s} &< \ln(t+1) - \ln(s) < \sum_{p=s}^t \frac{1}{p} \\ \ln(t+1) - \ln(s) &< \sum_{p=s}^t \frac{1}{p} < \ln(t+1) - \ln(s) - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Pour $s = 1$ et $t = n$, on obtient :

$$\ln(n+1) < \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}. \quad \text{La suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.$$

Pour $s = n+1$ et $t = kn$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(kn+1) - \ln(n+1) &< \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \ln(kn+1) - \ln(n+1) - \frac{1}{kn+1} + \frac{1}{n+1} \\ \underbrace{\ln\left(k + \frac{1-k}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(k)} &< \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \underbrace{\ln\left(k + \frac{1-k}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(k)} - \underbrace{\frac{1}{kn+1} + \frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}. \end{aligned}$$

La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(k)$ d'après le théorème de comparaison.

3. Pour $x \geq 2$, $\ln(x) > 0$. À partir de (XVII.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in [2; +\infty[, \quad \frac{1}{(x+1)\ln(x)} &< \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 < \frac{1}{x\ln(x)} \\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &< \frac{1}{x\ln(x)} \\ \ln(x+1) - \ln(x) &< \frac{1}{x\ln(x)}. \end{aligned}$$

En sommant pour p variant de 2 à n , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^n (\ln(p+1) - \ln(p)) &< \sum_{p=2}^n \frac{1}{p\ln(p)} \\ \ln(n+1) - \ln(2) &< \sum_{p=2}^n \frac{1}{p\ln(p)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison, la suite $\left(\sum_{p=2}^n \frac{1}{p\ln p}\right)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$.

IV/ Applications

Les constantes de primitivation et de résolution des équations différentielles linéaires sont toutes issues du théorème qui suit, il était temps que nous le démontrions !

IV.1 Caractérisation de la monotonie

Théorème 13 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) :

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$.

f est constante sur I si, et seulement si f' est identiquement nulle sur $\dot{I}$.

Ce théorème, comme on le verra s'étend aux fonctions à valeurs complexes contrairement au suivant intimement lié à la relation d'ordre.

ATTENTION

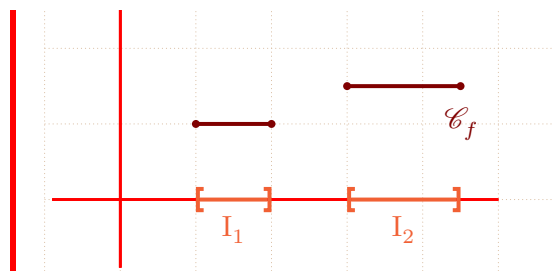


Figure XVII.11 – f est constante sur I_1 et I_2 mais n'est pas constante sur $I = I_1 \cup I_2$.

Preuve : Soit donc $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$.

— Si f est constante sur I , alors pour tout $a \in I$: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ donc $f'(a) = 0$.

— Réciproquement, supposons f' nulle sur I et donnons-nous $x, y \in I$ avec $x < y$.

Comme f est continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$, $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) = 0$ pour un certain $c \in]x; y[$ d'après le théorème des accroissements finis *i.e.*

$$f(x) = f(y).$$

La fonction f est donc constante sur I .

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions monotones dérivables) :

Soient I un intervalle contenant au moins deux points distincts et f une fonction dérivable sur I à valeurs réelles.

1. f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive ou nulle sur $\overset{\circ}{I}$.
2. f est strictement croissante I si, et seulement si f' est positive ou nulle et qu'il n'existe aucun intervalle $[a; b] \subset \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$ sur lequel f' est identiquement nulle.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Toute la puissance et la beauté de ce résultat étant de ramener l'étude des variations d'une fonctions à une simple étude de signes... de sa dérivée.

Remarque : En particulier si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .

Pas de réciproque ! La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée n'y est pas strictement positive et s'annule en 0.

Dans les cas les plus fréquents, l'ensemble des points où la dérivée s'annule sera fini, mais attention à des fonctions comme la partie entière. On peut faire bien pire !

L'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable ici. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Or, la fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^* : f(-1) < f(1)$.

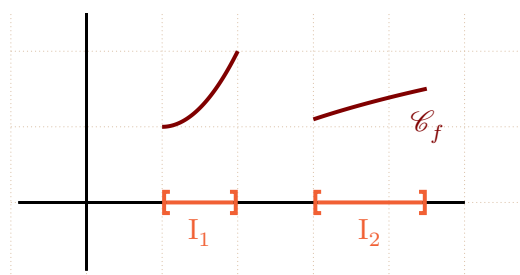


Figure XVII.12 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geq 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$.

ATTENTION

ATTENTION

On lit parfois dans la bibliographie, l'énoncé :

Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors la fonction f est strictement croissante sur I .

Remarquez bien qu'il s'agit ici d'une simple implication au contraire de l'équivalence du théorème ci-dessus.

En effet, il existe des fonctions monotones ayant une dérivée s'annulant en une infinité de points.

Preuve : Soit donc $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$.

(i) La démonstration est identique à celle du **théorème (13)** :

— Si f est croissante I , alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Or, f étant dérivable sur I , $\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$.

Par passage à la limite sur $y \rightarrow x$, on en déduit $f'(x) \geq 0$.

— Réciproquement, supposons f' est positive sur I et donnons-nous $x, y \in I$ avec $x < y$.

Comme f est continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \geq 0$$

pour un certain $c \in]x; y[$ d'après le théorème des accroissements finis. On en déduit immédiatement que

$$f(x) \leq f(y).$$

La fonction f est donc croissante sur I .

(ii) — Supposons d'abord f strictement croissante sur I . D'après 1, f' est positive ou nulle sur I .

Si f' est identiquement nulle sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$, alors f y est constante et $f(a) = f(b)$ puis $a = b$ par stricte monotonie ce qui contredit l'hypothèse initiale.

f' ne peut donc être identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non vide $[a; b]$ de I .

— Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a; b]$ avec $a < b$.

D'après 1, f est croissante sur I . Montrons qu'elle l'est strictement.

Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$.

Si $f(x) = f(y)$ alors, f étant toujours croissante, elle est nécessairement constante sur $[x; y]$ et f' y serait alors identiquement nulle ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On a donc $f(x) < f(y)$ et la stricte croissance de f sur I .

ATTENTION

On peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a .

C'est le cas de $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2}$.

- On peut prolonger continument f par 0 en 0
- Bien sûr, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en revenant au taux d'accroissement de f , on montre aisément que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.
- Pourtant $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}$.
pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f' change donc de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f change de sens de variation régulièrement au voisinage de 0. [7]



Figure XVII.13 – Une fonction dérivable peut avoir une dérivée strictement positive en un point sans être monotone sur un voisinage de celui-ci.

IV.2 Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$

Rien ne permet a priori d'affirmer que les limites $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ sont égales.

Conceptuellement, ces limites sont très différentes. Le théorème ci-dessous donne une réponse affirmative dans le cas où ces limites existent et que la fonction est continue en a .

Théorème 15 (Théorème de la limite de la dérivée) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$ i.e. f est dérivable sur I tout entier et f' est continue en a .
2. Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse a .

[7]. Brièvement la preuve: le terme $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est petit au voisinage de 0 et négligeable devant le terme $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1 . f' prend donc une infinité de fois au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ et change de signe autant de fois sur ces voisinages non réduits à un point. f en fait donc autant avec sa monotonie.

Exemple 12 : La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13 : $\arcsin$ est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont la limite en $x = \pm 1$ est $+\infty$.

On retrouve ainsi que $\arcsin$ n'est pas dérivable en ± 1 et qu'il y a une tangente verticale en ces points pour la courbe.

ATTENTION | Si f' n'a pas de limite en a alors on ne peut rien dire.

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et a qui est éventuellement une borne de I .

On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ ce qui permettra d'appliquer le **théorème (10)**.

Comme $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall X \in I \setminus \{a\}, \quad |X - a| \leq \eta \implies |f'(X) - \ell| \leq \varepsilon.$$

— Soit $x \in]a; a + \eta] \cap I$.

On applique le **théorème (10)** à f sur $[a; x]$: il existe $c_x \in]a; a + \eta[$ tel que :

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Comme $c_x \in]a; a + \eta[\implies |c_x - a| \leq \eta$, on a aussi $|f'(c_x) - \ell| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon$.

— De même, à gauche avec $x \in]a - \eta; a] \cap I$.

On applique encore le **théorème (10)** à f sur $[x; a]$: il existe $c'_x \in]a - \eta; a[$ tel que :

$$f'(c'_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{D'où, } |f'(c'_x) - \ell| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, $\forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| \leq \eta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon$.

Remarque : Cette preuve adaptée au cas où a est une borne de I est plus facile dans le cas où a est intérieur à I . Il est alors inutile de regarder la dérivabilité à droite et à gauche séparément : $x \in]a - \eta; a + \eta] \cap I$ suffit à la preuve.

Dans tous les cas, on a donc, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ i.e. la fonction f est bien dérivable en ℓ et $f'(a) = \ell$.

Remarques :

— La continuité en a est une hypothèse nécessaire.

Exemple 14 : La fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a, de plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ mais f n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$ n'existe pas.

- Le théorème de la limite de la dérivée exprime simplement les conditions d'existence d'un prolongement par continuité de la dérivée en a . *confer* le **corollaire (15.1)**.
- Si a est une extrémité de I , la limite du taux d'accroissement et la dérivabilité éventuelle sont obtenues à droite ou à gauche en a comme dans la preuve.
- Ce résultat est intéressant pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas sans revenir au taux d'accroissement. Par exemple, lorsque l'on prolonge une fonction par continuité et que l'on veut déterminer si le prolongement effectué est dérivable ou non, de classe $\mathcal{C}^1$ ou non.

Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est toutefois rarement plus complexe).

Exemple 15 : Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$.

Cette fonction est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

Par ailleurs, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2x \ln(x) + x$ a certainement aussi une limite nulle en 0.

Le théorème de prolongement de la dérivée permet alors d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$: de classe $\mathcal{C}^1$ donc.

Cette information est essentielle pour tracer une allure précise de la courbe au voisinage de 0.

- Le résultat reste vrai pour $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et f' ayant une limite (finie) $\ell \in \mathbb{C}$ mais est hors-programme.

Exercice 12 : On définit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et, $\forall x \neq 0$, $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de g' .
2. La fonction g' a-t-elle une limite en 0 ?
3. La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Correction :

1. D'après les théorèmes généraux, g est facilement dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- La continuité d'abord : Comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ est borné par 1 sur $\mathbb{R}^*$, d'après le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ = donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
- La dérivabilité ensuite : On étudie le taux d'accroissement de g en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

toujours d'après le théorème d'encadrement.

Donc g est également dérivable en 0 (de nombre dérivé 0) donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction g' est donc définie par : $g'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$

2. Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, la fonction g' n'a pas de limite en 0.
3. D'après la question précédente, la fonction g' est définie en 0 mais n'y est pas continue donc g est seulement dérivable sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 15.1 (Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Ce théorème peut se généraliser à $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\})$ si les dérivées $f^{(j)}$ ($1 \leq j \leq k$) ont toutes une limite finie en a .

V/ Fonctions à valeurs complexes

ATTENTION

Comme on l'a vu, beaucoup de propriétés vraies pour les fonctions à valeurs réelles ne le sont plus pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ notamment :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas un intervalle.
- Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.
- Le théorème de Rolle n'est plus vrai.
- Le théorème des accroissements finis non plus.

Bien triste constat mais cela provient d'une non homogénéité entre la source et le but.

Alors que reste-t-il ?

Théorème 16 (Inégalité des accroissements finis) :

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

S'il existe un réel positif M tel que $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Preuve : On va se ramener au cas réel : Notons θ un argument de $f(b) - f(a)$, de sorte que $e^{-i\theta}(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|$.

On pose $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ en tant que partie réelle d'une

$$x \mapsto \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(x))$$

fonction qui l'est et pour $x \in]a; b[$,

$$|g'(x)| = |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f'(x))| \leq |e^{-i\theta} f'(x)| = |f'(x)| \leq M.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis réelle, g est M -lipschitzienne sur $[a ; b]$.

Ainsi $|g(b) - g(a)| \leq M|b - a|$.

Or, $|g(b) - g(a)| = \left| \operatorname{Re} \left(\underbrace{e^{-i\theta}(f(b) - f(a))}_{\in \mathbb{R}} \right) \right| = |e^{-i\theta}(f(b) - f(a))|$
 $= |e^{-i\theta}| |f(b) - f(a)| = |f(b) - f(a)|$

Ainsi, on a bien $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Exemple 16 : La fonction $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne.

En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|e^{ia} - e^{ib}| \leq |a - b|$.

La notion de fonctions monotones pour des fonctions à valeurs complexes n'a aucun sens mais on peut, cependant, caractériser les fonctions constantes :

Théorème 17 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) :

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{C})$.

f est constante sur I si, et seulement si f' est identiquement nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Preuve : Si f est constante, son taux d'accroissement en tout point de I est nul, et donc f' est nulle sur I .

Réciproquement, si f a une dérivée nulle sur I , alors f est 0-lipschitzienne sur I de sorte que $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in I$ i.e. f est constante sur I .

Pour résumer ce qui est vrai ou non pour une fonction à valeurs complexes :

À retenir 1 :

Ce qu'on garde	Ce qu'on ne garde pas
Une fonction continue sur un segment $[a ; b]$ est bornée au sens que $ f $ l'est	Le théorème des valeurs intermédiaires
Dérivabilité $\implies$ Continuité	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Inégalité des accroissements finis	Théorème des accroissements finis
Dérivée bornée $\implies f$ lipschitzienne	Annulation de la dérivée aux extrema locaux
Dérivée nulle sur un intervalle I $\implies f$ constante sur I	Lien monotonie et signe de la dérivée
	Théorème de prolongement de la dérivée et prolongement $\mathcal{C}^1$

Exercice 13 : Étudier la dérivabilité et donner la fonction dérivée des fonctions à valeurs complexes $\varphi : t \mapsto e^{e^{it}}$ et $\psi : t \mapsto e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}$.

Correction :

1. La fonction $t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ l'est également d'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = i e^{it} e^{e^{it}} = i e^{it + e^{it}}.$$

2. De même, ψ est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et on a :

$$\forall t \in] -1 ; 1[\quad \psi'(t) = \frac{-1 + i}{\sqrt{1 - t^2}} e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}.$$

Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

I/ Dérivabilité et calculs de dérivées

Exercice 1 : Déterminer :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Correction :

1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

2. Tant que l'on ne connaît pas encore les développements limités, cette limite est un peu sophistiquée. On effectue un changement de variable pour se ramener à une limite connue en posant $\theta = \arccos(x)$ i.e. $x = \cos(\theta)$ et on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \theta(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \arccos(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \sin(\theta) > 0}} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1.$$

Exercice 2 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

$$1. x \mapsto \sqrt{x}.$$

$$2. x \mapsto \exp(x).$$

$$3. x \mapsto \cos(x).$$

Correction : La dérivabilité étant une notion locale, il suffit de regarder la dérivabilité de f en un point a quelconque de I pour pouvoir conclure à la dérivabilité sur I tout entier.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

$$\text{Alors, } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier et

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Soit $f : x \mapsto \exp(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Alors, } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \exp(a) \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \\
 &= \exp(a).
 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \exp(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto \exp(x).$$

3. Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Alors, } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \cos(a) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} - \sin(a) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \\
 &= -\sin(a).
 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = -\sin(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto -\sin(x).$$

Exercice 3 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $x \mapsto \sin(x) $	4. $x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$	7. $x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$
2. $x \mapsto x ^3$	5. $x \mapsto 2 - (x-2) x-2 $	
3. $x \mapsto [x]$	6. $x \mapsto 5-7x+2x^2 $	

Correction :

1. D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \mapsto |\sin(x)|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|\sin(x)| - |\sin(0)|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{\sin(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Elle n'est donc pas dérivable en 0.

2. D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \mapsto |x|^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|^3 - |0|^3}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{x^3}{x} = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{x}.$$

La fonction $x \mapsto |x|^3$ est donc dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. La fonction $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$ donc elle ne peut y être dérivable. Constante, elle l'est sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n; n+1[$.
4. D'après les théorèmes généraux, $x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{1-x^2} = 0$ donc elle est dérivable sur $] -1; 1[$. Elle n'est pas dérivable en -1 .

5. Le même raisonnement montre que $x \mapsto 2 - (x-2)|x-2|$ est dérivable sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ puis

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - (x-2)|x-2| - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0.$$

La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

6. $x \mapsto 5 - 7x + 2x^2 = (x-1)(2x-5)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si $x \in] -\infty; 1[\cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$. La fonction $x \mapsto |5 - 7x + 2x^2|$ est donc dérivable sur $] -\infty; 1[\cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ et on ne peut pas prolonger la dérivabilité.
7. — La fonction $x \mapsto x^3 \arcsin(x)$ est dérivable sur $] -1; 1[$ par produit, positive sur $[-1; 1]$ et nulle seulement en 0.

Cette fonction est donc dérivable sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$ à valeurs DANS $\mathbb{R}_+$.

La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$ SEULEMENT, $x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ est dérivable sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$ par composition.

- Ce raisonnement ne nous apprend rien sur la fonction $x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ en 0 car nos théorèmes d'opérations sur la dérivabilité nous parlent de dérivabilité mais pas de NON-dérivabilité.

De fait, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ est quand même dérivable en 0 car :

$$\frac{\sqrt{x^3 \arcsin(x)} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^4}}{x} \times \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{x}} = x \sqrt{\frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \times \sqrt{\arcsin'(0)} = 0.$$

On pourrait montrer en revanche que $x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$ n'est pas dérivable en -1 et 1 .

Exercice 4 (Quelques inégalités) : Montrer que :

- $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$
- $\forall \theta, \phi \in \mathbb{R}, |e^{i\theta} - e^{i\phi}| \leq |\theta - \phi|.$

Correction :

1. La méthode la plus jolie reste d'invoquer la concavité de la fonction $\sin$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puisqu'elle y est deux fois dérivable et que sa dérivée $-\sin$ y est négative. Sa courbe est donc au-dessous de sa tangente en 0 qui est $y = x$ et au-dessus de la sécante en 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'équation $y = \frac{\pi}{2}x$, ce qui donne :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

De même, la fonction $\tan$ dont la dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ est croissante comme somme de fonctions croissantes est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x$ ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \leq \tan(x).$$

2. Pour tout x réel, $\cos(x) \leq 1$, donc montrer $|\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}$ revient à montrer que $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$. D'après la croissance de l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \sin(t) dt \leq \int_0^x t dt \implies 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

La relation étant paire, elle s'étend à tout $x \in \mathbb{R}_-$.

En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}$.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, La fonction $t \mapsto \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ est continue et décroissante sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n; n+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

et, par croissance de l'intégrale sur $[n; n+1]$:

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt &\leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \int_n^{n+1} dt \\ \left[-\frac{1}{t^\alpha} \right]_n^{n+1} &\leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} &\leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

4. La fonction $t \mapsto e^{it}$ à valeurs complexes est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle $[\theta; \phi]$ (en supposant $\theta < \phi$) et dérivable sur $] \theta; \phi[$.

Comme, $\forall t \in [\theta; \phi]$, $|(e^{it})'| = |i e^{it}| \leq 1$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall \theta, \phi \in \mathbb{R}, |e^{i\theta} - e^{i\phi}| \leq |\theta - \phi|.$$

Exercice 5 : Après avoir rapidement précisé le domaine de dérivabilité, donner l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$

2. $x \mapsto (1+x)\sqrt{1+x}$

3. $x \mapsto x^2\sqrt{x}$

4. $x \mapsto x^2 \cos(x) \sin(x)$

5. $x \mapsto (x + \sin(x))^4$

6. $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

7. $x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}$

8. $x \mapsto \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$

9. $x \mapsto \frac{2x^3 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$

10. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$

11. $x \mapsto \frac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$

12. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$

13. $x \mapsto \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$

14. $x \mapsto \frac{(\ln x)^4}{x}$

15. $x \mapsto \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$

16. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$

17. $x \mapsto \frac{3\pi}{\tan(5x)}$

18. $x \mapsto \frac{5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

19. $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

20. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x}$

21. $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

22. $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

23. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 6x - 1}$

24. $x \mapsto \sqrt{\sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}$

25. $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

26. $x \mapsto \ln \sqrt{1+x^2}$

27. $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

28. $x \mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

29. $x \mapsto \ln|7-2x|$

30. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

31. $x \mapsto x^x$

32. $x \mapsto x^{x^2}$

33. $x \mapsto x^{x^x}$

34. $x \mapsto (1+x^4)^{1-2x}$

35. $x \mapsto \pi^{x^2-1}$

36. $x \mapsto \cos(\ln(1+\sqrt{x}))$

37. $x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$

38. $x \mapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$

39. $x \mapsto (1+x)\sqrt{1+x}$

40. $x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

41. $x \mapsto \tan^3(x)$

Correction :

1. $x \mapsto 4(3x^2 + 1)(x^3 + x - 2)^3$
2. $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$
3. $x \mapsto \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
4. $x \mapsto 2x \cos(x) \sin(x) - x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x$
5. $x \mapsto 4(1 + \cos(x))(x + \sin(x))^3$
6. $x \mapsto -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
7. $x \mapsto \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$
8. $x \mapsto \frac{(x+1)^2(5x-1)}{2x\sqrt{x}}$
9. $x \mapsto \frac{2x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
10. $x \mapsto -\frac{2(x+\sqrt{x})\sin(x) + \cos(x)}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$
11. $x \mapsto \frac{2 + \sin(x) - 2(x-2)\cos(x)}{2(2 + \sin(x))^2\sqrt{x-2}}$
12. $x \mapsto -\frac{1}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$
13. $x \mapsto \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$
14. $x \mapsto \frac{(4 - \ln x)(\ln x)^3}{x^2}$
15. $x \mapsto \frac{(x^4 - 2x^3 - 1)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2 - 1)^2}$
16. $x \mapsto \frac{-\sin^2 x - 4\sin(x) - 1}{2(\sin(x) + 2)\sqrt{\sin(x) + 2}}$
17. $x \mapsto \frac{-15\pi(1 + \tan^2 5x)}{\tan^2 5x}$
18. $x \mapsto -\frac{5}{2} \frac{\tan^2 5x}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}$
19. $x \mapsto \frac{2 + \sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}$
20. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x^2}$
21. $x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
22. $x \mapsto \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
23. $x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$
24. $x \mapsto \frac{-x \cos\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}{(2+x^2)^2 \sqrt{\sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}}$
25. $x \mapsto \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$
26. $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$
27. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
28. $x \mapsto \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}$
29. $x \mapsto \frac{-2}{7-2x}$
30. $x \mapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
31. $x \mapsto (1 + \ln x)x^x$
32. $x \mapsto (1 + 2 \ln x)x^{1+x^2}$
33. $x \mapsto (\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})x^{x^x+x}$
34. $x \mapsto \left(-2 \ln(x^4 + 1) + \frac{4(1-2x)x^3}{x^4 + 1}\right) (1+x^4)^{1-2x}$
35. $x \mapsto 2x \ln(\pi) \pi^{x^2-1}$
36. $x \mapsto \frac{-\sin(\ln(1+\sqrt{x}))}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$
37. $x \mapsto \frac{-2}{x(x+2)} \cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
38. $x \mapsto -4 \cos(x) \sin(x)$
39. $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{1+x}$
40. $x \mapsto \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
41. $x \mapsto 3 \tan^2(x)(1 + \tan^2 x)$

Exercice 6 :

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. Il est connu que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \sin(t) \leq t$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient alors successivement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \sin(t) dt \leq \int_0^x t dt \implies 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Puis,

$$\int_0^x \cos(t) dt \geq \int_0^x 1 - \frac{t^2}{2} dt \implies \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

2. D'après les théorèmes généraux et de croissances comparées en 0, la fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Le taux d'accroissement de f dans un voisinage de 0 privé de celui-ci, s'écrit $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$.

Or, d'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{6} \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq 0$.

D'après le théorème d'encadrement, f est donc dérivable en 0 par valeurs supérieures de nombre dérivé 0.

Si $x \in \mathbb{R}_-$, alors $-x \in \mathbb{R}_+$ et on a encore $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin(-x) + x}{x^2} \leq 0 \iff 0 \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq \frac{x}{6}$.

Le même raisonnement entraîne que f est également dérivable en 0 par valeurs inférieures de même nombre dérivé donc elle l'est en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 7 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue mais n'est pas dérivable en 1 et en donner une interprétation géométrique.

Correction :

1. D'après les théorèmes généraux, f est déjà continue et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x+1} = 1$, f n'est continue en 0 que si, et seulement si $b = 1$.

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé $\frac{1}{2}$. La fonction f sera donc dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1 =$.

2. D'après le même raisonnement que précédemment en 1, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $a + b + 1 = 1$ et $2a + b = \frac{1}{2}$ i.e. $a = -b = \frac{1}{2}$.
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -2x = -2 \neq -1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -\frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x)$.

Donc f n'est pas dérivable en 0. Sa courbe admet deux demi-tangentes à gauche et à droite respectivement de coefficient directeur -2 et -1 .

II/ Dérivées $n^{\text{èmes}}$ _____

Exercice 8 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Déterminer une formule analogue pour $\cos^{(n)}$.
3. En déduire les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de :

(a) $s_1 : x \mapsto \sin(2x)$

(b) $s_2 : x \mapsto \cos^3(x)$

4. Soit $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^{n-1} \ln(x)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

6. Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .

Aide : On pourra chercher une relation entre f et f' .

Exercice 9 : $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

1. $\phi_1 : x \mapsto xf(x)$

3. $\phi_3 : x \mapsto x^3 f(x)$

2. $\phi_2 : x \mapsto x^2 f(x)$

4. $\psi : x \mapsto \frac{1}{x} f(x)$

Exercice 10 : On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P_n est une fonction polynomiale.
3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = 0$. On dit que la fonction f est *plate* en 0.

III/ Prolongements

Exercice 11 : Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$: $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ? L'éventuel prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Correction : Une simple étude de limite montre que $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont prolongeables par continuité en 0 en posant 0 comme valeur en ce point.

La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'ayant pas de limite en 0 ne l'est pas.

Les théorèmes généraux et l'étude des taux d'accroissement en 0 ou le théorème de la limite de la dérivée puis du prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ montrent également que les prolongements des fonctions $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont dérivables et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en s'aidant des théorèmes de croissances comparées pour la dernière.

La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dont le taux d'accroissement en 0 n'a pas de limite en 0 n'y est pas dérivable.

Enfin, seule le prolongement de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après l'exercice (10).

Exercice 12 :

1. Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

- (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.
- (b) Étudier la dérivabilité en 0 et en 1 de ce prolongement.

2. Mêmes questions avec $g :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

3. Soit $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x|x|$.

- (a) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1[$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in] -1; 1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[-1; 1]$.
4. En déduire :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{x+1}.$$

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0 .

1. Montrer que le rapport $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, et calculer cette limite.
2. Étudier la réciproque.

Correction : Il suffit de couper en passant par $f(x_0)$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \right) \rightarrow \frac{f'(x_0) + f'(x_0)}{2}.$$

La réciproque est clairement fausse. Il suffit de prendre $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

Exercice 15 : Justifier que $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.
2. La fonction f^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

IV/ Rolle et TAF _____

Exercice 16 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|.$
2. $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$

Correction :

1. On rappelle que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\arctan$ entre x et y donne alors le résultat.

2. On appelle cette fois le théorème (et non l'inégalité!) des accroissements finis à e^x entre 0 et x . Il existe donc $c \in]0; x[$ tel que

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^c(x - 0) = e^c x.$$

Puisque $1 \leq e^c \leq e^x$ et $x \geq 0$, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 17 : Soit f dérivable sur $[a, b]$ avec $|f'| \leq k$. On suppose $f(a)$ et $f(b)$ connus.

Représenter la région où se trouve $\mathcal{C}_f$ sur $[a, b]$.

Exercice 18 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ ($a < b$).

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

Exercice 19 : Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a; b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a; b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d; 0)$.

Correction : L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente passe par le point $(d, 0)$ si, et seulement si

$$f'(x_0)(x_0 - d) - f(x_0) = 0.$$

On va chercher une fonction dont la dérivée va être presque de la forme précédente, et on va montrer par le théorème de Rolle que la dérivée de cette fonction s'annule.

Pour cela, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x-d}$ définie et continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-d) - f(x)}{(x-d)^2}.$$

De plus, $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, on peut trouver $x_0 \in]a; b[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Pour ce x_0 , la relation

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - d}$$

est donc vérifiée, et la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ passe par $(d; 0)$.

Exercice 20 : Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a; b]$, et que f est n -fois dérivable sur $]a; b[$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a; b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Correction :

1. Soit $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ des points distincts de I sur lesquels f s'annule.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f est continue sur $[a_k; a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k; a_{k+1}[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]a_k; a_{k+1}[$ tel que $f'(c_k) = 0$.

Enfin, puisque $a_1 < c_1 < a_2 < \dots < a_n < c_n < a_{n+1}$, les n valeurs c_k , $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont deux à deux disjointes, ce qui permet de conclure.

2. On montre par récurrence sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $]a; b[$.

On a $\mathcal{P}(1)$ vraie d'après la question précédente.

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $[a; b]$, disons en $r_1 < \dots < r_{n+1-k}$.

Pour $i \in \llbracket 1; n - k \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue sur $[r_i; r_{i+1}]$, dérivable sur $]r_i; r_{i+1}[$ (car f est n -fois dérivable sur $[a; b]$) et $f^{(k)}(r_i) = f^{(k)}(r_{i+1}) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe $s_i \in]r_i; r_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(s_i) = 0$.

Comme $a < s_1 < r_1 < \dots < s_{n-k} < b$, on a montré que $f^{(k+1)}$ s'annule au moins $n - k$ fois sur $]a; b[$, ainsi $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

En conclusion $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie et en particulier, $\mathcal{P}(n)$ i.e. $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois en $c \in]a; b[$ avec $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 21 (Taylor-Lagrange) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel.

Soit f une fonction élément de $C^n([a; b], \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a; b[, \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction : On a déjà $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Puisque $a \neq b$, on peut choisir A tel que $g(a) = 0$ (à savoir $A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} (f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k)$).

Avec les hypothèses faites sur f , g est d'autre part continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Le théorème de ROLLE permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour $x \in]a; b[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + A \frac{(b-x)^n}{n!} = -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{(b-c)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(c)) = 0$, et donc, puisque $c \neq b$, tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.

L'égalité $g(a) = 0$ s'écrit alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

pour un certain réel c de $]a; b[$.

Exercice 22 (*) Formule des trapèzes) :** Soit $f \in C^2([a; b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a; b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - f^{(3)}(c).$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a; b]$ et deux fois dérivable sur $]a; b[$? Interprétez géométriquement.

Correction : Pour $x \in [a; b]$, posons $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b) = g(a) = 0$ (c'est-à-dire $A = \frac{1}{(b-a)^3} (f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2} (f'(b) + f'(a)))$).

$f \in C^2([a; b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a; b[, \mathbb{R})$ et donc $g \in C^1([a; b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a; b[, \mathbb{R})$.

Pour $x \in [a; b]$, on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} (f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2} f''(x) - 3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x) = \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{2} f''(x) - \frac{x-a}{2} f^{(3)}(x) - 6A(x-a) = \frac{x-a}{2} (-12A - f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et vérifie de plus $g(a) = g(b)$.

Donc, d'après le théorème de ROLLE, il existe $d \in]a; b[$ tel que $g'(d) = 0$.

De même, g' est continue sur $[a, d] \subset [a; b]$, dérivable sur $]a, d[(\neq \emptyset)$ et vérifie de plus $g'(a) = g'(d) (= 0)$.

D'après le théorème de ROLLE, il existe $c \in]a, d[\subset]a; b[$ tel que $g''(c) = 0$ ou encore tel que $A = -\frac{1}{12} f^{(3)}(c)$ (puisque $c \neq a$).

En écrivant explicitement l'égalité $g(b) = 0$, on a montré que :

$$\exists c \in]a; b[/ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f \in C^1([a; b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a; b[, \mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a; b]$, la formule précédente s'écrit :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = \frac{b-a}{2}(F'(b) + F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Donc, si $f \in C^1([a; b], \mathbb{R}) \cap D^2(]a; b[, \mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a; b[/ \int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique : Si f est positive, $A_1 = \int_a^b f(t) dt$ est l'aire du domaine

$$D = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ et } A_2 = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) \text{ est l'aire du trapèze}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}.$$

Si $M_2 = \sup\{|f''(x)|, x \in [a; b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|A_1 - A_2| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Exercice 23 (*I Polynômes de Legendre) :** Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
- En étudiant le polynôme $A_n = (X^2 - 1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $] -1; 1[$.

Correction :

- $(X^2 - 1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n - n = n$. Puis, $\text{dom}(L_n) = \text{dom}((X^{2n})^{(n)}) = \frac{(2n)!}{n!}$.
- 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n - k$ de $A_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0, \dots, n\}$.

Montrons par récurrence sur k que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $] -1; 1[$.

Pour $k = 1$, A_n est continu sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$.

De plus, $A_n(0) = A_n(1) = 0$ et d'après le théorème de ROLLE, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Soit k élément de $\{1, \dots, n - 1\}$.

Supposons que $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $] -1; 1[$. $A_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k \leq n - 1$ et donc s'annule en $k + 2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1; 1]$.

D'après le théorème de ROLLE, $A_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $] -1; 1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).

On a montré que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $] -1; 1[$.

En particulier, $A_n^{(n)} = L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $] -1; 1[$.

Puisque L_n est de degré n , on a trouvé toutes les racines de L_n , toutes réelles, simples et dans $] -1; 1[$.

Exercice 24 : Montrer que pour tout réel strictement positif x , on a : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction : Montrons que $(\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1})$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} &\Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(x+1) - \ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Soit x un réel strictement positif fixé.

Pour $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c \in]x, x+1[\quad \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Dérivabilité

1. Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Montrer que la composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et donner son nombre dérivé en a .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a) \in J = f(I)$ et soit $x \in I \setminus \{a\}$.

Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement

En a pour f : $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

En $A = f(a)$ pour g : $g(x) = g(A) + (x - A)g'(A) + (x - A)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} 0$.

On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(A) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $A = f(a)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underbrace{f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)}_{X_a}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$,

$$= g(A) + (X_a - A)g'(A) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a).$$

Or, $X_a - A = (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$,

$$\begin{aligned} &= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)g'(A)\varepsilon_1(x) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a). \\ &= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)\left(\underbrace{g'(A)\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(X_a)}_{\varepsilon_3(x)}\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$, par continuité de ε_2 en A , $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(X_a) = 0$, puis $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$.

$$\text{Donc, } (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + (x - a)\varepsilon_3(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Par conséquent, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x)}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(1 + x)} = 1.$$

3. Retrouver la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ et préciser son domaine de dérivabilité.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \cos(a) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h} \rightarrow 0}_{h \rightarrow 0} - \sin(a) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h} \rightarrow 1}_{h \rightarrow 0} \\ &= -\sin(a). \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = -\sin(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto -\sin(x).$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto |x|^3$ sur son ensemble de définition.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \mapsto |x|^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|^3 - |0|^3}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{x^3}{x} = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^3}{x}.$$

La fonction g est donc dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Exceptionnellement sans préciser le domaine de dérivabilité, donner la dérivée factorisée et simplifiée des fonctions suivantes :

(a) $\varphi : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}.$

(b) $\psi : x \mapsto x^{\sqrt{x}}.$

(a) $\varphi' : x \mapsto -\frac{1}{(\sin(x) - \cos(x))^2}.$

(b) $\psi' : x \mapsto \frac{\ln(x) + 2}{\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}.$

Dérivabilité

1. Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Montrer que la composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et donner son nombre dérivé en a .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a) \in J = f(I)$ et soit $x \in I \setminus \{a\}$.

Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement

En a pour f : $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

En $A = f(a)$ pour g : $g(x) = g(A) + (x - A)g'(A) + (x - A)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} 0$.

On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(A) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $A = f(a)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underbrace{f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x)}_{X_a}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$,

$$= g(A) + (X_a - A)g'(A) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a).$$

Or, $X_a - A = (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$,

$$= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)g'(A)\varepsilon_1(x) + (X_a - A)\varepsilon_2(X_a).$$

$$= (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(A) + (x - a)\left(\underbrace{g'(A)\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(X_a)}_{\varepsilon_3(x)}\right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} X_a = A$, par continuité de ε_2 en A , $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(X_a) = 0$, puis $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Donc, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + (x - a)\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0$.

Par conséquent, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

2. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Tant que l'on ne connaît pas encore les développements limités, cette limite est un peu sophistiquée. On effectue un changement de variable pour se ramener à une limite connue en posant $\theta = \arccos(x)$ i.e. $x = \cos(\theta)$ et on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \theta(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \arccos(x) = 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \sin(\theta) > 0}} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1.$$

3. Retrouver la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto \exp(x)$ et préciser son domaine de dérivabilité.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Soit $f : x \mapsto \exp(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \exp(a) \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \\ &= \exp(a). \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \exp(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \mapsto \exp(x).$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto |\sin(x)|$ sur son ensemble de définition.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \mapsto |\sin(x)|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|\sin(x)| - |\sin(0)|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{\sin(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Elle n'est donc pas dérivable en 0.

5. Exceptionnellement sans préciser le domaine de dérivabilité, donner la dérivée simplifiée et factorisée des fonctions suivantes :

(a) $\varphi : x \mapsto \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right).$

(b) $\psi : x \mapsto x^{x^2}.$

(a) $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{x^2} \tan \left(\frac{1}{x} \right).$

(b) $\psi' : x \mapsto x (2 \ln(x) + 1) x^{x^2}.$

Systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Opérations élémentaires

- Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.
- Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite.

2. Systèmes linéaires

- Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.
- Système compatible. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .
- Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. *Toute technicité est exclue*

3. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Questions de cours possibles ^[8] :

1. Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice diagonale.
2. L'ensemble des solutions d'un système homogène est non vide et stable par combinaisons linéaires.
3. L'ensemble des solutions d'un système compatible et la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.
4. Savoir expliquer et appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan.
5. Savoir prouver l'inversibilité ou non d'une matrice quelconque à l'aide de la résolution d'un système ET par les opérations élémentaires appliquées à la matrice identité.

[8]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire, un chapitre plus orienté calcul. Il s'agit voir le lien entre les matrices et les systèmes d'équations linéaires, pour lesquels nous verrons une méthode de résolution systématique.

CONTENU

I	Systèmes linéaires et matrices.	1119
I.1	Écriture matricielle d'un système linéaire.	1119
I.2	Systèmes équivalents et opérations élémentaires.	1121
I.3	Systèmes échelonnés.	1125
II	Résolution pratique.	1129
II.1	Algorithme de Gauss.	1129
II.2	Point de vue matriciel.	1134
II.3	Opérations élémentaires et matrices inversibles.	1136
III	Ensemble des solutions.	1138
III.1	Linéarité et conséquences.	1138
III.2	Rang d'un système linéaire.	1140
IV	Systèmes linéaires et matrices inversibles.	1145
IV.1	Systèmes de Cramer.	1145
IV.2	Inversibilité.	1146
	Feuille d'exercices n° 19 : Systèmes linéaires.	1152
	Test n° 23 : Dérivabilité et Systèmes linéaires.	1163
	Test n° 24 : Systèmes linéaires.	1166
	Devoir en temps libre n° 18 : Quelques encadrements et un système.	1168
	Correction.	1169
	Programme de Khôlle des semaines 17 et 18.	1173
	Programme du chapitre XIX.	1174

I/ Systèmes linéaires et matrices

I.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1 (Système linéaire) : On appelle système linéaire à m équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}),$ le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$AX = B. \quad (\mathcal{S})$$

Un système linéaire n'est donc qu'une grosse équation de la forme $ax = b$ que nous connaissons bien. Dans $\mathbb{R}^{[1]}$, il suffit de multiplier les deux membres par l'inverse de a noté $a^{-1} = \frac{1}{a}$ et le tour est joué : $x = a^{-1}b$.

Si la résolution d'un système linéaire sera intimement lié à l'existence d'une matrice inversible, nous allons présenter une manière algorithmique de résolution : le pivot de Gauss et montrer le lien avec la recherche de l'inverse de la matrice du système.

Remarques et Vocabulaire :

- La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite *augmentée*,

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right).$$

- On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ i.e. on confond usuellement le vecteur ligne d'inconnues

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ avec la colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemples 1 :

- Le système 2×2 , $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Et le système 3×2 :

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \\ -5x + 6y = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[1]. qui est un corps i.e. tout élément non nul est inversible.

Définition 2 : On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est *homogène* si $B = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- *Résoudre* le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $AX = B$. Le système est alors dit *compatible* dans ce cas, *incompatible* sinon.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.
- $\emptyset$ est un ensemble solution tout à fait acceptable.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y + z = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ sont équivalents.
- $(1; 0; 1)$, $(-1; -1; 1)$ et, plus généralement $(1 + 2t; t; 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$ admet tout couple de réels $(x; y)$ comme solution.
- $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -6x + 10y = 1 \end{cases}$ est incompatible.
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ admet $(3; 1; 0)$ comme unique solution. La matrice associée à ce système est l'identité.

I.2 Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$\bullet L_{i,j,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$$\bullet H_{i,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

$$\bullet T_{i,j,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A .

On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.

— Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ .

On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.

— Multiplier A par $T_{i,j,n}(\lambda)$ à gauche revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ ligne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ cette opération.

Preuve : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $s \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$.

— Par définition de $L_{i,j,n}$, pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$:

$$(L_{i,j,n})_{rk} = 0 \text{ si } r \neq k \text{ et } r \neq i \text{ et } r \neq j \quad (\text{XVIII.1})$$

$$(L_{i,j,n})_{rr} = \begin{cases} 0 & \text{si } r = i \text{ ou } r = j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{XVIII.2})$$

$$(L_{i,j,n})_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{XVIII.3})$$

$$(L_{i,j,n})_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{XVIII.4})$$

Par définition du produit matriciel, on a :

$$(L_{i,j,n}A)_{rs} = \sum_{k=1}^n (L_{i,j,n})_{rk} (A)_{ks}$$

$$\stackrel{\text{d'après (XVIII.1)}}{=} \begin{cases} (L_{i,j,n})_{rr} (A)_{rs} & \text{d'après (XVIII.2)} \\ (L_{i,j,n})_{ir} (A)_{rs} & \text{d'après (XVIII.3)} \\ (L_{i,j,n})_{jr} (A)_{rs} & \text{d'après (XVIII.4)} \end{cases} \begin{cases} (A)_{rs} & \text{si } r \neq i \text{ et } r \neq j \\ \begin{cases} (A)_{js} & \text{si } s = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \begin{cases} (A)_{is} & \text{si } s = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Les lignes de A ont donc été conservées pour la plupart. Seules, la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ ont été permutées.

— Le calcul est identique pour les deux autres matrices.

Vocabulaire :

- Les matrices $L_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de permutation*.
- Les matrices $H_{i,n}$ s'appellent des *matrices de dilatation*.
- Les matrices $T_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de transvection*.

De même à droite avec les colonnes :

Proposition 2 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Multiplier A par $L_{i,j,p}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A .

On note $C_i \leftrightarrow C_j$ cette opération.

— Multiplier A par $H_{i,p}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ .

On note $C_i \leftarrow \lambda C_i$ cette opération.

— Multiplier A par $T_{i,j,p}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

On note $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ cette opération.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) : On appelle *opérations élémentaires* sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation ($\lambda \neq 0$) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, multiplier la ligne i par λ .

Transvection : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et, par extension, $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$, remplacer la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j .

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_L (\mathcal{S}), \quad \tilde{A} \sim_L \tilde{A}' \quad \text{ou} \quad A \sim_L A'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Preuve :

1. Il suffit de remarquer que :

— $(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = (L_i \leftrightarrow L_j)$. En particulier, les permutations sont involutives.

— Si $\lambda \neq 0$, $(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = \left(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i \right)$.

— $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = (L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j)$.

2. Simple conséquence de la bijectivité des opérations élémentaires : les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire, car on peut toujours les défaire.

D'un point de vue matriciel,

Corollaire 3.1 :

Les matrices de permutation et de transvection ainsi que celles de dilatation pour $\lambda \neq 0$ sont inversibles.

Preuve : Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

D'après la démonstration précédente, on a facilement :

- $L_{i,j,n}^{-1} = L_{i,j,n}$. En particulier, les permutations sont involutives.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, T_{i,n}(\lambda)^{-1} = T_{i,n}(-\lambda)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $H_{i,n}(\lambda)^{-1} = H_{i,n}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

Méthode 1 (Travailler sur la matrice du système) :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{M} \sim_O \tilde{M}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.
- Dans le cas des systèmes homogènes, il suffit de travailler sur la matrice A au lieu de la matrice augmentée $\tilde{A} = (A \mid 0)$ car les opérations élémentaires laissent la colonne du second membre invariante à 0.

Exemple 3 : Résolution d'un système linéaire à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_3) : \quad \begin{cases} x + 3y - z &= -6 \\ 2x + 5y + z &= 4 \\ 3x &+ 2z = 16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z &= -6 \\ -y + 3z &= 16 \\ -9y + 5z &= 34 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z &= -6 \\ -y + 3z &= 16 \\ -22z &= -110 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z &= -6 \\ -y + 3z &= 16 \\ z &= 5 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

On dit qu'on a *échelonné* le système (disposition en escalier). Ce dernier système est très facile à résoudre, et le **théorème (3)** permet d'affirmer qu'il a le même ensemble de solutions que $(\mathcal{S}_3)$.

Exemple 4 : On peut choisir de travailler en matrice augmentée.

Pour le système de l'exemple (3), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 5 & 34 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
 &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \\
 &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3
 \end{aligned}$$

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée par lignes*.

I.3 Systèmes échelonnés

L'idée : Si la matrice du système est diagonale *i.e.* si le système linéaire associé s'écrit :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \alpha_1 x_1 & = b_1 \\ & \alpha_2 x_2 & = b_2 \\ & & \ddots \\ & & \alpha_n x_n & = b_n \end{cases}$$

i.e. si le système est dit *échelonné réduit*, il est facile de le résoudre.

En effet, ici, on aura très facilement et à l'unique condition que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_i \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Plus précisément,

Proposition 4 :

Un système diagonal $(\alpha_i x_i = b_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est compatible si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_i = 0 \implies b_i = 0.$$

Sous ces conditions, il se résout en divisant par α_i le cas échéant.

ATTENTION

Si la diagonale comporte un ou des coefficients nuls alors cela n'entraîne pas qu'il n'y a pas de solutions mais plutôt une infinité en cas de compatibilité.

Définition 4 (Système triangulaire supérieur) : Un système $(\mathcal{S})$ est dit *triangulaire* supérieur si sa matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure :

$$\forall ij \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Méthode 2 (Résoudre un système triangulaire par remontée) :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
- ...
3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
4. Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i -ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.
5. On finit par traiter une 1^{ère} ligne de la forme $\tilde{L}_1 : a_{1,1}x_1 = \tilde{b}_1$.

Exemple 5 : Reprenons le système de l'exemple (3) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_3) : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{array} \right. & \iff & \left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y & = & -1 \\ -y & = & 1 \\ z & = & 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ -y & = & 1 \\ z & = & 5 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3) = \{ (2; -1; 5) \}. \end{aligned}$$

Exemple 6 : À partir de la matrice augmentée de l'exemple (4), on obtient également :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow -L_2 \end{aligned}$$

Cette matrice correspond au système diagonal $\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5 \end{cases}$ dont l'ensemble des solutions est transparent !

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée réduite par lignes*.

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 5 \\ -3x_3 = 6 \end{cases}$

Correction :

1. $\mathcal{S} = \{(-37; 8; 2)\}$.

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 4x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$

Donc, $\mathcal{S} = \{(7 - 4t; t; -2), t \in \mathbb{R}\}$: la droite passant par $(7; 0; -2)$ et de vecteur directeur $(-4; 1; 0)$.

3. $\mathcal{S} = \emptyset$. Le système est incompatible.

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) : — Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle *pivot* d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.

— On dit que (S) est *échelonné par lignes* lorsque :

1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.

— Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est

- *principale* si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;
- *secondaire* sinon.

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

$$1. \begin{cases} \textcircled{1}x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & \textcircled{-1}y & +2z & & = & 3 \\ & & & \textcircled{5}t & = & 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \textcircled{5}x + y + 2t - u & = & -2 \\ & \textcircled{2}u & = & 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \textcircled{1}x + y + 2z - 1t & = & 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \textcircled{5}x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & \textcircled{1}y & +z & -t & 3u & = & 3 \\ & & \textcircled{3}z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & & & \textcircled{-1}u & = & 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \textcircled{2}x & & & & & = & 1 \\ & \textcircled{-3}y & & & & = & 3 \\ & & \textcircled{1}z & & & = & 6 \\ & & & \textcircled{-6}u & = & 12 \end{cases}$$

Ce système est dit *échelonné réduit*.

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

$$1. \begin{cases} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + y + 2t - u & = & -2 \\ -4y + t - 2u & = & 3 \\ 5y + 2t + u & = & 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & y & +z & -t & +3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & z & +t & & = & -1 \\ & & & -t & & = & 1 \end{cases}$$

II/ Résolution pratique

II.1 Algorithme de Gauss

L'objectif de l'*algorithme de Gauss* est donc de transformer tout système linéaire en un système échelonné **équivalent** par des opérations élémentaires décrites au [paragraphe \(I.2\)](#).

Considérons un système quelconque où chaque point $\bullet$ représente un coefficient du système, éventuellement 0.

$$\begin{cases} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement la forme *échelonnée* du système étudié.

Étape 1 : On choisit dans le système un coefficient non nul $\checkmark$ appelé *pivot*. Bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position (1, 1) en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\begin{cases} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \quad \text{devient} \quad \begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

après une éventuelle opération $L_i \leftrightarrow L_j$ et un éventuel échange d'inconnues.

ATTENTION

Permuter les inconnues n'est pas une opération élémentaire sur les colonnes, mais simplement une réindexation.

Remarque : Dans la mesure du possible, privilégiez un coefficient de pivot de valeur 1, vos calculs ultérieurs s'en trouveront simplifiés. Afin d'éviter les quotients, réservez l'opération $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda_i} L_i$ à la fin de l'algorithme.

Étape 2 : Grâce au pivot, on annule par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_1$ ou $L_i \leftarrow \lambda_1 L_i - \lambda_i L_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot.

Le système devient :

$$\begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Remarque : Évitez les divisions et si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement.

Reprise des étapes 1 et 2 : On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1.

Le système :

$$\begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \quad \text{devient} \quad \begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Et on recommence : On poursuit l'algorithme jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ ligne ou jusqu'à n'avoir que des lignes nulles.

Le résultat final est appelé une forme échelonnée du système :

$$\begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles ✓.

La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow \lambda_j L_i + \lambda_i L_j$.

Le système échelonné devient :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right. \text{ puis } \left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array} \right.$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues *principales* 1, 2 et 3 en fonction des inconnues *secondaires* 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.

Vocabulaire : Pour les puristes, on appelle *algorithme de Gauss*, l'algorithme qui conduit à un système échelonné et algorithme (d'élimination) de Gauss-Jordan pour celui qui mène à un système échelonné réduit et dont tous les pivots sont égaux à 1.

La complexité algorithmique asymptotique de l'élimination de Gauss est $O(n^3)$ i.e. $n \times n$ étant la taille de la matrice, le nombre d'instructions à réaliser est proportionnel à n^3 . Nous verrons que c'est plutôt bien.

Un peu d'histoire : En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, l'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est un algorithme pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires, pour déterminer le rang d'une matrice ou pour calculer l'inverse d'une matrice (carrée) inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme échelonnée réduite.

Cette méthode est connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1^{er} siècle de notre ère. Elle est référencée dans le livre chinois *Jiuzhang suanshu* (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de dix-huit exercices. Dans son commentaire daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au II^{ème} siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode a été découverte et présentée sous forme moderne au XIX^{ème} siècle. En 1810, Carl Friedrich Gauss présente sa méthode des moindres carrés dans un livre étudiant le mouvement de l'astéroïde Pallas. Dans l'article 13 de ce livre, il décrit une méthode générale de résolution de système d'équations linéaires qui constitue l'essentiel de la méthode du pivot. En 1888, Wilhelm Jordan publie un livre de géodésie précisant comment utiliser cette méthode et adoptant une notation un peu différente. C'est grâce à ce dernier livre que cette méthode se diffusa dans tout l'Occident. Elle est aujourd'hui connue sous le nom d'élimination de Gauss-Jordan ou méthode du pivot de Gauss.

Exemple 9 :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_9) : & \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_3 + L_2)] \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ z - t = -1 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3, L_2 \leftarrow L_2 - L_3] \begin{cases} x - y + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2] \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = -1 + t \\ t = t \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remarque : Pour bien faire apparaître le rôle des inconnues secondaires en tant que paramètre, on notera plutôt les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$

Méthode 3 (Résoudre un système échelonné) :

Pour résoudre un système échelonné :

1. Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
2. S'il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans $\mathbb{K}$: on exprime les inconnues principales en fonction de ces paramètres.
3. On rajoute finalement des lignes $x_i = 0 + \dots + 1 \cdot x_i + \dots + 0$ pour les inconnues secondaires.

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \{X_p + t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_j X_j \mid t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K}\},$$

où $X_p \in \mathbb{K}^n$ est une *solution particulière* de $(\mathcal{S})$, $X_1, \dots, X_j$ sont les inconnues secondaires.

Remarque : Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme $t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_j X_j$ où $t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K}$ est solution du système $(A \mid 0)$ linéaire homogène associé.

Exemple 10 :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{10}) : & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + + z + t = 3 \\ y + + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + + t = -1 \\ y + + t = -1 \\ y + + t = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + + t = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + + z + t = 3 \\ y + + t = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2.
 \end{aligned}$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + + z + t = 3 \\ y + + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Correction :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + \quad + z + t = 3 \\ \quad y + \quad + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ \quad y + \quad + t = -1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \quad y + \quad + t = -1 \\ \quad y + \quad + t = -1 & L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ \quad y + \quad + t = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad + z + t = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \quad y + \quad + t = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des quadruplets $\begin{pmatrix} 3 - \lambda - \mu \\ -1 - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le choix des inconnues, dites *principales*, n'est pas fixé. On aurait très bien pu prendre y et z par exemple pour obtenir :

$$\begin{cases} y = -1 - t \\ z = 3 - x - t \end{cases}$$

On trouve alors un système des solutions équivalents au précédent et défini par :

$$(0, -1, 0, 3) + \text{vect}((1, 0, -1, 0), (0, -1, -1, 1)).$$

Méthode 4 (Solutions d'un système linéaire échelonné) :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))

2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
 - (a) Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.
 - (b) Soit on peut paramétrer l'ensemble des solutions à l'aide des inconnues secondaires et dans ce cas, il possède une infinité de solutions.

Exemples 11 : Soit $a \in \mathbb{K}$.

$$\text{— } (\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ z = a^2 + a - 2 \end{cases} \text{ dont la matrice augmentée est } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 + a - 2 \end{array} \right)$$

est compatible.

$$\text{— } (\mathcal{S}') : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 2 \\ 0z = a^2 + a - 2 \end{cases} \text{ dont la matrice augmentée est } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + a - 2 \end{array} \right)$$

est compatible si, et seulement si $a \in \{-2; 1\}$.

II.2 Point de vue matriciel

Méthode 5 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

1. Quitte à prendre la transposée de A , il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne de A . On peut supposer que c'est a_{11} en multipliant à gauche A par une matrice de permutation si ce n'était pas le cas et en effectuant l'opération

$$L_1 \leftrightarrow L_i.$$

En multipliant par une matrice de dilatation *i.e.* $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}}L_1$, on peut même supposer $a_{11} = 1$. C'est le premier pivot.

2. En multipliant à gauche par des matrices de transvection, on annule tous les coefficients de la première colonne à partir de la deuxième ligne par des opérations élémentaires de la forme :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1.$$

La matrice A est alors transformée en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}.$$

3. Si la matrice $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, on poursuit l'algorithme.
4. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles *i.e.* la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & & & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Remarque : Les opérations sont les mêmes sur les colonnes en multipliant, cette fois, à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

Figure XVIII.1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

On obtient déjà un résultat d'importance :

CHAPITRE XVIII. SYSTÈMES LINÉAIRES

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent par ligne à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E , produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite (en lignes) R telle que :

$$EA = R.$$

On a bien évidemment le même résultat en raisonnant sur les colonnes avec $AE' = R'$ où E' est un produit de matrices d'opérations élémentaires et R' une matrice échelonnée réduite (en colonne) mais R et R' , autant que E et E' , n'ont aucune raison d'être égales si A n'est pas inversible.

Preuve : L'algorithme de Gauss-Jordan montre que l'on peut passer d'une matrice à une matrice échelonnée réduite par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Il suffit de traduire ces opérations élémentaires par des multiplications à gauche par des matrices de transformations élémentaires :

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = R$$

Comme chacune des matrices de transformations élémentaires est inversible, on peut écrire :

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} R$$

Les inverses de matrices de transformations élémentaires sont encore des matrices de transformations élémentaires. En notant $E = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_k$, on aboutit à

$$A = ER$$

avec E produit de matrices de transformations élémentaires et R matrice échelonnée réduite.

Toute matrice A est donc équivalente (par lignes) à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} & \text{shaded box} \\ \hline \bigcirc & \bigcirc \end{array} \right).$$

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite *échelonnée* en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

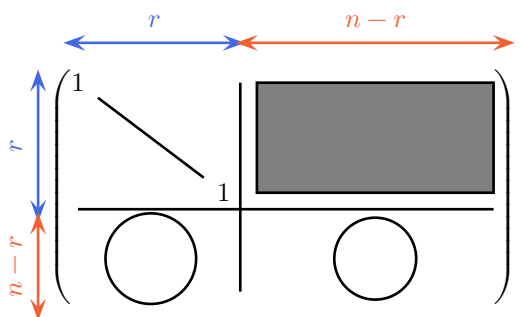
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé *pivot*.
- Une matrice échelonnée est dite matrice *échelonnée réduite*, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Définition 7 (Rang d'une matrice) : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *rang* d'une matrice, le nombre de lignes (*resp.* colonnes) non nulles dans sa forme échelonnée en lignes (*resp.* en colonnes).

Remarques :

- Le rang n'étant pas changé par le produit de matrices d'opérations élémentaires, lorsqu'il ne s'agit que de trouver le rang d'une matrice et non son inverse, on peut effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes en même temps.
- L'algorithme de la *méthode (5)* en « remontant », on montre ainsi que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée réduite où le rang r est clairement lisible :



II.3 Opérations élémentaires et matrices inversibles

L'inversibilité d'une matrice est un travail ardu lorsque la dimension augmente. Les opérations élémentaires vont grandement nous simplifier la tâche à travers l'algorithme de Gauss-Jordan.

Fixons donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont nous voulons savoir si elle est inversible ou non et calculer son inverse ou, à défaut, son rang.

- Effectuer des opérations élémentaires sur A , on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice NON inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A N'était PAS inversible.
- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires $E_1, \dots, E_r$ sur les LIGNES, dans cet ordre.

Matriciellement, cela revient à dire que : $E_r \dots E_1 A = I_n$!! **multiplications à GAUCHE!!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $E_r \dots E_1 = A^{-1}$.

Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$E_r \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1} . Ceci nous fournit un algorithme pratique d'échelonnement/réduction ou d'inversion suivant les cas (*confer exemple (12)*).

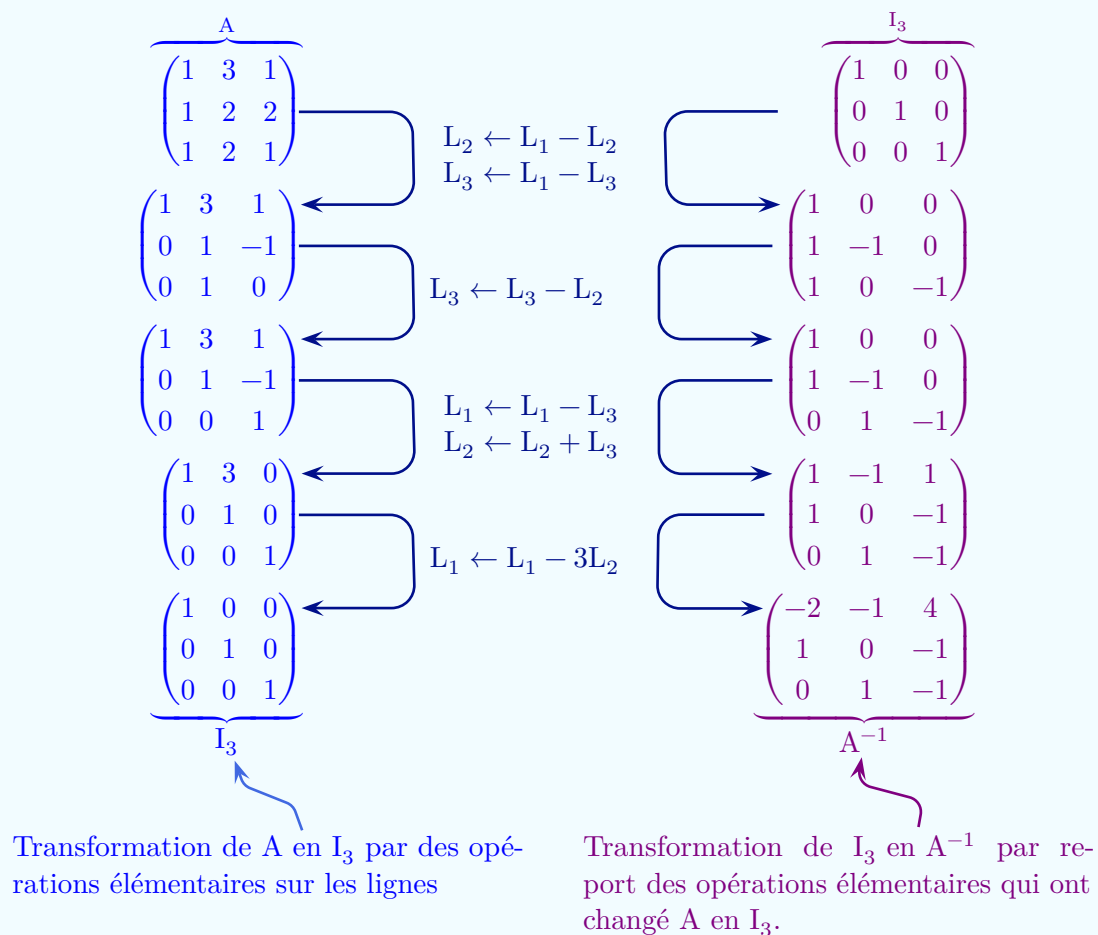
ATTENTION

Je rappelle encore ici que le produit matriciel N'est PAS commutatif donc on ne peut s'amuser à travailler sur les lignes qui correspond à un produit à gauche puis ou et sur les colonnes ce qui correspond à un produit à droite.

Moralité : lorsque que vous commencerez avec des opérations sur les lignes, vous ne manipulerez plus que les lignes jusqu'à l'obtention de l'inverse et idem pour les colonnes au risque de trouver une matrice qui n'aura rien à voir avec l'inverse recherchée.

Exemple 12 : Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :



Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Correction : On effectue des opérations sur les lignes *i.e.* on multiplie à gauche par des matrices élémentaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non inversible

III/ Ensemble des solutions

Revenons à un peu plus de théorie et concentrons-nous sur la structure de l'ensemble des solutions :

III.1 Linéarité et conséquences

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}((0)_{\mathbb{K}^m})$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application $\mathcal{A}$ vérifie

$$\forall X, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}(\lambda X + X') = \lambda \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(X').$$

L'application $\mathcal{A}$ est linéaire et le principe de superposition s'applique.

Proposition 6 (Principe de superposition) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si X_1 est solution de $AX = B_1$ et X_2 de $AX = B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $AX = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

Les raisonnements vont donc être sensiblement identiques à ceux menés dans le cadre des équations différentielles linéaires.

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X \in \mathbb{K}^n$ et $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.

1. $(\mathcal{S}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène :

$$\begin{array}{rcccl} \text{Solution générale} & = & \text{Solution} & + & \text{Solution de l'équation} \\ (\mathcal{S}) & = & \text{particulière} & + & \text{homogène.} \\ & & X_p & + & (\mathcal{S}_0). \end{array}$$

Preuve :

1. $(\mathcal{S}_0)$ contient le vecteur nul $(0)_{\mathbb{K}^n}$ donc $(\mathcal{S}_0)$ est non vide.

La stabilité par combinaisons linéaires est une conséquence de la linéarité du produit matriciel à droite :

Soient $\lambda \in K$ et X, X' deux éléments de $(\mathcal{S}_0)$.

Alors, $A(\lambda X + X') = \lambda AX + AX' = (0)_{\mathbb{K}^m} + (0)_{\mathbb{K}^m} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ i.e. $\lambda X + X' \in (\mathcal{S}_0)$: $(\mathcal{S}_0)$ est stable par combinaisons linéaires.

2. Comme $(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ on peut considérer X_p un de ses éléments i.e. $AX_p = B$.

On a alors :

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow AX = AX_p \Leftrightarrow A(X - X_p) = (0)_{\mathbb{K}^m} \\ &\Leftrightarrow X - X_p \text{ est solution du système homogène.} \\ &\Leftrightarrow X \text{ est la somme de la solution particulière} \\ &\quad \text{et d'une solution du système homogène.} \end{aligned}$$

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Exemple 13 : Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$:
$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{13}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ y - 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \\ 5z = 15 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique solution de $(\mathcal{S}_{13})$ est donc le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (0)_{\mathbb{R}^3}$.

Solution
particulière

Solution
homogène

Exemple 14 : Enlevons une équation au système précédent. La résolution est identique :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{14}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 5y + z = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 7z \\ y = 10 - 3z \\ z = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues *principales* et l'inconnue z est l'inconnue *secondaire*.

Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23 + 7\lambda \\ 10 - 3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière
Solution homogène

III.2 Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) : On appelle *rang* d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

— $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.

— $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.

— $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

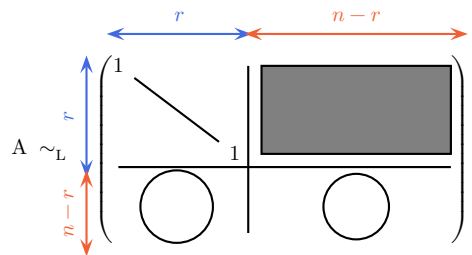
Le **théorème (5)** a immédiatement une conséquence importante :

Corollaire 7.1 :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.

On retrouve ici la **définition (7)**.

Preuve : Il suffit de se rappeler que toute matrice A est équivalente par lignes à une matrice de la forme :



On dit alors que $\text{rg}(A) = r$.

Exemples 16 : En reprenant les systèmes de l'exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.
4. Rang 4.
5. Rang 4.

Exemple 17 : Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière

Solution homogène

x est la seule inconnue principale donc le système $(\mathcal{S}_{17})$ est de rang 1.

Remarque : On aurait tout aussi bien pu choisir y ou z comme inconnue principale.

Définition 9 (Espace vectoriel engendré par une partie) : Soient $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, \dots, X_r$ est noté $\text{vect}(X_1, \dots, X_r)$:

$$\text{Vect}(X_1, \dots, X_r) = \left\{ \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r \right\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}}$$

Exemples 18 : En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{10})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$
- Les solutions de $(\mathcal{S}_9)$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) : On appelle *dimension* de l'ensemble $E = \text{vect}(X_1, \dots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E .

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.
- Trois vecteurs le sont s'ils ne sont pas coplanaires.

Nous reviendrons sur cette notion très importante dans d'ultérieurs chapitres.

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

- $A = \text{vect}((2; 3)) = \{(2x; 3x)\}_{x \in \mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$.

$$\dim(A) = 1.$$

- $B = \text{vect}((1; 0), (0; 1)) = \{x(1; 0) + y(0; 1)\}_{x, y \in \mathbb{R}} = \{(x; y)\}_{x, y \in \mathbb{R}}$.

C'est le plan (xOy) et $\dim(B) = 2$.

- $C = \{(2 + 2x; 1 + y - x)\}_{x, y \in \mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + 2x \\ 1 - x + y \end{pmatrix} \right\}$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{x, y \in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

C'est le plan passant par le point $(2; 1)$ et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e. c'est le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même et $\dim(C) = 2$.

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

— Soit D le plan passant par l'origine du repère et dirigé par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 $\dim(D) = 2$ et on a :

$$D = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} = \{(\lambda + \mu; 2\lambda; \mu)\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

Remarque : $2x = y + 2z$ donc D est aussi le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.

$$\begin{aligned} \text{— } E &= \left\{ (x + y - z; 2x - y; 3y + z) \right\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{x, y, z \in \mathbb{R}} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les trois vecteurs étant indépendants, c'est l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même : $\dim(E) = 3$.

$$\text{— } F = \left\{ (3 + x; 3x + 7; 1 + 2x) \right\}_{x \in \mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}_{x \in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

C'est la droite passant par le point $(3; 7; 1)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\dim(F) = 1$.

La notation $\text{vect}()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 : Notons $\mathcal{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à (S) .

- À l'exemple (13), $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\text{rg } S_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l'exemple (14), $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\text{rg } S_2 = 3 - 1 = 2$.
- À l'exemple (17), $\dim \mathcal{H}_0 = 2$ d'où $\text{rg } S_1 = 3 - 2 = 1$.

Exercice 4 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Correction : On applique l'algorithme de Gauss :

Si $a \neq 0$,

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ (a^2 - 1)y + (a - 1)z = a - 1 \\ (a - 1)y + (a^2 - 1)z = a - 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow aL_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow aL_3 - L_1 \end{array}$$

Si $a \neq 1$ alors,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ (a + 1)y + z = 1 \\ y + (a + 1)z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{a-1}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{a-1}L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ (a + 1)y + z = 1 \\ a(a + 2)z = a \end{cases} \quad L_3 \leftarrow (a + 1)L_3 - L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ (a + 1)y + z = 1 \\ (a + 2)z = 1 \end{cases} \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

Si $a = -2$, le système est incompatible. On suppose à présent que $a \neq 0, 1$ et -2 .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} a(a + 2)x + (a + 2)y = a + 1 \\ (a + 2)y = 1 \\ (a + 2)z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow (a + 2)L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a+1}((a + 2)L_2 - L_3) \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + 2)x = 1 \\ (a + 2)y = 1 \\ (a + 2)z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{a}(L_1 - L_2) \end{aligned}$$

Si $a \neq 0, 1$ et -2 , le système admet une unique solution $\left(\frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2}\right)$.

Si $a = 1$, le système est équivalent à $x + y + z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ de rang 1 dont les solutions

sont le plan vectoriel $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Si $a = 0$,

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 3 \\ 2y = 1 \\ 2z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{array} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 1 \\ 2z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \end{array}$$

Le système admet une unique solution $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

IV/ Systèmes linéaires et matrices inversibles

IV.1 Systèmes de Cramer

Définition 11 (Système de Cramer^[2]) : Un système linéaire est dit de *Cramer* si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Théorème 9 :

Tout système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$

Preuve : Comme $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

L'analogie des équations $ax = b$ et $AX = B$ est confortée. Cependant, comme explicité précédemment, on résoudra bien peu souvent un système en inversant sa matrice. Procédé bien trop coûteux en opérations. On lui préférera toujours l'algorithme de Gauss précédent.

[2]. **Gabriel Cramer**, né le 31 juillet **1704** à Genève et mort le 4 janvier **1752** à Bagnols-sur-Cèze, est un mathématicien genevois, professeur de mathématiques et de philosophie à l'académie de Genève. Lui et son collègue Jean-Louis Calandrin sont souvent considérés comme les artisans du renouveau scientifique à Genève au début du XVIII^{ème} siècle, par l'introduction de la philosophie naturelle newtonienne.

Les contributions de Cramer aux mathématiques portent essentiellement sur l'algèbre et la géométrie, au travers de son unique ouvrage publié, un traité sur les courbes intitulé *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, paru à Genève en 1750. Dans ce traité on trouve notamment la méthode connue aujourd'hui sous le nom de règle de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires d'équations, utilisant ce qui sera ultérieurement appelé déterminants.

IV.2 Inversibilité

Le théorème qui suit fait définitivement le lien entre inversibilité d'une matrice et la résolubilité des systèmes linéaires.

Théorème 10 (Matrices inversibles et systèmes linéaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si $\forall Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

Preuve :

- Si A est inversible, le système $Y = AX$ est un système de Cramer pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$ d'après le **théorème (9)**.
- Réciproquement, supposons que le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$.

- Notons $Y_1, \dots, Y_n$ les colonnes de la matrice I_n i.e. des vecteurs colonnes avec seulement un coefficient non nul égal à 1 en position i .

Par hypothèse, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le système $Y_i = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une solution B_i .

Si nous notons B la matrice carrée de colonnes $B_1, \dots, B_n$, il est alors immédiat que $AB = I_n$ i.e. A est inversible à droite.

- A-t-on pour autant $BA = I_n$?

En tout cas $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_n A - A = 0$, donc $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0$.

Or, $(0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ en est évidemment une autre et comme ce système ne possède qu'une seule solution par hypothèse, $BA - I_n = (0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \iff BA = I_n$.

En conclusion, A est inversible aussi à gauche donc tout court.

On peut être un peu plus explicite :

Corollaire 10.1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- (iii) $\text{rg}(A) = n$.
- (iv) $A \sim_L I_n$.
- (v) A est inversible.
- (vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Preuve :**(i) $\Rightarrow$ (ii) :** Qui peut le plus peut le moins.**(ii) $\Rightarrow$ (iii) :** Raisonnons par la contraposée et supposons que $\text{rg}(A) < n$. La matrice sera équivalente par lignes à une matrice échelonnée R dont au moins la dernière ligne est nulle.Posant $A = ER$ où la matrice E est un produit de matrices de transformations élémentaires (inversible), on a :

$$AX = B \Leftrightarrow ERX = B \Leftrightarrow RX = E^{-1}B.$$

$$\text{Posons alors } B = E \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B' = E^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne du système $RX = B'$ qui s'écrit $0 = 1$, entraîne son incompatibilité donc celle du système équivalent $AX = B$ ce qui contredit **(ii)**.D'où $r = n$ et A est inversible.**(iii) $\Rightarrow$ (i) :** Si $\text{rg}(A) = n$ alors, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système $(A \mid B)$ est équivalent par lignes à un système échelonné à n pivots. On sait que de tels systèmes admettent une solution unique.Nous avons donc déjà montré que **(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)** et les trois premières équivalences par transitivité. Poursuivons !**(iii) $\Rightarrow$ (iv) :** Par définition de $\text{rg}(A) = n$, l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A est I_n .**(iv) $\Rightarrow$ (v) :** Si $EA = I_n$, alors comme E est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) $E^{-1}EA = E^{-1}I_n$, i.e. $I_n A = E^{-1}$ et $A = E^{-1}$. La matrice A est donc inversible, puisque E^{-1} l'est.**(v) $\Rightarrow$ (vi) :** C'est exactement le sens direct du **théorème (10)**. La solution nulle est clairement solution. C'est donc la seule.**(vi) $\Rightarrow$ (iii) :** On raisonne par la contraposée. Si $\text{rg}(A) < n$ alors il existe au moins une inconnue secondaire et le système $AX = 0$ admet une infinité de solutions ce qui contredit **(vi)**.Par implication circulaire, on a donc ici aussi **(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (iii)** et les équivalences cherchées qui en découlent.

On retrouve un résultat démontré dans un chapitre précédent :

Corollaire 10.2 (Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales) :Une matrice triangulaire (ou diagonale) est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Ce théorème va donc nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple : résoudre un système linéaire !

Exemple 23 : La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - 2b + 5c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a, b, c) .

Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.

Méthode 6 (Inversibilité et calcul de l'inverse éventuel) :

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

1. S'il y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.
2. Si le système $AX = Y$ n'est pas compatible pour au moins un Y , alors A n'est pas inversible.

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

1. Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.
2. Si A' a n pivots, alors A est inversible. On réduit alors A' par opérations élémentaires, pour obtenir une matrice équivalente par lignes $(\mathbf{I}_n \mid B)$.

On conclut alors que $A^{-1} = B$.

Exercice 5 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Correction : Soient $(x; y; z)$ et $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

Dans cet exemple, on va tâcher de montrer en quoi notre nouvelle méthode d'inversibilité n'est qu'une reformulation de la précédente en termes de systèmes linéaires que l'on imagine lors de notre opérations sur les lignes.

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
 \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ -x + 4y + 5z = c \end{cases} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\
 \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ y = a - b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\
 \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = a \\ y - z = a - b \\ z = b - c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\
 \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a - b + c \\ y = a - b - c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\
 \\
 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a - b + 4c \\ y = a - b - c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \quad \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A^{-1}} \\
 \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3 .

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

D'après le corollaire (10.1), A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$. Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 10.3 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A n'est PAS inversible.
- (ii) Il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
- (iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A .

Preuve : Il suffit de prendre la négation des assertions du corollaire (10.1) et se rappeler que le produit $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

s'écrit $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$ où les A_i sont les vecteurs colonnes de A .

Exemples 24 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ car $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 6 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Correction : Le plus rapide et le meilleur est de remarquer que $C_1 - C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc la matrice A n'est pas inversible.

Sinon, soient $(x; y; z)$ et $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On applique encore la méthode en considérant le système :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & - & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & - & z & = & a \\ 2y & + & 2z & = & -a & + & b \\ 4y & + & 4z & = & a & + & c \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 + L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & - & z & = & a \\ 2y & + & 2z & = & -a & + & b \\ 0 & = & 3a & - & 2b & + & c \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Pour $a = 1$ et $b = c = 0$, le système n'a pas de solution à cause de sa troisième ligne.

La matrice A n'est donc pas inversible.

Remarque : Un autre manière de le voir est de constater que les membres de gauches des deux avant-dernières équations sont proportionnels sans que ne le soit leur membre de droite.

Systèmes linéaires

I/ Systèmes échelonnés

Exercice 1 : Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par lignes ?

NB : Les * désignent des nombres non nuls.

1.
$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

6.
$$(* \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *)$$

9.
$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad * \quad 0)$$

Exercice 2 : Pour chaque système suivant, déterminer :

- la matrice augmentée du système ;
- le nombre d'équation n , le nombre d'inconnues p ;
- le rang r ;
- la compatibilité ou l'incompatibilité ;
- le nombre de degrés de liberté ;
- les inconnues principales et secondaires.

On ne demande pas de résoudre le système^[3]

1.
$$\begin{cases} 2x - 7y + t = -13 \\ 2z + 9t = 6 \\ -5t = 9 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} a + b - d = -7 \\ 15b - 5c + 29d = 33 \\ 13c + d = -15 \\ 14d = 11 \\ 0c - 0d = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -x_2 + 15x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_4 + 7x_5 = -5 \\ 0x_1 = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 + 8x_7 = 5 \\ 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 + 13x_7 = -1 \\ x_6 - 29x_7 = 3 \end{cases}$$

[3]. ... mais tout élève sérieux le fera pour s'entraîner bien sûr !

Correction :

1. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -7 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 9 \end{array} \right)$

- $n = 3, p = 4$
- $r = 3$
- Compatible
- 1 degré de liberté
- inconnues principales : x, z, t

inconnue secondaire : y

2. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{-1} & 15 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

- $n = 3, p = 5$
- $r = 2$
- Non compatible
- 3 degré de liberté
- inconnues principales : x_2, x_4

inconnues secondaires : x_1, x_3, x_5

3. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{15} & -5 & 29 & 33 \\ 0 & 0 & \boxed{13} & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

- $n = 5, p = 4$
- $r = 4$
- Compatible
- 0 degré de liberté : 1 solution.
- inconnues principales : a, b, c, d

Pas d'inconnue secondaire.

4. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & -6 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -29 & 3 \end{array} \right)$

- $n = 3, p = 7$
- $r = 3$
- Compatible
- 4 degrés de liberté
- inconnues principales : x_1, x_3, x_6

inconnues secondaires : x_2, x_4, x_5, x_7

Exercice 3 : Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x - y = 0,5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y + t = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -2x + 3z = 7 \\ -4x - 2y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ -10x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 2y + z = -2 \\ 3x - y = 0,5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + yz = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_4 = -7 \end{cases}$$

Correction :

$$1. \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right) \right\}$$

$$2. \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \{(-4, 1, 4)\}$$

$$3. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \emptyset$$

$$4. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \{(1+z, 1-z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$5. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \{(1+y-t, y, t, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$6. \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ -10 & -6 & 0 & 2 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

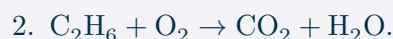
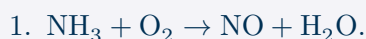
$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-7+3z}{2}, \frac{11-5z}{2}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4 :

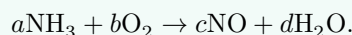
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ avec la méthode du pivot le système :

$$\begin{cases} x + y = 2i \\ y + z = -2 \\ z + t = -2i \\ x + t = 2 \end{cases}$$

2. Soient les quatre points B_1, B_2, B_3 et B_4 d'affixes respectives $i, -1, -i$ et 1 . Existe-t-il un quadrilatère tel que les points B_1, B_2, B_3 et B_4 soient les milieux de ses côtés ? Si oui, est-il unique ?

Exercice 5 : Équilibrer les équations chimiques suivantes :**Correction :**

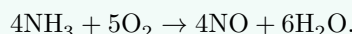
1. Il s'agit de trouver a, b, c et d de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation



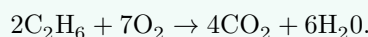
Les réels a, b, c, d doivent satisfaire le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a &= c \\ 3a &= 2d \\ 2b &= c + d \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a &-c &0 \\ 3a &-c &0d \\ &2b-c &-d \end{cases} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &-c &= 0 \\ &3c-2d &= 0 \\ 2b-c-d &= 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2d/3 \\ b = 5d/6 \\ c = 2d/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisqu'on cherche une solution entière, on peut choisir la valeur $d = 6$, et on a donc équilibré la réaction chimique en l'écrivant



2. On procède en suivant exactement la même méthode, et on équilibre l'équation chimique en

**II/ Systèmes compatibles****Exercice 6 :** Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur des paramètres :

$$1. \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}, \quad 3. \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$$

Correction :

$$3. A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & a \\ 3 & 2 & 1 & a+3 \\ 7 & 4 & -5 & 2a+5 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 3-\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{array} \right)$$

— Si $a \neq 2$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

— Si $a = 2$, $A \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ et $\mathcal{S} = \{(-1 + 7z, 4 - 11z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7 :

1. Résoudre le système suivant en discutant selon les paramètres réels a, b, c :

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 3y - 5z = b \\ 8x - 9y + 13z = c \end{cases}$$

2. Résoudre le système précédent pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Correction : } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ -1 & 3 & -5 & b \\ 8 & -9 & 13 & c \end{array} \right) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 8 & -9 & 13 & c \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 0 & 5 & -9 & a+2b \\ 0 & 15 & -27 & c+8b \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array} \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 0 & 5 & -9 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & -3a+2b+c \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{aligned}$$

— Si $-3a + 2b + c \neq 0$ le système est incompatible : $\mathcal{S} = \emptyset$.

$$\text{— Si } -3a + 2b + c = 0, \text{ alors } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - 5z = b \\ 5y - 9z = a + 2b \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 5z + b \\ 5y = 9z + a + 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -5z - b \\ y = \frac{9}{5}z + \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}z + \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ y = \frac{9}{5}z + \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2z + 3a + b}{5}, \frac{9z + a + 2b}{5}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $-3a + 2b + c \neq 0$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

— $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, on a $-3a + 2b + c = 0$ puis $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2z + 11}{5}, \frac{9z + 6}{5}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 8 : Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

Correction :

1. On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ x + y + z + (1+\lambda)t & = & d \end{cases}$$

2. Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x, y, z, t) qui vérifie $x + y + z + t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)
3. Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ & & & (\lambda+4)t & = & d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4. Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a + b + c + d$. Donc si $a + b + c + d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.

Si $\lambda = -4$ et $a + b + c + d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{a-d}{4} \\ -\frac{b-d}{4} \\ -\frac{c-d}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La droite passant par $\left(-\frac{a-d}{4}, -\frac{b-d}{4}, -\frac{c-d}{4}, 0 \right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$.

5. Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4} \left(d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d)$, $y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d)$, $z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a - b - c - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b - a - c - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c - a - b - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d - a - b - c}{\lambda(\lambda+4)} \right).$$

Exercice 9 :

1. Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, en discutant selon la valeur du paramètre réel a :

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 0 \\ x + ay + z + t = 0 \\ x + y + az + t = 0 \\ x + y + z + at = 0 \end{cases}$$

2. Refaire l'exercice précédent en introduisant l'inconnue auxiliaire $s = x + y + z + t$, et sans utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

Correction :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_4 \\ & \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - aL_1 \end{array} \\ & \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 & 0 \end{array} \right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ & \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 0 \end{array} \right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{aligned}$$

Or, $3 - 2a - a^2 = (3 + a)(1 - a)$.

— Si $a = 1$ alors $(S) \Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \Leftrightarrow x = -y - z - t$

$$\mathcal{S} = \{(-y - z - t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}.$$

— Si $a = -3$ alors $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\mathcal{S} = \{(t, t, t, t), t \in \mathbb{R}\}.$$

— Si $a \notin \{1, -3\}$, alors $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

2. Autre méthode : on pose $s = x + y + z + t$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = s \\ ax + y + z + t = 0 \\ x + ay + z + t = 0 \\ x + y + az + t = 0 \\ x + y + z + at = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = s \\ (a-1)x + s = 0 \\ (a-1)y + s = 0 \\ (a-1)z + s = 0 \\ (a-1)t + s = 0 \end{cases}$$

— Si $a = 1$ alors $(S) \Leftrightarrow x + y + z + t = 0$

$$\mathcal{S} = \{(-y - z - t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}.$$

— Sinon, $x = y = z = t = \frac{s}{1-a}$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = s \\ x = \frac{s}{1-a} \\ y = \frac{s}{1-a} \\ z = \frac{s}{1-a} \\ t = \frac{s}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4s}{1-a} = s \\ x = \frac{s}{1-a} \\ y = \frac{s}{1-a} \\ z = \frac{s}{1-a} \\ t = \frac{s}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3+a)s}{1-a} = 0 \\ x = \frac{s}{1-a} \\ y = \frac{s}{1-a} \\ z = \frac{s}{1-a} \\ t = \frac{s}{1-a} \end{cases}$$

— Si $a = -3$ alors $\mathcal{S} = \{(t, t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

— Si $a \notin \{1, -3\}$, alors $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

III/ Rang et inversibilité de matrices

Exercice 10 :

- Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
- Inverser, si possible, les matrices suivantes (on suppose $n \geq 2$) :

(a) $(\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Exercice 11 : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Correction :

1. Soient $(x; y; z)$ et $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On applique la méthode en considérant le système :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ 2x + 3y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -b + 2c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - 2b + 5c \\ y = a + b - 3c \\ z = b - c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a réussi à résoudre le système pour TOUT second membre $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ donc A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (M anti-symétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible) :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ anti-symétrique.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ considéré comme une matrice à une seule colonne.

Calculer $X^T X$ et montrer que $X^T X \geq 0$ et $X^T X = 0$ si, et seulement si $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

2. (a) Soit X un vecteur tel $(I + M)X = 0$. En calculant $(MX)^T(MX)$ de deux manières différentes montrer que $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
 (b) En déduire que $I + M$ est inversible.
3. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$.
 (a) Montrer que $(I - M)$ et $(I + M)^{-1}$ commutent.
 (b) Déterminer A^{-1}
 (c) Montrer que $A^T = A^{-1}$.

Correction :

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $X^T X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Commentaires : On note $\|X\|^2 = X^T X$. $\|X\|$ est la norme ou la longueur du vecteur X .

De ce calcul on déduit d'une part que $X^T X \geq 0$. Et aussi que $X^T X = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

2. (a) Soit un vecteur X vérifiant $(I + M)X = 0 \iff MX = -X$.

D'une part, $(MX)^T (MX) = \|MX\|^2 \geq 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} (MX)^T (MX) &= (MX)^T (-X) \quad \text{car } (I + M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\ &= X^T M^T (-X) \quad \text{car } (AB)^T = B^T A^T \\ &= X^T (-M)(-X) \quad \text{car } M^T = -M \\ &= X^T MX \\ &= X^T (-X) \\ &= -X^T X \\ &= -\|X\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $I + M$ inversible.

- (b) Promenade de santé : l'unique solution de $(I + M)X = 0$ est le vecteur nul donc $I + M$ est inversible.
3. (a) Montrons que $I + M$ et $(I - M)^{-1}$ commutent.

Tout d'abord $I + M$ et $I - M$ commutent car $(I + M)(I - M) = I - M^2 = (I - M)(I + M)$.

Ensuite, les matrices étant inversibles :

$$\begin{aligned} (I + M)(I - M) &= (I - M)(I + M) \implies (I - M)^{-1}(I + M)(I - M) = (I - M)^{-1}(I - M)(I + M) \\ &\implies (I - M)^{-1}(I - M)(I + M) = (I - M)^{-1}(I - M)(I + M) \\ &\implies (I + M) = (I - M)^{-1}(I - M)(I + M) \\ &\implies (I + M)(I - M)^{-1} = (I - M)^{-1}(I - M)(I + M)(I - M)^{-1} \\ &\implies (I + M)(I - M)^{-1} = (I - M)^{-1}(I + M)(I - M)(I - M)^{-1} \\ &\implies (I + M)(I - M)^{-1} = (I - M)^{-1}(I + M). \end{aligned}$$

- (b) Calculons A^{-1} .

$$A^{-1} = \left((I - M) \times (I + M)^{-1} \right)^{-1} = ((I + M)^{-1})^{-1} \times (I - M)^{-1} = (I + M) \times (I - M)^{-1}$$

Commentaires : N'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- (c) Calculons A^T .

$$\begin{aligned} A^T &= \left((I - M) \times (I + M)^{-1} \right)^T \\ &= ((I + M)^{-1})^T \times (I - M)^T \quad \text{car } (AB)^T = B^T A^T \\ &= ((I + M)^T)^{-1} \times (I - M)^T \quad \text{car } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \\ &= (I + M^T)^{-1} \times (I - M^T) \quad \text{car } (A + B)^T = A^T + B^T \\ &= (I - M)^{-1} \times (I + M) \quad \text{car ici } M^T = -M \end{aligned}$$

Conclusion, $A^{-1} = A^T$.

IV/ Quelques petits problèmes de l'école primaire _____

Exercice 13 : Paul a des gros clous et des petits clous. Tous les gros clous ont la même masse, et tous les petits clous aussi. 50 gros clous et 120 petits clous pèsent ensemble 165 g. 70 gros clous et 90 petits clous pèsent ensemble 192 g. Calculer la masse d'un gros clou et celle d'un petit clou.

Exercice 14 : L'âne dit au mulet : « De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, j'en aurais alors le double de toi, si tu prenais un des miens, nous aurions alors la même charge ». Combien de sacs portent-ils chacun ?

Exercice 15 : Trois pirates se partagent 300 pièces d'or. Le chef a pour part le double de la somme obtenue en additionnant les deux autres parts. La part du deuxième comporte 10 pièces de plus que celle du troisième. Déterminer la part de chacun.

Exercice 16 : Une personne dépense le quart de son salaire pour se loger et les $\frac{3}{7}$ pour se nourrir. Il lui reste 3150 F pour ses autres dépenses. Quel est son salaire ?

Exercice 17 : Voici un problème de Nicolas Chuquet (1445-1500) : « Des frères se partagent un héritage. Le premier prend 100 euros et 10% du reste. Le second prend 200 euros et 10% du nouveau reste. Le troisième prend 300 euros et 10% du nouveau reste et ainsi de suite jusqu'au dernier. Ils ont alors la même part. À combien se monte l'héritage ? Combien y a-t-il de frères ? »

Exercice 18 : Un batelier descend une rivière de 120 km à vitesse constante $v(\text{km/j})$. Par contre, il la remonte en mettant un jour de plus car il fait 6 km/j de moins qu'en descendant. Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?

Dérivabilité et Systèmes linéaires

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. ($a < b$)

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ différent de celui de la question (1).

Le théorème de Rolle

3. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui persiste dans $\mathbb{C}$.

L'inégalité des accroissements finis

4. Résoudre le système suivant :
- $$\begin{cases} x & & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & -2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x & & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & -2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{cases} & \iff \begin{cases} x & & + & 2z & = & 0 \\ -x & & + & -2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x & & + & 2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est incompatible.

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

5. Même question avec $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y + -z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y + -z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est la droite (affine) passant par le point $(0; 1; 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; -1)$. Un seul degré de liberté donc.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'inconnue z joue le rôle d'inconnue secondaire. On aurait pu prendre y ou x .

Dérivabilité et Systèmes linéaires

1. Énoncer le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

2. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui persiste dans $\mathbb{C}$.

Le lien entre la nullité sur un intervalle de la dérivée d'une fonction dérivable et sa constance sur celui-ci.

3. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ différent de celui de la question (1).

L'annulation de la dérivée aux extrema locaux.

4. Résoudre le système suivant :
- $$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x + -2y + z = -2 \\ x + y + -2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x + -2y + z = -2 \\ x + y + -2z = 4 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3] \begin{cases} x + -2y + z = 3 \\ x + y + -2z = -2 \\ x + y + -2z = 4 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \emptyset$. Le système incompatible.

5. Même question avec
- $$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + y + -z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + y + -z = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2, L_2 \leftarrow L_2 + L_3] \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2x + y + -z = 0 \\ x + y + -z = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(0; 1; 0)\}$. Un unique point.

Systèmes linéaires

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x & + 2z = 0 \\ 3t & + 3y + z = 0 \\ t + x + y + z = 0 \\ -t + 2x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Systèmes linéaires

Résoudre le système suivant suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{cases}$$

Quelques encadrements et un système

Exercice 1 –

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \right)$$

convergent vers des limites à préciser.

Exercice 2 – Déterminer le nombre de solution(s) du système en fonction de m . Si le nombre de solutions est infini, on précisera le nombre de degré de liberté de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases}$$

Quelques encadrements et un système

Exercice 1 –

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \right)$$

convergent vers des limites à préciser.

Correction : L'exercice est un peu répétitif mais s'enchaîne bien en appliquant l'inégalité de la moyenne :

1.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \cos(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t \cos(x) dx \leq \int_0^t 1 dx \Leftrightarrow \sin(t) \leq t. \quad (\text{XVIII.1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t \sin(x) dx &\leq \int_0^t x dx \Leftrightarrow 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}. \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t). \end{aligned} \quad (\text{XVIII.2})$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t 1 - \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^t \cos(x) dx \Leftrightarrow t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t). \quad (\text{XVIII.3})$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t x - \frac{x^3}{6} dx \leq \int_0^t \sin(x) dx \Leftrightarrow \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}. \quad (\text{XVIII.4})$$

Les encadrements (XVIII.1) et (XVIII.3) nous donnent :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t.$$

Tandis que (XVIII.2) et (XVIII.4) s'écrivent ensemble :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

2. Il suffit d'appliquer la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} &\leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6} &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. D'où,

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Même chose pour l'autre :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{k^2}{2n^3} &\leq \cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \frac{k^2}{2n^3} + \frac{k^4}{24n^6} \\ -\frac{k^2}{2n^3} &\leq \cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \leq -\frac{k^2}{2n^3} + \frac{k^4}{24n^6} \\ -\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^n k^4 \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^n k^4 \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{1}{24n^6} \times (n \times n^4) \quad \text{ouf!} \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n^5}{24n^6}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n^5}{24n^6} = -\frac{1}{6}$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) = -\frac{1}{6}.$$

Exercice 2 – Déterminer le nombre de solution(s) du système en fonction de m . Si le nombre de solutions est infini, on précisera le nombre de degré de liberté de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases}$$

Correction :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases} \\
 L_2 & \leftarrow 2L_1 + L_2 \\
 L_3 & \leftarrow mL_1 - L_3 \text{ si } m = 0 \text{ pas grave ici.} \\
 & \text{Ça revient à ne rien faire.} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m \\ (1+2m)y + (m+2)z = 1+2m \\ (m^2-1)y + 2(m-1)z = m^2-2m+1 \end{cases} \\
 L_3 & \leftarrow \frac{1}{m-1}L_3 \text{ si } m \neq 1 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m \\ (1+2m)y + (m+2)z = 1+2m \\ (m+1)y + 2z = m-1 \end{cases} \\
 L_1 & \leftarrow L_1 - L_3 \\
 L_2 & \leftarrow (m+2)L_3 - 2L_2 \text{ si } m = -2 \\
 & \text{pas grave ici. Ça revient à ne rien faire.} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1)x + m(m-1)y + 2m(m-1)z = 2(m^2-2m-2) \\ m(m-1)y = m^2-3m-4 \\ 2m(m-1)z = 4(2m+1) \end{cases} \\
 L_1 & \leftarrow m(m-1)L_1 + L_2 \text{ si } m \neq 0, 1 \\
 L_3 & \leftarrow m(m-1)L_3 - (m+1)L_2 \text{ si } m = -1 \\
 & \text{pareil que pour } -2 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)} \\ y = \frac{m^2-3m-4}{m(m-1)} \\ z = \frac{2(2m+1)}{m(m-1)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Une unique solution : le point pas très beau au dessus.

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \left(\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)}; \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)}; \frac{2(2m+1)}{m(m-1)} \right), m \neq 0, 1 \right\}.$$

Si $m = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -2x + y - 2z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 0 = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le système est incompatible. Il n'a pas de solutions.

$$\mathcal{S}_0 = \emptyset.$$

Si $m = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est la droite (affine) passant par le point $(0; 1; 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; -1)$. Un seul degré de liberté donc.

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Continuité, Dérivabilité – Systèmes linéaires

1. Continuité

- Définition de la continuité, continuité à droite, à gauche.
- Prolongement par continuité.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.
- Théorème de la bijection.
- Image d'un segment par une fonction continue.
- Extension aux fonctions complexes.

2. Dérivabilité

- Définition de la dérivabilité en a , dérivabilité à droite, à gauche.
- Lien avec un DL à l'ordre 1 (évoqué sommairement) et avec la tangente.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, formule de Leibniz.
- Tout extremum intérieur est un point critique, théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis.
- Lien entre monotonie de f et signe de f' .
- Théorème des accroissements finis, définition d'une fonction lipschitzienne.
- Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
- Extension aux fonctions complexes : caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, théorème des accroissements finis.

3. Systèmes linéaires

- Lien entre un système linéaire et une équation matricielle.
- Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
- Version matricielle des opérations élémentaires.
- Caractérisation de l'inverse d'une matrice en étant équivalente à I_n .
- Cas des matrices diagonales ou triangulaires.
- Calcul de l'inverse d'une matrice.
- Résolution de systèmes linéaires par l'algorithme de Gauss.
- Cas de systèmes à paramètres.

Questions de cours possibles ^[4] :

1. Théorème de Bolzano via la borne sup et/ou l'algorithme de dichotomie.
2. (★) Théorème des valeurs intermédiaires. *L'énoncé devra être parfaitement su en entier !*
3. Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
4. Dérivabilité du produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Formule de Leibniz à énoncer correctement et en connaître les idées de la démonstration.
5. (★) Dérivabilité de la réciproque dans le cas d'une fonction bijective.
6. Théorème de Rolle.
7. Théorème des accroissements finis.
8. (★) Lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle. Pour les volontaires, cas de la stricte monotonie.
9. (★) Inégalités des accroissements finis dans le cas complexe.

[4]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Suites récurrentes

1. Suites particulières

- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

- Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.
- Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples.
 - Représentation géométrique.
 - Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.
 - Intervalle stable par f .
 - Étude du signe de $f(x) - x$.
 - Utilisation de la croissance éventuelle de f .
- Application du théorème des accroissements finis à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Questions de cours possibles ^[5] :

1. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
2. Tout réel est la limite de deux suites adjacentes de décimaux.
3. Savoir expliquer et démontrer le principe de dichotomie à partir de deux suites adjacentes (le théorème de Bolzano devra être su).
4. Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.
5. Lien entre monotonie d'une fonction et des suites définies par récurrence.
6. Forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dans le cas complexe.

[5]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

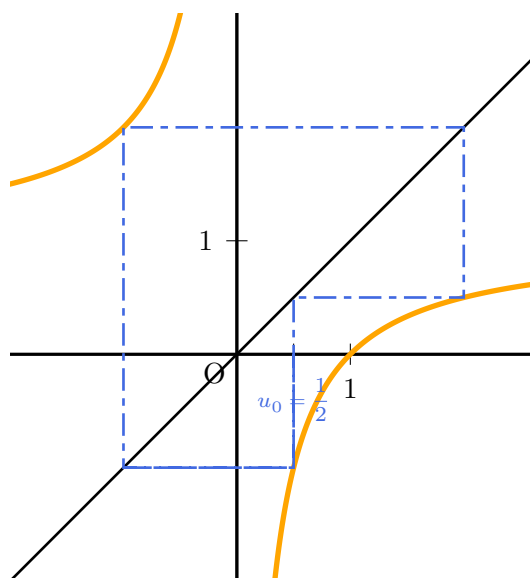


Figure XIX.1 – $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$.

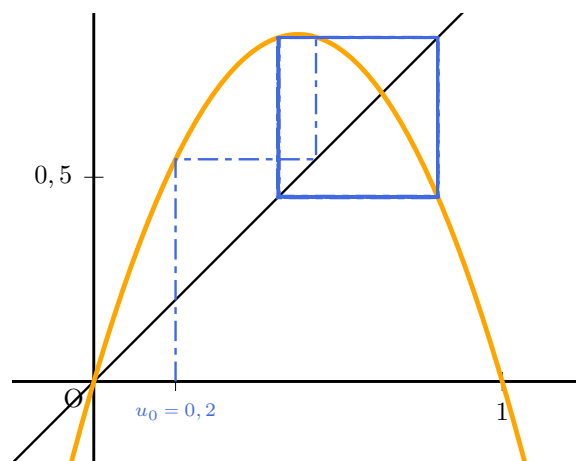


Figure XIX.2 – $u_{n+1} = 3,4u_n(1-u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

Figure XIX.3 – Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un cycle.

Notons par exemple f la fonction $x \mapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $]-\infty; 2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme $u_0 \in]-\infty; 2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ???? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky^[1] sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et

[1]. Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un éminent mathématicien ukrainien célèbre pour le développement du théorème de Sharkovsky sur les périodicités des systèmes dynamiques discrets en 1964.

Le théorème de Sharkovsky est un théorème portant sur l'itération des fonctions continues.

une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ? C'est le propos de ce chapitre.

CONTENU

I	Suites récurrentes	1176
I.1	Représentation graphique d'une suite récurrente	1177
I.2	Stabilité et définition	1177
I.3	Variations	1178
I.4	Convergence et point fixe	1182
I.5	Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1	1186
II	Suites récurrentes linéaires	1187
II.1	Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$	1189
II.2	Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	1191
	Feuille d'exercices n° 20 : Suites récurrentes	1193
	Test n° 25 : Systèmes linéaires et Suites récurrentes	1207

I/ Suites récurrentes

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leq 2$.

Il donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f , c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Ce théorème fait partie des premiers exemples remarquables de la *théorie des systèmes dynamiques*, introduisant la notion de *chaos*. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-cycle implique chaos

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n .

I.1 Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 (Représentation d'une suite) :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice $(\Delta) : x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$.
- On reporte le $(u_1; 0)$ à l'aide de la bissectrice.
- On itère le procédé ...

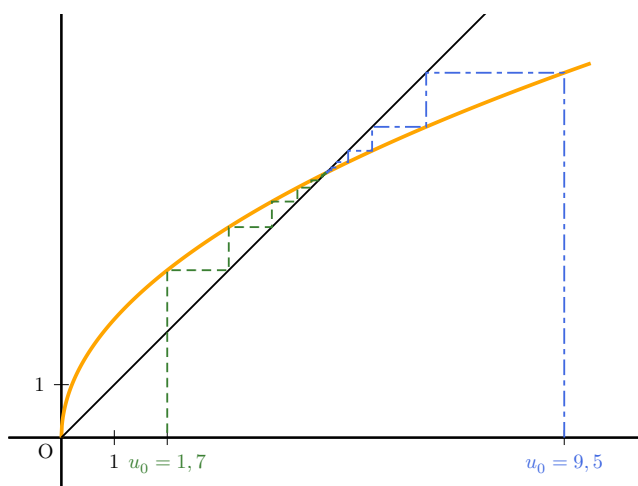


Figure XIX.4 - $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$.

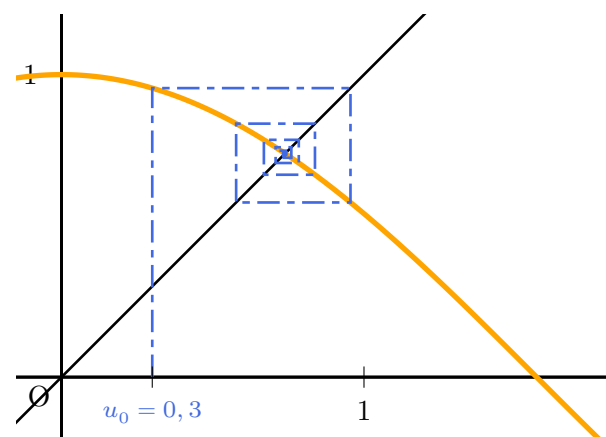


Figure XIX.5 - $u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$.

Figure XIX.6 – Exemples de suites convergentes

I.2 Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

1. $I \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(I) \subset I$
3. $u_0 \in I$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de stabilité*.

Remarque : Trouver un segment $[a; b]$ sera notre saint graal.

Définition 1 (Intervalle stable) : On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f , d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 1 (Existence de la suite) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f .

Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Preuve : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \text{ est bien définie et } u_n \in I \text{ »}$$

- On a $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang n .

On a par hypothèse de récurrence $u_n \in I \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

De plus, comme I est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(I) \subset I$. D'où la propriété au rang $n+1$ et l'hérédité.

On conclut par principe de récurrence.

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 : On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ où, $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1	1	8	$+\infty$
f				$+\infty$
	0	$\sqrt{2}$	3	

Un intervalle de stabilité peut-être $[1; 8]$, $[-1; 8]$, $[1; +\infty[$ ou $[-1; +\infty[$ mais pas $[-1; 1]$ ou $[8; +\infty]$.

I.3 Variations

Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il s'agira de déterminer le signe de $f(x) - x$ sur I , et de dresser éventuellement son tableau de signe.

Graphiquement, cela correspond à déterminer la position de la courbe de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Proposition 2 :

Pour tout $x \in I$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

1. Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Remarque : Les éventuels points d'annulation de δ sont les points fixes de f sur I .

Exemple 2 : Reprenons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple (1).

$$\text{On a } \delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}.$$

x	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$\delta(x)$	-	0	+

Comme on a choisi $I = [1; 8]$, la quantité $\delta(x)$ n'est pas de signe constant sur I . On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 8\right]$ ou $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ plutôt que $[1; 8]$.

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante :

« f est croissante si, et seulement si elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, ... $u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$...et ainsi de suite pour tous les termes de la suite.

La suite est donc décroissante dans ce cas.

Preuve :

- Considérons une fonction quelconque f croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que ses deux premiers termes soient, par exemple,

$$u_0 \leq u_1. \quad (\text{XIX.1})$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Posons donc la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation : D'après (XIX.1), $u_0 \leq u_1$ et $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse.

$u_k \leq u_{k+1}$	Hypothèse de récurrence	$\mathcal{P}_k$
$f(u_k) \leq f(u_{k+1})$	f est croissante donc conserve l'ordre	$\Downarrow$
$u_{k+1} \leq u_{k+2}$	Définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\mathcal{P}_{k+1}$

La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$, initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \geq u_1$ qui serait décroissante.

- Dans le cas d'une fonction décroissante, posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I.

Posons alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n) \quad \text{et, de même,} \quad w_{n+1} = g(w_n).$$

Le point précédent permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Supposons, par exemple, que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$.

En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit :

$$f(v_n) \geq f(v_{n+1}) \iff w_n \geq w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Si l'on supposait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante, on en déduirait de la même manière que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

En conclusion, les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Remarque : Les suites d'indice pair et impair sont donc associées à la fonction $g = f \circ f$ et définies par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = g(u_{2n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) \end{cases}.$$

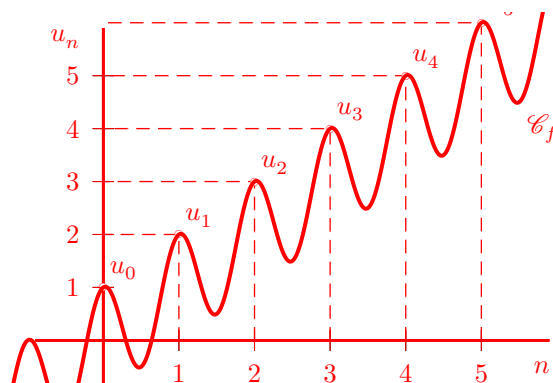
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

f (dé)croissante ~~↔~~ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ \quad = u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n+1, \forall n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



ATTENTION

Exemple 3 : Reprenons encore l'exemple (1) .

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0; 8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Méthode 2 (Suite récurrente associée à une fonction décroissante) :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
 - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

Dans le cas où $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

ATTENTION

I.4 Convergence et point fixe

Rappel 1 (Point fixe) : Soit une fonction f définie sur un ensemble I .

On appelle *point fixe* de f sur I tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition 4 (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

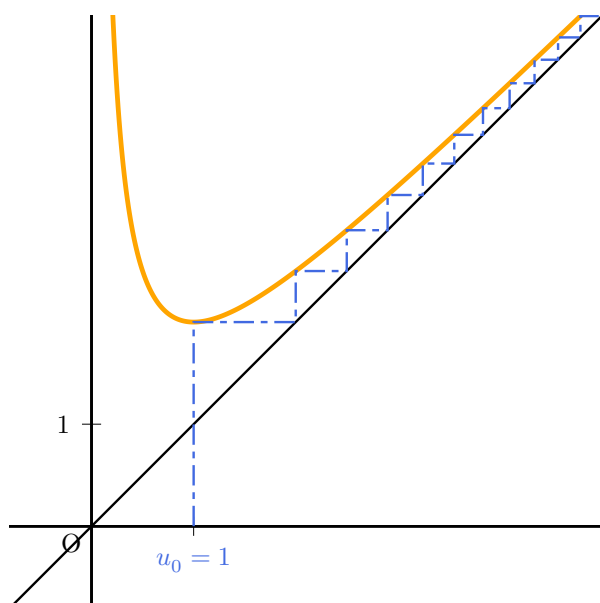


Figure XIX.7 – $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
 f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

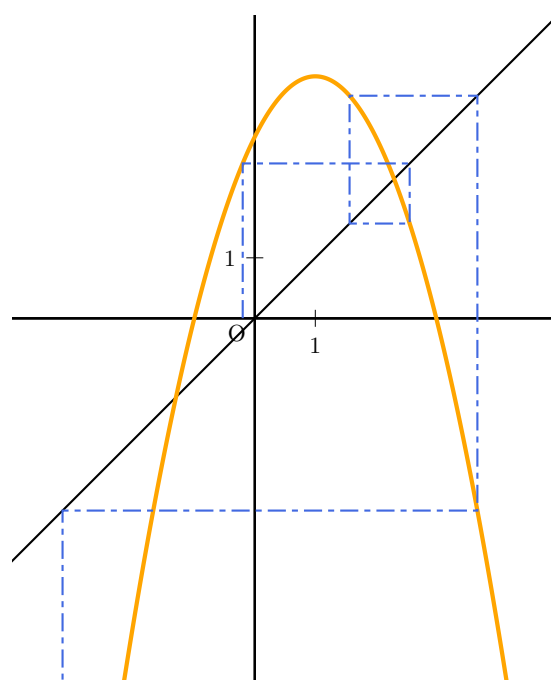


Figure XIX.8 – $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
 f a deux points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Figure XIX.9 – Exemples de suites divergentes

Preuve : Supposons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ .

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell.$$

Or, la fonction f est continue en $\ell \in I$ i.e. $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$.

$$\text{Par composition, on en déduit que } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Donc $f(\ell) = \ell$ i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f , on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I .

ATTENTION

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f .

Contre-Exemple 4 : Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .

ATTENTION

Exemple 5 : Revenons à l'exemple (1).

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0; 8]$.

Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

D'où $1 + \ell = \ell^2$ et $\ell \geq 0$. Finalement, on obtient $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.

La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .

Contre-Exemple 6 : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

- Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Reste alors à se poser la question de quelle(s) propriété(s) rajouter à f ou à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour imposer la convergence voire le choix du point fixe donc se poser la question de son unicité.

Une partie de la réponse se trouve dans les paragraphes suivants.

Définition 2 (Fonction contractante) : Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est *contractante sur I* si f est k -lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leq k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** $[a; b]$ stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[a; b]$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (\text{XIX.2})$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (XIX.2).

Calcul approché du point fixe : Le terme u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n |u_0 - \ell|$. La méthode sera d'autant plus efficace que l'on aura bien choisi u_0 .

Preuve : Il y a beaucoup de choses à démontrer dans ce théorème.

Existence du point fixe : La fonction est lipschitzienne sur I donc continue.

Posons $\phi : x \mapsto f(x) - x$ et $I = [a; b]$ où $a < b$ sont deux réels.

La fonction ϕ est continue sur I et l'hypothèse $f(I) \subset I$ entraîne $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

D'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe donc $\ell \in I$ tel que :

$$\phi(\ell) = 0 \iff f(\ell) = \ell.$$

La fonction f possède donc un point fixe ℓ sur I .

Unicité du point fixe : Montrons, par l'absurde, que ℓ est unique.

Supposons donc avoir un deuxième point fixe $\ell_1 \neq \ell \in I$.

Alors $|f(\ell) - f(\ell_1)| < k|\ell - \ell_1| \iff |\ell - \ell_1| < k|\ell - \ell_1|$ qui est absurde avec $k < 1$.

Donc, f admet un unique point fixe ℓ sur I .

Convergence de la suite : Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, par récurrence, par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Par construction, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$.

Par récurrence, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Comme $k \in]0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

1. une **hypothèse** dans la proposition (4).
2. une **conclusion** dans le théorème (5).

Exercice 2 : Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n} \end{cases}$.

Correction : On commence par étudier rapidement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5 + 2x}$ à la recherche d'un intervalle stable par f . Il est déjà clair que f est croissante sur son ensemble de définition par composition.

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{5}{2}; +\infty[$ mais comme il est assez facile de montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se concentre sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5 + 2x}} < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La fonction f est donc contractante sur $\mathbb{R}_+$.

Ses points fixes, s'ils existent, sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 5 = 0$ i.e. $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$ et $\ell_2 = 1 - \sqrt{6} < 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$, notre seul candidat est $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$.

Par croissance $f([1; 6]) = [1; \sqrt{17}] \subset [1; 6]$, donc $[1; 6]$ est stable par f , contient ℓ_1 et tous les termes de la suite.

L'inégalité des accroissements finis, permet de montrer successivement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell_1| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} |u_n - \ell_1|.$$

Puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \ell_1|.$$

Comme $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| < 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$.

I.5 Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

- (a) I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition (1)**.
 - (b) I est un segment $[a; b]$ i.e. fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.
2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)**.

On récupérera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

3. I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f . C'est le contenu de la **proposition (4)** et du **théorème (5)**.

S'il n'en contient pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

4. (a) Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- (b) Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

Exemples : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0; 1]$, elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.

- (c) Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.4a.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- ◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

- (d) Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiative ... Étudier le signe de $f(x) - x$, ...L'énoncé vous aidera !

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 0.
4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Correction :

1. Une étude rapide de la parabole $f : x \mapsto x - x^2 = x(1 - x)$ montre que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f . En particulier, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée, elle converge.
3. Comme f est continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers les points fixes de f . 0 étant le seul, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Comme $] -\infty; 0[$ est stable par f et ne contient aucun point fixe, si $a \in \mathbb{R}_*^-, (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait converger. Elle diverge.

Commentaires : Comme $f([1; +\infty]) \subset \mathbb{R}_*^-,$ on obtient également la divergence si $a > 1$.

II/ Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ sont p scalaires fixés de $\mathbb{K}$, a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Exemple 7 : Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n

Vous étudierez ces suites, liées à la réduction des endomorphismes, plus en détail l'année prochaine.

Même si, toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre $p > 1$ peuvent se ramener aux précédentes via le calcul matriciel, celles-ci peuvent aussi s'étudier de manière directe. C'est le cadre de ce dernier paragraphe.

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur se ramène à un problème d'algèbre linéaire. L'expression du terme général d'une telle suite est possible pour peu qu'on soit capable de factoriser un polynôme qui lui est associé, appelé *polynôme caractéristique*.

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - a_{p-2} X^{p-2} - \cdots - a_1 X - a_0.$$

Son degré est ainsi égal à l'ordre de la relation de récurrence.

En particulier, dans le cas des suites d'ordre 2, le polynôme est de degré 2 et peut donc être factorisé à l'aide d'un calcul de discriminant. Ainsi, le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 peut être exprimé en utilisant seulement les deux premiers termes, quelques valeurs constantes, quelques opérations élémentaires de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, exponentielle) et les fonctions sinus et cosinus (si le corps des scalaires est le corps des réels).

Une des suites de ce type est la célèbre suite de Fibonacci, qui peut s'exprimer à partir de puissances faisant intervenir le nombre d'or.

Définition 3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) : On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (\text{XIX.3})$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 4 (Équation caractéristique) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (XIX.3).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

II.1 Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^N$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Preuve :

1. Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions $r_1 \neq r_2$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

$$\text{Pour } n = 0 \text{ et } n = 1, \text{ on obtient } \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}.$$

Comme $r_1 \neq r_2$, ce système admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}; \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \right).$$

Si λ et μ conviennent, alors leur valeur est donnée par la résolution de ce système et donc le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par une récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

car $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Supposons maintenant que l'équation admette une solution double $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est $r \neq 0$, donc il admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(u_0; \frac{u_1 - r u_0}{r} \right).$$

S'il existe, le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n (a r + b) + \mu n r^n (a r + b) + \mu r^{n+1} a \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu(n+2)r^{n+2} \text{ car } r^2 = a r + b \text{ et } r = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

II.2 Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose ici que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une suite à valeurs réelles.

Théorème 7 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

3. Si $\Delta < 0$ et $r e^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos(n\omega) + \mu \sin(n\omega) \right) r^n.$$

Preuve : Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe. Les scalaires $(\lambda; \mu)$ déterminés en résolvant les systèmes introduits dans la preuve seront cette fois réels.

3. Supposons que l'équation admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = r e^{i\omega}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.

D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe $(A; B) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A r_1^n e^{i n \omega} + B r_2^n e^{-i n \omega}$.

Montrons que $B = \overline{A}$: On sait que :

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ A r_1 + B \overline{r_1} = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{u_1 - \overline{r_1} u_0}{r_1 - \overline{r_1}} \\ B = \frac{u_1 - r_1 u_0}{\overline{r_1} - r_1} = \overline{A}. \end{cases} \quad (r_1 \neq \overline{r_1} \text{ car } r_1 \notin \mathbb{R})$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= A r_1^n e^{i n \omega} + \overline{A} r_2^n e^{-i n \omega} \\ &= r^n \times 2 \operatorname{Re} (A e^{i n \omega}) \\ &= r^n \left(2 \operatorname{Re} (A) \cos(n\omega) - 2 \operatorname{Im} (A) \sin(n\omega) \right) \\ &= r^n \left(\lambda \cos(n\omega) + \mu \sin(n\omega) \right). \end{aligned}$$

Exemple 8 (Suite de Fibonacci ^[2]) : Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $F_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n).$$

Exercice 4 : Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

Correction : $E_c : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une solution double 2.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= (k_1 n + k_2)2^n. \\ \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ (k_1 + k_2) \times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n - 1)2^n.$$

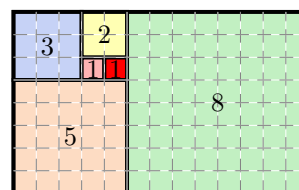
[2]. **FIBONACCI Leonardo**, italien, 1175 ?-1240 ?. De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant « fils de Bonaccio »), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourut l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes.

Dans son *Liber Abaci* (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien **Al Khwarizmi**.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits « arabes » (système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, *Practica geometriae* (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques, et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (*Liber Quadratorum*, 1225).

Le *Liber Abaci* est aussi un recueil de « petits » problèmes comme celui, resté célèbre, de la reproduction des lapins :

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci.

Suites récurrentes

I/ Comportement asymptotique

Exercice 1 : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n , $0 \leq u_n \leq 4$.
2. Prouver que la suite est strictement croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) telle que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3 : Soit a un réel strictement positif.

Un peu d'histoire : Les babyloniens (2000 avant J-C) ont, semble-t-il, utilisé comme approximation de $\sqrt{a}$ la quantité $\frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right)$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$, par exemple sa partie entière. Le procédé peut être itéré.

On définit les deux suites :

$$\begin{cases} b_0 \text{ est arbitraire, élément de }]\sqrt{a}; +\infty[\\ a_n = \frac{a}{b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{a}{b_n} \right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \sqrt{a} \leq b_n$
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \sqrt{a}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $b_0 \geq \sqrt{a}$ par définition puis $a_0 = \frac{a}{b_0} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. La propriété est initialisée.

Pour l'hérédité rapidement, en supposant qu'il existe un rang n tel que $a_n \leq \sqrt{a} \leq b_n$, on remarque d'abord que $b_n > 0$ puis

$$b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(b_n - \sqrt{a})^2}{2b_n} \geq 0. \quad (\text{XIX.1})$$

D'où, $b_{n+1} \geq \sqrt{a}$ et $a_{n+1} = \frac{a}{b_{n+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

L'encadrement est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$. Donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers un réel $\beta \geq \sqrt{a}$. Remarquons que β est strictement positif.
- (b) $a_{n+1} - a_n = \frac{a}{b_{n+1}} - \frac{a}{b_n} \geq 0$. Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers un réel $\alpha \leq \sqrt{a}$.
3. Il en résulte que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite α et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une limite β .

En passant à la limite dans les relations définissant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\alpha = \frac{a}{\beta} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \iff \alpha = \beta.$$

D'où $\beta^2 = a$ avec $\beta > 0$ $\alpha = \beta = \sqrt{a}$.

Prenons l'exemple de $a = 2$, en partant de $b_0 = 2$.

On obtient successivement :

$$\begin{array}{rcccccc} a_n = & 1 & 1.333333333 & 1.411764706 & 1.414211438 & 1.414213562 \\ b_n = & 2 & 1.500000000 & 1.416666667 & 1.414215686 & 1.414213562 \end{array}$$

```

1 def heron(a, p):
2     u = 2 # premier terme quelconque strictement plus grand que sqrt(a)
3     delta = 1
4     n = 0
5     while delta >= 10*(-p):
6         prec = u
7         u = 0.5 * (u + a/u)
8         delta = abs(prec - u)
9         n += 1
10
11     return u, n

```

La convergence est très rapide. Le nombre de décimales exactes croît exponentiellement avec n :

À partir de (XIX.1), on a facilement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} (b_n - \sqrt{a})^2$, ce qui signifie que d'un terme à l'autre, le nombre de décimales correctes double. On dit que la convergence est *quadratique*.

Exercice 4 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On considère les suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Correction : Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0. \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n.$$

Par conséquent :

$$\text{— } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0 : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît.}$$

$$\text{— } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{(u_n - v_n)v_n}{u_n + v_n} \geq 0 : (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croît.}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_0 \leq v_n \leq u_n$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle converge vers un réel a .

De même $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_0 \geq u_n \geq v_n$: la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle converge vers un réel b .

$$\text{On a } a = \frac{a+b}{2} \text{ et } b = \frac{2ab}{a+b} \text{ soit } a = b.$$

On peut remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = u_0 v_0$.

Par conséquent, en passant à la limite, $a^2 = u_0 v_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{u_0 v_0}$.

Commentaires : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie à partir de la moyenne arithmétique des termes des deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tandis que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est leur moyenne harmonique. Il est tout de même rigolo que ces deux suites convergent vers la moyenne géométrique de leur premier terme.

Exercice 5 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On souhaite montrer que les suites $(w_n = u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n = u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :
 - (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|w_{n+1} - t_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |w_n - t_n|.$$

(c) En déduire que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
4. Résoudre l'équation $x = \frac{1}{1+x}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II/ Suites récurrentes

Exercice 6 : Dans un repère, représenter les suites suivantes :

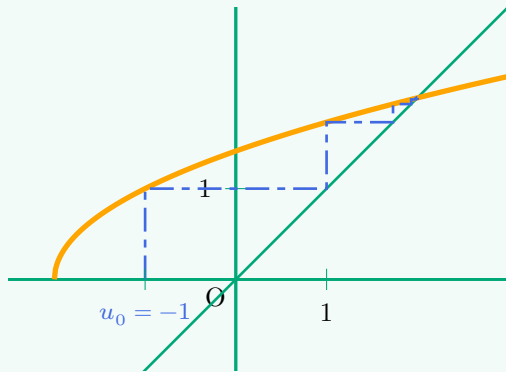
1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$

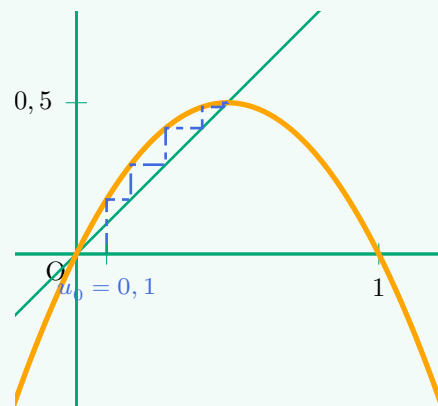
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

Correction :

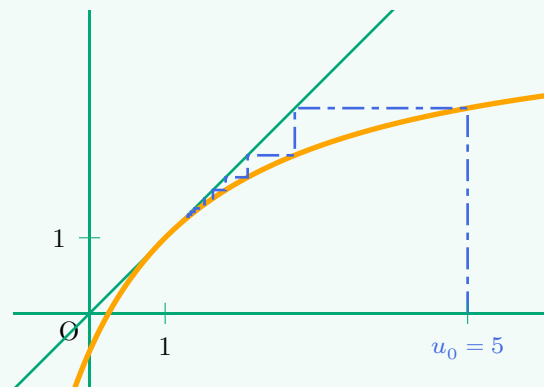
1.



2.



3.



Exercice 7 : On considère la suite u définie par la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2u_n^2 \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Correction : La fonction associée $f : x \mapsto x + 2x^2$ est croissante sur l'intervalle stable $\mathbb{R}_+^*$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, monotone puis croissante.

Si elle était majorée, comme f est continue, elle convergerait vers un point fixe de f qui n'en a pas dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{6 + x}$ pour $x \geq 0$.

Par le théorème de convergence monotone :

1. Montrer que $[3; +\infty[$ est stable par f . Qu'en déduit-on ? Donner les limites possibles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et conclure sur la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par l'inégalité des accroissements finis :

1. Calculer $\sup_{[3; +\infty[} (f')$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - 3 < \frac{1}{6^{n-1}}$.
2. Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction :

Par le théorème de convergence monotone :

1. Par composition des fonctions usuelles, f est clairement croissante sur $[3; +\infty[$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc correctement définie.

Comme f est continue sur $[3; +\infty[$, toute éventuelle convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se fera vers un des points fixes de f dans $[3; +\infty[$. En écartant -2 , le seul possible est 3.

2. Par croissance de f , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Avec $u_1 = \sqrt{6 + u_0} = \sqrt{15} < 9 = u_0$, elle est décroissante.

Minorée par 3, elle converge.

D'après la question précédente, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Par l'inégalité des accroissements finis :

1. La fonction f est dérivable sur $] -6; +\infty[$ donc sur $[3; +\infty[$ où l'on a :

$$0 \leq f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \implies \forall x \in [3; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{6}.$$

Pour tout a, b de $[3; +\infty[$, f est continue sur $[a; b]$ et (au moins) dérivable sur $]a; b[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{6} |b - a|.$$

En appliquant cette inégalité à $[3; u_{n-1}] \subset [3; +\infty[$, on obtient finalement :

$$|u_n - 3| \leq \frac{1}{6} |u_{n-1} - 3| \iff 0 < u_n - 3 \leq \frac{1}{6} (u_{n-1} - 3).$$

Une récurrence immédiate entraîne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 3| \leq \frac{1}{6^n} |u_0 - 3| = \frac{1}{6^{n-1}}.$$

2. Comme $0 < \frac{1}{6} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

L'avantage à précédemment est que l'on peut, cette fois, gérer l'erreur commise en calculant u_n .

Exercice 9 : Étude complète de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

Correction : On pose donc $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Elle est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et $]0 ; \infty[$.

Par ailleurs, $f(x) - x = \frac{1 + x - x^2}{x} = -\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x}$, où $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sont les points fixes de f .

On résume tout cela dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	x_1	0	$\frac{3}{2}$	x_2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			-	-		
f	1	x_1	$+\infty$	$\frac{5}{3}$	x_2	$\frac{3}{2}$	1
$f(x) - x$	+	0	-	+	0	-	

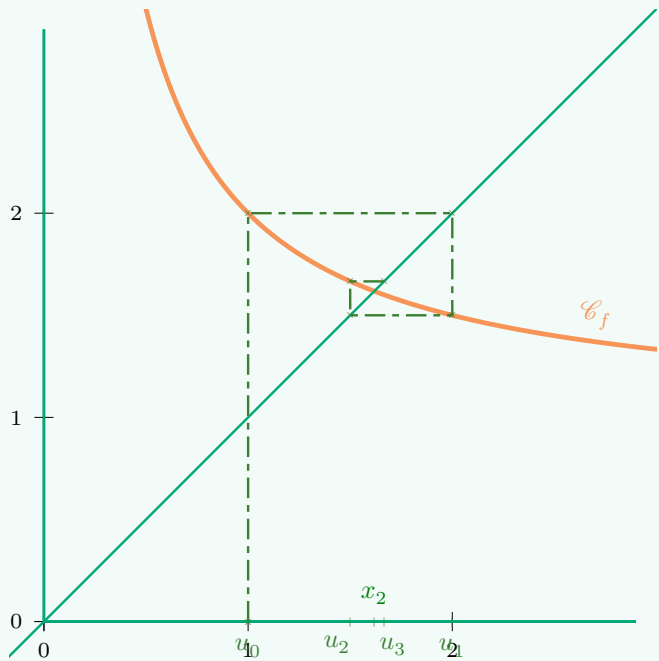


Figure XIX.10 – Premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

On constate que la suite semble converger vers x_2 , reste à le prouver rigoureusement.

1. Commençons par chercher un intervalle stable intéressant pour l'étude de notre suite. L'intervalle naturel semble être $[1; 2]$, les deux premiers termes de la suite étant respectivement égaux à 1 et 2, mais cela pose des problèmes ultérieurement pour la majoration de la dérivée, alors on prendra plutôt

$$I = \left[\frac{3}{2}; 2 \right].$$

Bien sûr, u_0 n'appartient pas à cet intervalle mais ce n'est pas très gênant.

Vérifions que I est stable par f :

Sur I , f est décroissante et on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3}$, $f(2) = \frac{3}{2}$ donc

$$f\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right] \subset I.$$

I est stable par f .

2. On démontre alors facilement par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I$. L'hérédité étant immédiatement induite par la stabilité de I par f .
3. De plus, sur notre intervalle I , on peut majorer la valeur absolue de la dérivée de f :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{4}{9} < 1.$$

4. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis en prenant $x = u_n$ et $y = x_2$ [3].

On obtient :

$$|f(u_n) - f(x_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_2| \iff |u_{n+1} - f(x_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - x_2|.$$

5. Les dernières étapes sont alors toujours les mêmes :

(a) On prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - x_2|$.

(b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 0$ et $|u_1 - x_2|$ est borné, le théorème d'encadrement assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - x_2| = 0$ i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Remarquez bien que la fonction f était décroissante donc, sans l'inégalité des accroissements finis, nous aurions dû étudier les suites extraites d'indices pair et impair en espérant prouver qu'elles étaient adjacentes. L'inégalité des accroissements finis nous a donc épargné un fastidieux et incertain travail.

Exercice 10 : Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Correction : Posons $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ et $g : x \mapsto f(x) - x$ définies sur $] -1; +\infty[$ et dérivables.

Une rapide étude de fonction, montre que :

$$g'(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
g	$-\infty$	0	$-\infty$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

En particulier, $\forall x \in]-1; +\infty[, g(x) \leq 0$ et 0 est le seul point fixe de f .

1. Si $u_0 > 0$ comme $\forall x > 0, f(x) = \ln(1+x) > \ln(1) = 0$, l'intervalle $I =]0; +\infty[$ est stable par f . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et est strictement positive.

Comme $\forall x \in I, g(x) \leq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge.

Comme f est continue en 0, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers son point fixe 0.

2. Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. Il reste donc à étudier le cas où $u_0 \in]-1; 0[$.

Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leq -1$.

En supposant le contraire, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans $] -1; 0[$ et strictement décroissante. Étant minorée par -1 , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1; 0[$. Le cas $\ell = 0$ est exclu par stricte décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il reste donc deux cas :

- Soit $\ell \in]-1; 0[$ et par continuité de f , la suite ne peut converger car f ne possède pas de point fixe dans cet intervalle d'où une contradiction.
- Si $\ell = -1$ alors il existe un rang N tel que $u_N \leq -0,9$.

Mais alors, $u_{N+1} \leq \ln(-0,9 + 1) \simeq -2,3 < -1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.

En conclusion, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leq -1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

1. si $u_0 \in]0; +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, convergente vers 0,
2. si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante,
3. et si $u_0 \in]-1; 0[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Exercice 11 : Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Correction :

1. (a) Pour tout choix de $u_0, u_1 \in [-1, 1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1, 1]$.
- (b) Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- (c) Si $u_0 \in [-1; 0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ étant impaire, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = -u_n$.

On supposera dorénavant que $u_0 \in]0, 1]$.

Puisque $]0, 1] \subset]0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(]0, 1]) \subset]0, 1]$ et l'intervalle $I =]0, 1]$ est stable par f .

Ainsi, si $u_0 \in]0, 1]$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.

Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = \sin(x) - x$. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, $g'(x) = \cos(x) - 1$. g' est strictement négative sur $]0, 1]$ et donc strictement décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que pour $x \in]0, 1]$, $g(x) < g(0) = 0$.

Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0, 1]$.

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f . L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0, 1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

L'étude préliminaire montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout choix de u_0 .

2. Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ puis $u_2 \in [0, 1]$.

On supposera dorénavant que $u_0 \in [0, 1]$.

On a $\cos([0, 1]) = [\cos(1), \cos(0)] = [0, 504\dots, 1] \subset [0, 1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ laisse stable l'intervalle $I = [0, 1]$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = \cos(x) - x$. g est somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0, 1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$.

De plus, g est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = \cos(0) > 0$ et $g(1) = \cos(1) - 1 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones g s'annule donc une et une seule fois sur $[0, 1]$ en un certain réel α .

Ainsi, f admet sur $[0, 1]$ un unique point fixe, à savoir α . Puisque f est continue sur le segment $[0, 1]$, on sait que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers α .

La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin(x)| \leq \sin(1) < 1.$$

L'inégalité des accroissements finis montre alors que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x - y|.$$

Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \sin(1)|u_n - \alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel n ,

$$|u_n - \alpha| \leq (\sin(1))^n |u_0 - \alpha| \leq (\sin(1))^n.$$

Comme $0 \leq \sin(1) < 1$, la suite $(\sin(1))^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Remarques :

- On peut noter que puisque la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0 \in [0, 1]$).
- On peut noter également que si $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin(1))} = 26,6\dots$, alors $(\sin(1))^n < 10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha \simeq 0,73\dots$ (et même facilement $\alpha \simeq 0,739087042\dots$).

Exercice 12 : Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Correction : Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) \quad (\text{XIX.2})$$

$$u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \quad (\text{XIX.3})$$

$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2). \quad (\text{XIX.4})$$

1^{er} cas. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

2^{ème} cas. Si $u_0 \in]1, 2[$, (XIX.3) et (XIX.4) permettent de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]1, 2[$.

(XIX.2) montre alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Étant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [1, u_0] \subset [1, 2[$.

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

3^{ème} cas. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, (XIX.4) permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.

Mais alors, (XIX.2) montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0, +\infty[\subset]2, +\infty[$.

f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4^{ème} cas. Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1, 2[$ ce qui ramène au deuxième cas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

5^{ème} cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1.

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

6^{ème} cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0, 2[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, si $u_0 \in \{0, 2\}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

III/ Suites récurrentes linéaires

Exercice 13 : Dans chacun des cas suivants, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que :

1. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_n u_{n+2} = 2u_{n+1}^3 \end{cases}$

Correction :

1. Cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique E_c est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 1^n + k_2 2^n.$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.$$

2. $E_c : r^2 = -2r - 2$ a pour solution $-1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm \frac{3i\pi}{4}}$.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(k_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + k_2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right).$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ \sqrt{2}(k_1 \frac{-\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3n\pi}{4} + 2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right).$$

3. Cette suite n'est pas récurrente linéaire à cause du +2. On va donc appliquer une méthode proche de celle employées avec les équations différentielles :

— Recherche d'une solution particulière (α_n).

On cherche une solution particulière sous la forme d'une suite constante $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \lambda$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 6\alpha_n + 2 &\Leftrightarrow \lambda = 5\lambda - 6\lambda + 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

La suite (α_n) constante égale à 1 vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 6\alpha_n + 2$$

- **Recherche de la solution homogène i.e. la solution de** $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$ qui est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$E_c : r^2 = 5r - 6 \text{ a pour solutions } 2 \text{ et } 3.$$

D'après le cours, il existe donc k_1 et k_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k_1 2^n + k_2 3^n.$$

- **Solution générale :**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \\ &= 5u_{n+1} - 6u_n + \alpha_{n+2} - 5\alpha_{n+1} + 6\alpha_n \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - \alpha_{n+2} &= 5(u_{n+1} - \alpha_{n+1}) - 6(u_n - \alpha_n) \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u - \alpha)_{n+2} &= 5(u - \alpha)_{n+1} - 6(u - \alpha)_n \\ \Leftrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (u - \alpha)_n &= k_1 2^n + k_2 3^n \\ \Leftrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= k_1 2^n + k_2 3^n + \alpha_n \\ \Leftrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \underbrace{k_1 2^n + k_2 3^n}_{\text{sol. gén. rel. homogène}} + \underbrace{1}_{\text{sol. part.}} \end{aligned}$$

- **Recherche de la suite vérifiant les conditions initiales :**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 1 = 1 \\ 2k_1 + 3k_2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n + 1.$

4. Cette équation n'est pas non plus linéaire.

- (a) **Solution particulière :**

On cherche une solution particulière sous la forme d'une suite affine en n : $\alpha_n = \lambda n + \mu.$

$$\text{On trouve : } \alpha_n = n + \frac{2}{3}$$

- (b) **Solution homogène de** $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$

$$E_c : r^2 = 10r - 21 \text{ a pour solutions } 3 \text{ et } 7$$

D'après le cours, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = k_1 3^n + k_2 7^n$

- (c) **Sol générale :**

La suite recherchée est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k_1 3^n + k_2 7^n + n + \frac{2}{3}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

- (d) **Conditions initiales :**

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3^n + \frac{7^n}{3} + n + \frac{2}{3}.$

5. L'idée est de linéariser car au logarithme.

- On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$
— On peut alors poser $v_n = \ln(u_n)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n u_{n+2}) &= \ln(2u_{n+1}^3) \\ v_n + v_{n+2} &= \ln 2 + 3v_{n+1}. \end{aligned}$$

- Le même raisonnement que précédemment conduit alors à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = k_1 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + k_2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - \ln 2.$$

— On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} \exp \left(k_1 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + k_2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

— Les constantes k_1 et k_2 sont déterminées par les conditions initiales. On trouve :

$$k_1 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sqrt{5}}{10} (2 \ln 3 - \ln 2) \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\sqrt{5}}{10} (2 \ln 3 - \ln 2).$$

Exercice 14 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n .

Exercice 15 (Suite de Fibonacci bis) : Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer F_n pour tout entier n .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
3. Montrer que la suite $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)_{n \geq 1}$ converge, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} F_k = -F_n$.

Correction :

1. $(E_c) : r^2 = r + 1$ dont les solutions sont $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or et $\bar{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Donc il existe deux constantes, α et β telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \alpha \varphi^n + \beta \bar{\varphi}^n.$$

α et β sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \varphi + \beta \bar{\varphi} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2. Par récurrence :

— $F_{0+1}^2 - F_0 F_{0+2} = 1^2 - 0 \times 1 = 1 = (-1)^0$.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1} (F_{n+1} + F_{n+2}) \\ &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_{n+2} \\ &= F_{n+2}^2 - [(-1)^n + F_n F_{n+2}] - F_{n+1} F_{n+2} \quad (\text{H.R.}) \\ &= (-1)^{n+1} + F_{n+2} \left[\underbrace{F_{n+2} - F_n - F_{n+1}}_{=0} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \forall n \geq 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\alpha \varphi^{n+1} + \beta \bar{\varphi}^{n+1}}{\alpha \varphi^n + \beta \bar{\varphi}^n} = \frac{\varphi^{n+1} [\alpha + \beta (\bar{\varphi}/\varphi)^{n+1}]}{\varphi^n [\alpha + \beta (\bar{\varphi}/\varphi)^n]} \\ &= \varphi \frac{\alpha + \beta (\bar{\varphi}/\varphi)^{n+1}}{\alpha + \beta (\bar{\varphi}/\varphi)^n}. \end{aligned}$$

Comme $\bar{\varphi}/\varphi \in]-1; 1[$, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$.

4. φ et $\bar{\varphi}$ sont solutions de $r^2 = r + 1$, donc $\varphi^2 = 1 + \varphi$ et $\bar{\varphi}^2 = 1 + \bar{\varphi}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha \varphi^k + \beta \bar{\varphi}^k) = \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^k + \beta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bar{\varphi}^k \\ &= \alpha (1 + \varphi)^n + \beta (1 + \bar{\varphi})^n = \alpha (\varphi^2)^n + \beta (\bar{\varphi}^2)^n = \alpha \varphi^{2n} + \beta \bar{\varphi}^{2n} \\ &= F_{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Dans la même idée, on a : $\begin{cases} 1 - \varphi = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi} \\ 1 - \bar{\varphi} = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varphi \end{cases} \quad \text{et } \beta = -\alpha.$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} F_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\alpha \varphi^k + \beta \bar{\varphi}^k) = \alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^k + \beta \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \bar{\varphi}^k \\ &= \alpha (1 - \varphi)^n + \beta (1 - \bar{\varphi})^n = \alpha \bar{\varphi}^n + \beta \varphi^n \\ &= -[\beta \bar{\varphi}^n + \alpha \varphi^n] \\ &= -F_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} F_k = -F_n.$$

Systèmes linéaires et Suites récurrentes

1. Vérifier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 8 \\ -4 & -3 & 5 & 13 \\ -5 & -4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$ et donner son inverse le cas échéant.

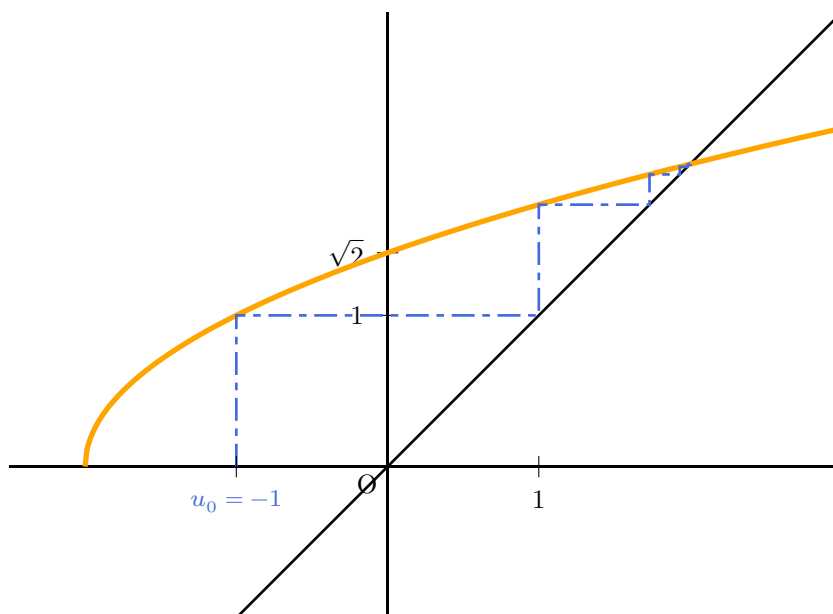
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système ci-dessous. On s'appliquera sur l'écriture de l'ensemble solution.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ z - t = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ z - t = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y - z \\ y = y \\ z = z \\ t = -1 + z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

3. Dans le repère ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.



4. À partir de la contraposée du théorème ci-dessous, écrire 3 propositions équivalentes entre elles.

Théorème 10 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- (iii) $\text{rg}(A) = n$.
- (iv) $A \sim_L I_n$.
- (v) A est inversible.
- (vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 10.1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A N'est PAS inversible.
- (ii) Il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
- (iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A .

Systèmes linéaires et Suites récurrentes

1. Vérifier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner son inverse le cas échéant.

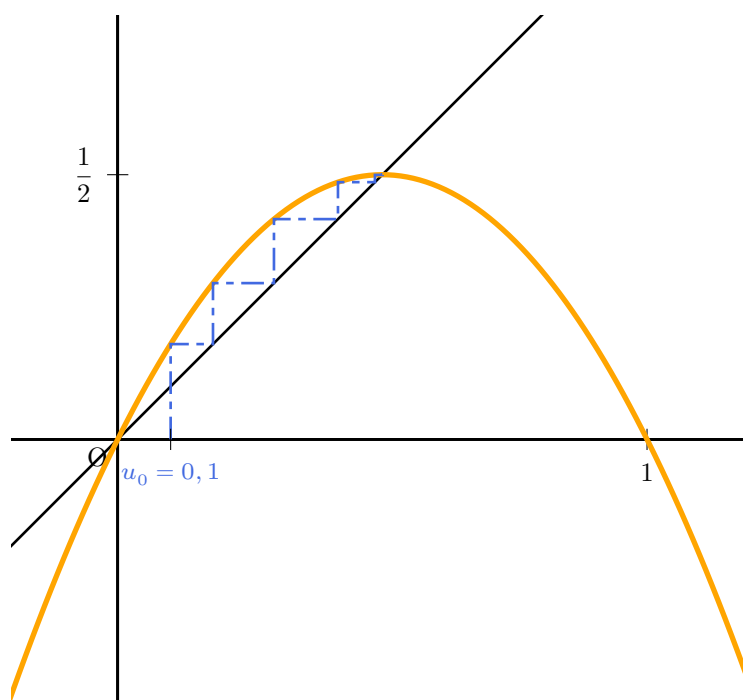
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 8 \\ -4 & -3 & 5 & 13 \\ -5 & -4 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système ci-dessous. On s'appliquera sur l'écriture de l'ensemble solution.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ y - z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ y - z - t = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y - z - t = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = z + t + 1 \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

3. Dans le repère ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$.



4. À partir de la contraposée du théorème ci-dessous, écrire 3 propositions équivalentes entre elles.

Théorème 10 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
- (iii) $\text{rg}(A) = n$.
- (iv) $A \sim_L I_n$.
- (v) A est inversible.
- (vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 10.1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A N'est PAS inversible.
- (ii) Il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
- (iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A .

Table des figures

I.1	Table de vérité de la négation.	10
I.2	Table de vérité des connecteurs logiques	11
I.3	Table de vérité de l'implication.	13
I.4	Table de vérité de l'équivalence.	16
I.5	Négation d'une implication.	17
I.6	Négation d'une équivalence.	17
II.1	Les ensembles de nombres usuels	46
II.2	Image directe d'une partie par une application. On parle ici de <i>diagramme sagittal</i>	49
II.3	Diagramme sagittal d'une fonction surjective.	50
II.4	Diagramme sagittal d'une fonction injective.	51
II.5	Image réciproque d'une partie par une application.	53
II.6	Complémentaire d'une partie.	55
II.7	Intersection d'ensembles.	56
II.8	Ensembles disjoints et distincts.	57
II.9	Réunion d'ensembles.	58
II.10	Différence de deux ensembles.	60
II.11	Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.	62
II.12	Sections de $A \times B$	65
II.13	$(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$	66
III.1	Les nombres premiers inférieurs à 100.	96
III.2	Crible d'Ératosthène	97
III.3	Algorithme optimisé testant la primalité d'un nombre : Sachant, qu'hormis 2 et 3, les nombres premiers peuvent s'écrire $6n \pm 1$, vérifier la divisibilité du nombre donné avec 2 et 3, puis vérifier chaque nombre qui a la forme $6n \pm 1$ est une solution plus efficace que tester chaque entier.	97
III.4	Algorithme d'Euclide	106
IV.1	Graphe d'une relation qui n'est pas une fonction car $x\mathcal{R}y = x\mathcal{R}y'$ mais $y \neq y'$	142
IV.2	Diagramme sagittal d'une fonction qui n'est pas une application.	142
IV.3	Diagramme sagittal d'une application.	143
IV.4	$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	144
IV.5	Diagramme sagittal d'une composée	148
IV.6	Diagramme sagittal d'une composée	148
IV.7	La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas représentable au voisinage de 0.	150
IV.8	$x \mapsto g(x) = f(x) + a$ et $x \mapsto g(x) = f(x - a)$	151
IV.9	$x \mapsto g(x) = f(a - x)$	151
IV.10	$x \mapsto g(x) = f(ax)$ et $x \mapsto g(x) = af(x)$	151
IV.11	$x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont respectivement paires et impaires.	152
IV.12	$x \mapsto \frac{5x}{x^4 + 1}$ est impaire.	153
IV.13	$x \mapsto e^{-x^2}$ est paire.	153
IV.14	Une fonction croissante conserve les inégalités, une décroissante les renverse.	154
IV.15	Courbe représentative d'une fonction bornée.	156
IV.16	Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.	158
IV.17	f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geq 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$	161
IV.18	Exemples de fonctions définies continues et discontinues en un point a	161
IV.19	Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.	164
IV.20	Diagramme sagittal d'une fonction bijective.	167
IV.21	Fonction bijective sur son ensemble de définition, non continue.	168
IV.22	$x \mapsto x^2$ et sa réciproque $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$	170
IV.23	Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	172
IV.24	$(\Delta) : x = 2$ est axe de symétrie de la courbe de $x \mapsto \ln x^2 - 4x + 3 $	178
IV.25	$A(1; -3)$ est centre de symétrie de la courbe de $x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$	179

V.1	Courbe représentative de $x \mapsto -\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} = -\frac{1}{5}(x+2)(x-7)$	213
V.2	Tableau de variation d'un trinôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans le cas où $a > 0$ et $\Delta > 0$	214
V.3	Limites en l'infini des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	215
V.4	Tableau de variation d'une fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ dans le cas où $ad - bc < 0$ et $c \neq 0$	217
V.5	Courbe représentative de $x \mapsto \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$	217
V.6	Limite en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	218
V.7	Courbes représentatives de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et $x \mapsto x \ln(x)$	224
V.8	Courbe représentative de $x \mapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.	225
V.9	Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	227
V.10	Courbe représentative de $x \mapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.	234
V.11	La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \mapsto a^x$	236
V.12	Les fonction puissances $x \mapsto x^\alpha$	238
V.13	Les courbes représentatives de $x \mapsto x^\alpha$ et de sa réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	239
V.14	Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \log(x)$ et sa tangente en 1.	242
V.15	Tableaux de variation de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	245
V.16	Courbes représentatives de $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ et leur tangente en 0.	245
V.17	Courbe représentative de $x \mapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.	259
V.18	Courbe représentative de $x \mapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.	263
V.19	La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \mapsto a^x$	265
V.20	Les fonction puissances $x \mapsto x^\alpha$	269
V.21	Tableau de variation $x \mapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$	273
V.22	Courbe représentative de $x \mapsto \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$	274
V.23	Tableau de variation $x \mapsto \operatorname{argth} x$ sur $\mathbb{R}$	275
V.24	Courbe représentative de $x \mapsto \operatorname{argth} x$ sur $] -1 ; 1[$. En dash, la courbe de th et ses asymptotes.	275
VI.1	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	288
VI.2	$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	289
VI.3	Triangle de Pascal	295
VI.4	Sommation par tranches	300
VI.5	$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$	307
VII.1	Angles remarquables.	330
VII.2	Pour tout nombre réel x , il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x radians.	331
VII.3	Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.	331
VII.4	Cosinus et sinus d'angles remarquables.	332
VII.5	Équations trigonométriques.	334
VII.6	Trigonométrie dans un triangle.	335
VII.7	Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.	335
VII.8	$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π -périodiques.	338
VII.9	$x \mapsto \cos(5x)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En physique, on parle de dilatation temporelle.	339
VII.10	Tableau de variations de $x \mapsto \cos(x)$	344
VII.11	Tableau de variations de $x \mapsto \sin(x)$	344
VII.12	Tableaux de variation des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	344
VII.13	Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$	344
VII.14	La fonction $\cos$ est continue strictement décroissante de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. Elle y réalise donc une bijection.	345
VII.15	La fonction $\sin$ est continue strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. Elle y réalise donc une bijection.	346
VII.16	Tableaux de variation de $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$	349
VII.17	Courbes représentatives de $x \mapsto \arccos(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$. En dash, les courbes de $\cos$ et $\sin$	350
VII.18	$\tan(x)$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	350
VII.19	Tangente d'angles remarquables.	351
VII.20	Tableau de variation $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	354

VII.21	Courbe représentative de $x \mapsto \tan(x)$ sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$	354
VII.22	La fonction $\tan$ est continue et strictement monotone de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.	357
VII.23	$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$	358
VII.24	Tableau de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de $\tan$	359
VII.25	Tableaux de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$. En dash, la courbe de $\sin$	383
VII.26	Tableaux de variation et courbe représentative de $x \mapsto \arcsin(x)$ sur $[-1; 1]$. En dash, la courbe de $\sin$	385
VIII.1	Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.	429
VIII.2	Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.	436
VIII.3	Formes exponentielles remarquables	438
VIII.4	Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se <i>multiplient</i> et les arguments s' <i>ajoutent</i>	443
VIII.5	Nombres complexes ayant la même exponentielle.	452
IX.1	Primitives de $x \mapsto \frac{x}{2}$	505
IX.2	$\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire algébrique du domaine orangé en unité d' aire	511
IX.3	Méthode des rectangles (à gauche).	511
IX.4	D'un point de vue graphique, l'aire $\int_a^b f(t) dt$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ne peut donc faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle.	514
IX.5	Signaux pseudo-périodiques avec enveloppe exponentielle. La charge d'un condensateur dans un circuit RLC est de ce type.	535
X.1	Polygones réguliers à 3 , 4 et 5 sommets.	587
X.2	Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.	591
X.3	Inégalité triangulaire.	592
X.4	Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$	592
X.5	Angle de deux vecteurs	593
X.6	Angle formé par 4 points.	594
X.7	Translation de vecteur $\vec{u}$	602
X.8	Homothétie de centre Ω et de rapport r	603
X.9	Rotation de centre Ω et d'angle θ	604
X.10	Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$	606
X.11	Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$	607
XI.1	Circuit RL	665
XI.2	Intensité dans un circuit RL en régime forcé.	665
XI.3	Circuit LC.	671
XI.4	Circuit RLC.	672
XI.5	Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime apériodique.	672
XI.6	Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime pseudo-périodique.	673
XI.7	Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime critique.	673
XI.8	Oscillateur harmonique en régime libre	681
XI.9	Oscillateur harmonique en régime forcé	683
XII.1	$x \mapsto x $	753
XII.2	$ x \leq r$ et $ x \geq r$	754
XII.3	Courbe représentative de $x \mapsto x $ sur $\mathbb{R}$	757
XII.4	$\mathbb{R}$ est archimédien.	758
XII.5	$x \mapsto [x]$	759
XII.6	Développement décimal infini du réel x	766
XIII.1	Matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	806
XIII.2	Produit matriciel	808
XIII.3	Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.	812
XIV.1	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.	856
XIV.2	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.	857
XIV.3	La suite définie par $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \frac{3}{2}$	863

XIV.4	La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$	864
XV.1	Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a; b[$	935
XV.2	Limite finie en l'infini.	938
XV.3	Limite infinie à l'infini.	938
XV.4	Limites des fonctions de référence en l'infini.	939
XV.5	La fonction $x \mapsto x - [x]$ n'a pas de limite en $\pm\infty$	939
XV.6	Croissances comparées.	940
XV.7	Limite infinie en un point fini	941
XV.8	Limites des fonctions de référence en 0.	941
XV.9	Taux d'accroissement de fonctions dérivables.	941
XV.10	La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.	943
XV.11	La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.	946
XV.12	Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.	947
XV.13	Limites à droite et à gauche d'une fonction	948
XV.14	Les courbes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.	950
XV.15	La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto 3x + 1 + \frac{1}{2(x^3 + 2)}$	951
XV.16	Courbes de $x \mapsto \frac{[x]}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$	971
XVI.1	Continuité et discontinuité en un point.	998
XVI.2	$x \mapsto [\cdot]$	998
XVI.3	Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	1002
XVI.4	$x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.	1005
XVI.5	Graphe de la fonction f , dite de Thomae, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$	1007
XVI.6	Méthode par dichotomie	1009
XVI.7	Dichotomie en <i>Python</i>	1010
XVI.8	Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.	1011
XVI.9	Image d'un intervalle par une fonction non continue	1012
XVI.10	Image d'un intervalle par une fonction continue	1012
XVI.11	$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.	1013
XVII.1	Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.	1064
XVII.2	Les fonctions valeur absolue $x \mapsto x $ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0.	1066
XVII.3	En un point anguleux, la fonction est continue sans être dérivable.	1068
XVII.4	Une fonction peut être continue sans être dérivable ni à gauche, ni à droite.	1069
XVII.5	La tangente est la meilleure approximation affine de f au point a	1071
XVII.6	La courbe d'une fonction dérivable prenant une même valeur en deux points admet une tangente horizontale entre ces derniers.	1083
XVII.7	La condition $f(a) = f(b)$ est nécessaire.	1084
XVII.8	La continuité est nécessaire.	1084
XVII.9	La dérivabilité est nécessaire.	1084
XVII.10	La courbe d'une fonction dérivable passant par deux points A et B admet une tangente parallèle à la droite (AB) entre ces derniers.	1085
XVII.11	f est constante sur I_1 et I_2 mais n'est pas constante sur $I = I_1 \cup I_2$	1089
XVII.12	f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geq 0$ mais n'est pas croissante sur $I = I_1 \cup I_2$	1090
XVII.13	Une fonction dérivable peut avoir une dérivée strictement positive en un point sans être monotone sur un voisinage de celui-ci.	1092
XVIII.1	Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.	1134
XIX.1	$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$	1175
XIX.2	$u_{n+1} = 3,4u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 = 0,2$	1175
XIX.3	Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un cycle.	1175
XIX.4	$u_{n+1} = \sqrt{5}u_n$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$	1177
XIX.5	$u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$	1177
XIX.6	Exemples de suites convergentes	1177

XIX.7 $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
 f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ 1182

XIX.8 $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0, 2$.
 f a deux points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ 1182

XIX.9 Exemples de suites divergentes 1182

XIX.10 Premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ 1198

- Abel, 579
- Adhérence, 935
- Affixe, 425
 - d'un vecteur, 590
- Algorithmme, 1184
 - d'Euclide, 105, 111
 - de Gauss, 1130
- Algèbre, 816, 859, 1000
- Amplitude, 671
- Analyse, 752
- Angle
 - de deux vecteurs, 490, 492, 593, 594
 - Factorisation par l'angle moitié, 447
- Anneau, 816
 - intègre, 809
 - principal, 103
- Antécédent, 48
 - par une application, 141
- Application, 141, 211
 - bijective, 54, 167
 - Composition d', 147
 - Corestriction d'une, 146
 - Graphe d'une, 141
 - idem-potente, 80, 171
 - identité, 145
 - injective, 165
 - involutive, 55, 171
 - linéaire, 649, 1138
 - Prolongement d'une, 146
 - Restriction d'une, 145
 - réelle, 143
 - surjective, 166
 - à valeurs réelles, 143
- Approximation
 - affine, 1070
 - de $\sqrt{a}$, 1193
 - décimale d'un réel, 764, 889
- Arbre pondéré, 102
- Arc
 - cosinus, 346
 - courbe représentative, 349
 - sinus
 - courbe représentative, 349
 - tangente
 - courbe représentative, 359
- Archimède, 735, 995
- Archimédien, 758
- Argument, 593
 - d'un nombre complexe, 435, 440
 - propriétés algébriques, 442
- Arithmétique, 87
- Assertion, 5
- Associative
 - Conjonction et disjonction, 12
- Associativité, 804
- Asymptote, 211, 354, 358, 950
 - au logarithme, 222, 258
 - d'une fonction homographique, 216
 - horizontale, 218, 950
 - oblique, 250, 950, 952
 - verticale, 216, 950
 - à l'exponentielle, 231, 262
- Asymptotique
 - Comportement, 239
 - Direction, 245
- Axe
 - de symétrie, 213
- Base, 666, 669
 - canonique, 807
- Bernoulli, 413
- Bijection, 165, 167, 168, 1018
 - Changement d'indice, 286
 - réciproque, 169
- Binôme
 - de Newton, 821
- Binôme de Newton, 293, 296
- Boileau, 3
- Bolzano, 1007
- Bombelli, 413
- Borne
 - inférieure, 104, 741, 746
 - Caractérisation de la, 743
 - Propriété de la, 744
 - supérieure, 109, 141, 741, 743, 745, 884
 - Caractérisation de la, 743
 - Propriété de la, 741
- Branche
 - parabolique, 951
- Branche parabolique, 568
- $\mathbb{C}$, 42, 415
- Caractérisation
 - des fonctions monotones dérivables, 1090
 - séquentielle de la continuité, 1004
- Cardan, 413
- Cardinal, 282
- Cauchy, 661, 677
 - Problème de, 660, 677
- Centre
 - de symétrie, 216, 348
- Cercle, 592
 - trigonométrique, 66, 587

- Cesàro, 868
- Changement de variables, 522, 523
 - dans une intégrale, 521
- Chaos, 1176
- Circuit
 - LC, 670
 - RL, 652, 664
 - RLC, 671, 672
- Classe
 - d'objets, 8
 - d'équivalence, 138, 329
 - Représentant d'une, 329
- Coefficient
 - binomial, 293, 294
 - d'un polynôme, 213
 - d'une matrice, 800
- Colinéarité, 595
- Combinaison
 - linéaire, 158, 186, 190, 805, 812, 816, 826, 1071
- Commutatif, 291, 319, 736
- Commutative
 - Conjonction et disjonction, 12
 - Loi, 296, 320
- Commutativité, 804
- Comparaison, 883
- Compatibilité
 - avec les combinaisons linéaires, 505
 - de la relation d'ordre, 739
- Comportement
 - asymptotique, 862
- Composée, 229, 261
 - de fonctions, 148
 - de fonctions continues, 162, 187, 1000
 - de fonctions dérivables, 1074
 - de fonctions monotones, 155
- Concavité, 211, 940
 - du logarithme, 224
- Condition
 - initiale, 505, 660, 677
 - nécessaire, 13, 16, 20
 - suffisante, 13, 16, 20
- Conjecture, 9
- Conjugué
 - d'un nombre complexe, 420
 - Propriétés algébriques, 421
- Connecteur
 - logique, 10
- Constante
 - d'Euler, 909
- Continuité, 161, 187, 191, 430, 997, 1006, 1022, 1176, 1182
 - Composée de fonctions continues, 162, 187, 1000
 - des fonctions circulaires, 339
 - Structure, 162, 187, 191, 1000
- Convexité
 - de l'exponentielle, 233
- Corollaire, 9
- Corps, 736
- Cosinus, 331
 - courbe représentative, 344
 - hyperbolique, 244, 265
 - courbe représentative, 245
- Cotangente, 353
- Courbe
 - intégrale, 647, 652, 679
- Courbe représentative, 150, 172
 - de arccosinus, 349
 - de arcsinus, 349
 - de arctan, 359
 - de cosinus, 344
 - de l'exponentielle, 227, 234
 - de l'exponentielle de base a , 238, 269
 - de sinus, 344
 - de tangente, 354
 - du cosinus hyperbolique, 245
 - du logarithme décimal, 242
 - du logarithme népérien, 225
 - du sinus hyperbolique, 245
 - tangente à, 1064
- Crible d'Ératosthène, 96
- Croissance
 - comparée, 353
 - de l'intégrale, 513, 517
- $\mathbb{D}$, 41
- Définition, 8
- Degré
 - d'un polynôme, 213
 - d'une fonction rationnelle, 216
- Démonstration, 9
- Densité
 - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, 764
 - $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, 765
 - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, 764
- Descartes, 64
- Diagramme
 - sagittal, 49, 54
- Diagramme sagittal, 142, 143, 148
- Difféomorphisme, 1076
 - de classe $\mathcal{C}^k$, 1080
- Dilatation, 150
- Dimension, 666
 - d'un espace vectoriel, 1142
- Dirichlet, 448
- Discriminant, 213, 423, 584
- Disque, 592
- Distance, 757
- Distributive
 - Conjonction et disjonction, 12
- Dividende, 92
- Diviseur, 43, 88, 92, 101
 - du pgcd, 107, 126
 - Ensemble des, 103
 - nombre de, 116
- Diviseurs
 - de zéro, 809
- Divisibilité, 104
 - critère, 95
- Division
 - euclidienne, 100, 104

de deux entiers naturels, 92, 123

Droite

numérique achevée, 746
vectorielle, 251, 655

Décimale, 766

Décomposition

en éléments simples, 533
primaire, 98

Déphasage, 671, 682

Dérivabilité, 431, 1062

des fonctions circulaires, 342
sur un intervalle fermé, 1069

Dérivée

$n^{\text{ème}}$, 1078
d'un produit, 158, 186, 190, 1071
d'un quotient, 158, 186, 190, 1071
d'une composée, 220, 229, 1074, 1113, 1115
d'une somme, 158, 186, 190, 1071
de l'inverse, 158, 186, 190, 1071
de la réciproque, 173, 1075
des fonctions usuelles, 1064, 1098
logarithmique, 656
à droite et à gauche, 1067

Déterminant, 595, 825

de deux vecteurs, 595

Développement

décimal infini d'un réel, 766
limité, 951
d'ordre 1, 1070

e, 229, 261

Écriture complexe

d'une homothétie, 604
d'une rotation, 605
d'une similitude, 607
d'une symétrie, 606
d'une transformation, 601
d'une translation, 603

Égalité

des produits en croix, 736

Élément

absorbant, 56, 58, 813
d'un ensemble, 41
inversible, 170
neutre, 56, 58, 804, 813

Élément neutre

pour $+$, 415
pour $\circ$, 149
pour $\times$, 415

Élément simple

de deuxième espèce, 528
de première espèce, 528

Ensemble, 41, 135

de définition, 48, 143
de points, 590
des applications, 141
des parties d'un ensemble, 47
Différence, 59
disjoint, 56
deux à deux, 63

distinct, 56

défini

par compréhension, 42
par construction, 43
par extension, 42
par induction, 43

Définition, 41

Égalité d', 44

Famille, 60

fermé, 747

fini, 279

image directe, 48, 53

image réciproque, 53

inclusion d', 43

incompatible, 56

Intersection, 56

Intersection quelconque, 60

Opérations sur les, 55

ordonné, 139, 185

Partition d'un, 62

Produit cartésien d', 64

Réunion, 58

Réunion quelconque, 60

singleton, 41

stable, 1177

totalelement ordonné, 747

équipotent, 83, 167

Équation

caractéristique, 1188

dans $\mathbb{C}$, 423, 584

de Navier-Stokes, 647

différentielle, 647

homogène, 651, 652

linéaire, 651

normalisée, 652

du second degré dans $\mathbb{C}$, 423

homogène, 649

linéaire, 649

Équation

trigonométrique, 334, 355

Ératosthène, 96

Espace

affine, 650, 1139

métrique, 757

normé, 756, 757

séparé, 942

topologique, 752, 757

vectériel, 650, 655, 666, 669, 805, 855, 874

espace

vectériel, 1139

Euclide, 117

Euler, 337, 413, 933

Formule d', 444

Relation d', 433

euler, 909

Exemple

Contre-, 11

$\exists$, 6

Existence, 20

Exponentielle, 226, 260, 453, 662, 883

- Bijection, 226, 260
- complexe, 435, 451, 666
- Courbe représentative, 234
- de base a , 234
- Dérivée, 228, 260
- Forme algébrique, 451
- Forme polaire, 451
- Limite, 231, 262
- Propriétés algébriques, 229, 261
- relations, 229
- sur $i\mathbb{R}$, 430
- Variations, 228, 260
- Extrema, 1081
- $f'(a)$, 1063
- Facteur de qualité, 671
- Factorielle, 283, 883
- Factorisation
 - de $a^n - b^n$, 291
 - de $a^\Delta - b^\Delta$, 319
 - de sinus et de cosinus, 450
- Famille
 - libre, 666
- Fermat, 102
- Fermé, 934
 - de $\mathbb{C}$, 592
- Fonction, 141, 211
 - affine, 213
 - affine complexe, 607
 - arccosinus, 346
 - arctangente, 350, 356
 - bijective, 435
 - bornée, 155, 745, 968
 - circulaire, 327
 - réciroque, 345
 - concave, 224
 - constante, 1089, 1096
 - continue, 161, 187, 191, 961, 997, 1009, 1176
 - à droite, 997
 - à gauche, 997
 - contractante, 1184
 - convexe, 233
 - corestriction, 169
 - cosinus, 327, 337, 342
 - cosinus hyperbolique, 243, 265, 269
 - Courbe représentative, 211
 - croissante, 154
 - d'atténuation, 664
 - de classe $\mathcal{C}^1$, 1095
 - de classe $\mathcal{C}^\infty$, 1078
 - de classe $\mathcal{C}^n$, 1078
 - de classe $\mathcal{C}^1$, 519
 - de transfert, 682
 - décroissante, 154
 - dérivable, 1063
 - en un point, 1063
 - à droite, 1067
 - à gauche, 1067
 - dérivée
 - usuelle, 1064, 1098
 - exponentielle, 226, 260
 - complexe, 451
 - exponentielle de base a , 235, 236, 264, 265
 - homographique, 216
 - hyperbolique, 242, 265, 269, 327
 - identité, 145
 - impaire, 152, 211, 526
 - indicatrice, 146
 - injective, 415
 - involution, 171
 - lipschitzienne, 1001, 1086, 1087, 1184
 - logarithme décimal, 240
 - logarithme népérien, 219, 256, 327
 - monotone, 966, 1018, 1089, 1179
 - nulle, 652
 - paire, 152, 211, 526, 755
 - partie entière, 240, 759, 791, 998
 - plate, 1106
 - polynomiale, 212
 - produit, 147
 - puissance, 234, 237, 268
 - périodique, 211, 337, 339, 526
 - quotient, 147
 - racine n -ième, 239
 - racine carrée, 169
 - rationnelle, 216
 - sinus, 327, 337, 342
 - somme, 147
 - strictement monotone, 168
 - surjective, 435, 453
 - tangente, 350
 - trigonométrique, 337
 - valeur absolue, 755, 756, 942, 960
 - vectorielle, 430, 431
- Fonctionnelle
 - relation, 220, 229, 261
- Forme
 - algébrique, 416, 420, 421, 436, 437, 441
 - exponentielle, 435, 437, 441
 - trigonométrique, 435, 437, 441
- Formule
 - d'addition, 249, 335, 355, 383, 385
 - de duplication, 249, 336, 355, 385
 - de factorisation, 355, 383, 385
 - de factorisation par l'angle moitié, 249, 448
 - de Fresnel, 450, 669
 - de l'angle moitié, 355, 383, 385
 - de Leibniz, 1079
 - de linéarisation, 249, 336
 - de Moivre, 449
 - de Pascal, 294
 - de réciprocity, 346, 357
 - du capitaine, 294
- Fraction
 - irréductible, 736
- Galois, 579
- Gauss, 87, 413, 579, 1134
 - Pivot de, 1120
- $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$, 822

- Graphe, 1018
 - d'une fonction, 141, 150
 - d'une fonction paire ou impaire, 152
 - d'une fonction réciproque, 172
 - d'une relation binaire, 136
 - Effet d'une transformation sur, 150, 186, 190
 - lisse, 1078
- Grothendieck, 579
- Groupe, 434, 736
 - commutatif, 586, 804
 - linéaire, 822
- Halley, 445
- Homothétie, 603
- Homéomorphisme, 1020
- Humour, 501, 608, 853
 - Logique, 11
- Hyperbole, 216
- Hörner
 - Algorithme de, 214
- i, 416
- Identité
 - remarquable, 419
- Idéal, 103
- Image, 48
 - d'une directe d'une partie, 48, 74
 - par une application, 141
 - réciproque, 53, 76
- Imaginaire
 - pur, 417
- Imf , 168
- imf , 48
- Imparité, 152
- Implication, 12
- Inconnue
 - principale, 1128, 1133, 1140
 - secondaire, 1128, 1140
- Indice
 - d'un produit, 280
 - d'une somme, 280
 - de nilpotence, 821
- Injection, 165
 - canonique, 52, 145
- Intervalle, 748
 - fermé, 749
 - ouvert, 749
 - stable, 1177
- Intégrande, 512, 518
- Intégration, 501
 - par changement de variables, 522
 - par parties, 519
- Intérieur, 935
- Invariant
 - de similitude, 830
- Inverse
 - d'un nombre complexe, 415, 416
 - à droite, 822
 - à gauche, 822
- Inversibilité, 170
- Involution, 171, 1123, 1124
- Inégalité
 - de convexité, 517
 - des accroissements finis, 1086, 1095, 1184
 - Inférieur, 739
 - triangulaire, 428, 755–757, 957
- Inégalités
 - des accroissements finis, 1199
- Jordan, 1134
- Kronecker, 802
- Laplace, 413
- Leibniz, 1079
- Lemme, 9
- Limite, 935, 937
 - Croissance comparée, 223, 231, 239, 258, 262, 265, 269
 - d'un produit, 955
 - d'un quotient, 958
 - d'une composée, 958
 - d'une fonction polynomiale, 215
 - d'une fonction rationnelle, 217
 - d'une fonction à valeurs complexes, 1022
 - d'une somme, 953
 - d'une suite, 867, 960
 - d'une suite convergente, 862, 864
 - d'une suite divergente, 862
 - de arctan, 358
 - de ch, 244, 266
 - de exp, 231, 262
 - de ln, 222, 258
 - de sh, 244, 270
 - de tan, 353
 - de l'inverse, 956
 - Définition topologique, 937
 - en l'infini, 937, 938
 - en un point, 940, 944
 - et inégalités strictes, 871
 - Fonctions de référence, 215, 218
 - fonctions de référence, 941
 - Opérations sur les, 873
 - Propriétés des, 953
 - Unicité de la, 942
 - à droite, 944, 945
 - à gauche, 944, 945
- Linéarisation
 - de cosinus et sinus, 446
- Linéarité, 505
 - de Re, 448
 - de la somme, 283
- Lipschitz, 661, 677
- Logarithme
 - décimal, 240
 - courbe représentative, 242
 - Propriétés algébriques, 241
 - népérien, 219, 256
 - courbe représentative, 225
 - Propriétés algébriques, 220, 257

- relations, 219
- Logique formelle, 10
- Loi
 - associative, 416
 - commutative, 416
 - distributive, 416
 - externe, 805
 - interne, 816
- Majorant, 140, 740
 - de fonction, 155, 745
- Matrice, 799, 800
 - anti-symétrique, 815
 - augmentée, 1120, 1123
 - carrée, 802
 - colonne, 802
 - d'un système linéaire, 1120
 - de dilatation, 1122
 - de passage, 830
 - de permutation, 1122
 - de transvection, 1122
 - de Vandermonde, 841
 - diagonale, 803, 816, 827, 1125
 - inversible, 827
 - Déterminant d'une, 825
 - identité, 802, 1121
 - inversible, 822
 - ligne, 802
 - nilpotente, 821
 - nulle, 801
 - opposée, 804
 - opérations algébriques, 803
 - produit, 808
 - puissance n -ième, 818
 - scalaire, 803
 - semblable, 827, 830
 - singulière, 822
 - stochastique, 833
 - symétrique, 815
 - transposée, 813
 - triangulaire, 803, 817
 - inversible, 828
 - unité, 802
 - échelonnée, 1135
 - par lignes, 1125
 - réduite, 1134, 1136
 - échelonnée réduite, 1135
 - par lignes, 1127
 - égalité de, 801, 804
 - élémentaire, 806
- Maximum, 140, 740
 - global, 156
 - local, 156
- Mersenne, 100
- Mesure
 - principale, 138
 - principale d'un angle, 329
- Méthode
 - Équation avec la valeur absolue, 753
 - Étude d'une suite arithmético-géométrique, 895
 - Étude d'une fonction, 211
 - Étude d'une suite récurrente, 1181
 - ALPES, 521
 - Calcul d'une intégrale à l'aide
 - d'un changement de variables, 522
 - d'une primitive, 518
 - Calcul d'une primitive à l'aide d'un changement de variables, 523
 - Calcul de la puissance d'une matrice, 821, 827
 - Changement d'indice, 285
 - de dichotomie, 1008
 - de variation de la constante
 - pour les EDL_1 , 658
 - pour les EDL_2 , 673
 - des rectangles, 511
 - Détermination du domaine d'étude, 153, 339
 - Déterminer un ensemble de définition, 144
 - Déterminer une droite asymptote, 950
 - Égalité de deux nombres, 104
 - Encadrer une suite, 857
 - Équivalence par implications tournantes, 16
 - Factorisation par l'angle moitié, 447
 - Factoriser un polynôme, 214
 - Forme algébrique d'un quotient, 420
 - Intégrer une $(EDL_1)_0$, 656
 - Inverser une matrice, 824
 - Inversibilité et calcul de l'inverse, 1148
 - Montrer
 - qu'une fonction est injective, 52
 - qu'une fonction est surjective, 51
 - Montrer $A = B$, 45
 - Montrer $A \subset B$, 44
 - Montrer la symétrie d'une courbe, 179
 - Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire, 418
 - Montrer qu'une fonction est bijective, 171, 172
 - Montrer qu'une fonction est continue, 1000
 - Montrer qu'une suite est arithmétique, 892
 - Montrer qu'une suite est géométrique, 893
 - Montrer qu'une suite est monotone, 861
 - Montrer qu'une suite n'est pas majorée, 858
 - Montrer une conjonction, 12
 - Montrer une disjonction, 12, 14
 - Négation d'une proposition, 10
 - Position d'une courbe et de son asymptote, 952
 - Primitive
 - d'une fonction rationnelle, 532
 - Primitive de
 - $P(x)e^{\alpha x}$, 534
 - $e^{\alpha x} \cos(bx)$, 535
 - Problèmes de divisibilité, 91
 - Représentation d'une suite récurrente, 1177
 - Règles de Bioche, 538
 - Résolution d'un problème de Cauchy linéaire, 679
 - Résoudre un système triangulaire, 1126
 - Résoudre un système échelonné, 1131
 - Résoudre une équation linéaire, 651
 - Simplifier une fonction puissance, 236
 - Solutions d'un système échelonné, 1133
 - Tracer une courbe représentative, 211

Travailler sur la matrice du système, 1124
 Trouver la forme trigonométrique, 439
 Trouver un ensemble de définition, 144
 Trouver un ppcm, 111
 Trouver une primitive, 508
 Une fonction n'a pas de limite, 962
 Utilisation d'un contre-exemple, 11
 Utilisation de la borne supérieure, 744
 Utilisation de la partie entière, 761

Milieu

Affixe du, 590

Minimum, 140, 740

global, 156

local, 156

Minorant, 140, 740

de fonction, 155, 745

Module, 858, 1022

d'un nombre complexe, 426, 427

Interprétation géométrique du, 591

propriétés algébriques, 427, 443

Modulo, 516

Modus ponens, 18

Moivre, 337, 445

Formule de, 445

Monoïde, 823

Morgan

Loi de, 59

Morphisme, 453

Moyenne

arithmétique, 1195

géométrique, 1195

harmonique, 1195

Multiple, 88, 97, 109, 123

Multiplicativité

du produit, 283

Médiatrice, 178, 592, 605

 $\mathbb{N}$, 41

Newton, 297, 445, 735, 995

Binôme de, 293, 819

Nombre

complexe, 580, 601

d'or, 1205

de Fermat, 102, 579

de Mersenne, 100

décimal, 41

impair, 91, 117

irrationnel, 46, 737

pair, 88

parfait, 89

premier, 87, 94, 95

Nombre complexe, 415

Affixe d'un, 425

argument, 435

conjugué, 421, 423

Égalité entre, 425

Ensemble des, 415

imaginaire pur, 436

inverse, 427

module, 426

représentation, 425

réel, 422, 436

Norme, 753, 756

d'un vecteur, 591

Noyau

de Dirichlet, 448

de l'exponentielle, 453

Négation

d'une inclusion, 45

 $O()$, 859

Opposé

d'un nombre complexe, 415, 416

Opérateur

linéaire, 874

Opération

associative, 149

commutative, 149

sur les fonctions, 147

sur les fonctions dérivables, 158, 186, 190, 1071

sur les fonctions périodiques, 339

élémentaire, 1121–1123

Ordre

d'une équation différentielle, 651

fonctionnel, 139

lexicographique, 740

total, 89

Orthogonalité, 595

Oscillateur harmonique

en régime forcé, 681

en régime libre, 680

Ouvert, 934

de $\mathbb{R}$, 749, 750, 752

de $\mathbb{C}$, 592

de $\mathbb{R}$, 747, 756, 757

Parabole, 213

Paradoxe, 18

Parité, 152

Partie

dense, 764

dense de $\mathbb{R}$, 764

entière, 92, 759, 761

imaginaire, 417, 430, 445

impaire, 152

majorée, minorée, 140, 740

paire, 152

réelle, 417, 430, 445

stable, 48

Partition, 63, 139, 282

Pascal, 294

PGCD, 104, 107, 126

Définition, 103

propriétés algébriques, 104

 π , 338

Pivot, 1128, 1136, 1140

Plan

affine, 666

complexe, 425

Poincaré, 135

- Point
 - adhérent, 935, 981
 - anguleux, 1068
 - critique, 1081
 - d'inflexion, 352
 - fixe, 894, 895, 962, 1182, 1186
 - intérieur, 935, 979
- Polynome
 - annulateur, 824
- Polynôme
 - de Tchebychev, 449
- Polynôme
 - caractéristique, 666, 672, 673, 675, 676
- Position
 - relative
 - d'une courbe et de son asymptote, 250
- PPCM, 109, 123
 - définition, 108
 - propriétés algébriques, 109
- Premier
 - nombre, 96
- Primitive, 503
 - des fonctions de référence, 506
- Principe
 - de superposition, 650, 676, 1138
- Problème de Cauchy
 - d'une EDL₁, 660
 - d'une EDL₂, 677
- Produit, 280
 - cartésien, 64
 - matriciel, 808
 - Permutation des symboles, 302
 - Relation produit-somme, 292
 - scalaire, 595, 755, 807
 - sur un rectangle, 302
 - sur un triangle, 302
- $\prod$, 280
- Projection
 - canonique, 145
- Prolongement
 - de classe $\mathcal{C}^1$, 1095
 - par continuité, 238, 564, 569, 949, 1002, 1094
- Proposition, 5, 9
 - Équivalente, 15
 - conjonction, 11
 - conjonction de, 56
 - contraire, 10, 16
 - Contraposée, 15
 - contraposée, 14, 59
 - disjonction, 11
 - disjonction de, 58
 - Implication
 - Transitivité, 14
 - Propriétés de $\wedge$ et $\vee$, 12
- Propriété
 - caractéristique, 251
 - de $\mathbb{R}$, 767
 - de l'intersection, 59, 61
 - de la réunion, 59, 61
 - locale, 997
- Propriétés algébriques
 - de l'exponentielle, 229, 261
 - des puissances, 236
 - du logarithme décimal, 241
 - du logarithme népérien, 220, 257
- Prédicat, 5
- Ptolémée, 995
- Puissance
 - d'une matrice, 818, 821
- Puissance réelle, 237, 268
 - Fonction, 237, 268
 - Propriétés algébriques, 236
- Pulsation propre, 671, 680, 682
- Période
 - d'une fonction, 338
 - définition, 338
- Pôle, 528
 - d'une fonction rationnelle, 216
- $\mathbb{Q}$, 42, 736
- Quantificateur, 6
 - $\exists$, 6
 - Inversion de, 7
 - $\forall$, 6
- $\forall$, 6
- Quotient, 92
- $\mathbb{R}$, 42, 737, 763
 - Propriétés de, 767
- $\overline{\mathbb{R}}$, 747
- Racine
 - n -ième
 - de l'unité, 282
 - n -ième d'un nombre complexe, 585, 589
 - n -ième de l'unité, 586
 - carrée d'un nombre complexe, 580
 - complexe d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, 531
 - d'un polynôme, 213
 - d'une fonction rationnelle, 216
- Raison
 - d'une suite arithmétique, 856, 891
 - d'une suite géométrique, 856, 893
- Raisonnement, 18
 - Montrer une implication, 18
 - Montrer une propriété, 19
 - Montrer une équivalence, 19
 - par analyse-synthèse, 20
 - par contraposition, 18
 - par l'absurde, 10, 18
 - par récurrence, 20, 892
 - par récurrence double, 22
 - par récurrence forte, 23
- Rang
 - d'un système linéaire, 1140, 1143
 - d'une matrice, 1136
- Régime
 - apériodique, 672, 680
 - critique, 672, 680
 - forcé, 679, 681
 - libre, 679, 680

permanent, 664
 pseudo-périodique, 672, 680
 transitoire, 664

Relation, 141

anti-symétrique, 137, 185, 189
 binaire, 136
 d'ordre, 89, 104, 139, 154, 185, 739, 1022
 d'équivalence, 138, 329
 Classe, 329, 516
 Représentant, 329
 de Chasles, 282
 réflexive, 137, 185, 189
 symétrique, 137, 185, 189
 transitive, 137, 185, 189

Représentant

d'une classe, 329

Repère

orthonormé, 150

Reste, 92

Restriction, 945

Rotation, 604

Russel

Paradoxe de, 39

Récurrence

démonstration par, 820

Réel, 418

Nombre, 417

Résonance, 682

Résoudre

une équation différentielle, 652

Scalaire, 801

Segment, 748, 1014, 1184

Similitude, 607

Sinus, 331

courbe représentative, 344
 hyperbolique, 244, 269
 courbe représentative, 245

Solution

particulière, 226, 649, 651, 652

Somme, 280

arithmétique, 289
 Changement d'indice, 285
 de Riemann, 512
 de référence, 287
 de sinus et de cosinus, 448
 des carrés des entiers, 287
 des cubes des entiers, 287
 des entiers, 287
 des racines de l'unité, 588
 des termes d'une suite, 856, 891, 893
 double, 298
 géométrique, 289
 Produit de, 301
 rectangulaire, 298
 Regroupement de termes, 282
 Relation produit-somme, 292
 Translation d'indice, 286
 triangulaire, 298
 télescopique, 284

$\sum$, 280

Somme double

Permutation des symboles, 299
 sur un rectangle, 299
 sur un triangle, 300

Sophisme, 18

Structure

de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$, 824
 de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, 803
 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, 816
 de l'ensemble des suites, 855
 des solutions d'une EDL, 650

Suite

adjacente, 887, 1008, 1187
 arithmético-géométrique, 856, 894
 arithmétique, 856, 867, 891, 896
 bornée, 857, 858
 convergente, 862, 864
 croissante, 860
 de Fibonacci, 1205
 divergente, 862
 vers $\pm\infty$, 862
 dominée, 859
 explicite, 861
 limite d'une, 960
 extraite, 878
 géométrique, 856, 893–896, 1187
 image d'une, 222
 homographique, 895
 Limite d'une, 960
 majorée, minorée, 857
 monotone, 860
 périodique, 865
 récurrente, 1176
 linéaire d'ordre 2, 1188

Surjection, 165, 166

canonique, 51

Symétrie, 150

axiale, 213, 605, 606
 centrale, 217

Système

conservatif, 682
 de Cramer, 1145
 dissipatif, 682
 dynamique, 1176
 homogène, 1121
 incompatible, 1121
 linéaire, 1119
 échelonné, 1128
 échelonné réduit, 1125
 équivalent, 1121

Série

alternée, 368
 géométrique, 448
 harmonique, 868, 880, 909

Table de vérité

de l'implication, 13
 de l'équivalence, 16
 de la conjonction, 11

- de la disjonction, 11
- de la négation, 10
- Négation d'une implication, 17
- Négation de l'équivalence, 17
- Tangente, 350, 1085
 - Équation de la, 1064
 - à un cercle, 350
 - courbe représentative, 354
 - en 0, 360
 - en 0
 - à ch, 244, 266
 - à sh, 244, 270
 - à l'exponentielle, 233
 - en 1
 - au logarithme décimal, 242
 - au logarithme népérien, 224, 225, 258
 - horizontale, 211
 - verticale, 348
- Taux
 - d'accroissement, 1063
- Tchebychev, 449
- Théorème, 9
 - d'encadrement, 223, 340, 515, 879, 964, 1199
 - d'Euclide, 117
 - d'interversion, 961
 - de Bolzano, 1007, 1008
 - de Bolzano-Weierstrass, 886, 1015, 1063
 - de Borel-Lebesgue, 1063
 - de Cauchy-Lipschitz
 - pour les EDL_1 , 661
 - pour les EDL_2 , 677, 678
 - de comparaison, 369, 963, 964
 - de D'Alembert-Gauss, 413
 - de Darboux, 1012
 - de la bijection, 244, 1018
 - de la limite monotone, 743, 884, 966, 967
 - de Rolle, 1083
 - des accroissements finis, 1085, 1090, 1091
 - des bornes atteintes, 1014
 - des valeurs intermédiaires, 164, 168, 1011, 1016, 1063, 1084, 1184
 - fondamental
 - de l'algèbre, 414
 - de l'analyse, 514
 - de l'arithmétique, 23, 98
- Hypothèses, 9
- Topologie, 750, 752, 756, 933, 934, 937, 942
 - de $\mathbb{C}$, 431
- Trace
 - d'une matrice, 829
- Transformation
 - d'une courbe, 150, 186, 190
 - du plan, 601
- Transitivité
 - de l'inclusion, 44
- Translation, 150, 190, 286, 602
- Triangle, 598
- Trigonométrie, 444
 - hyperbolique, 249
- Un peu de
 - physique, 652, 664, 669, 671, 680, 681
- Unicité, 20
 - du maximum, 140
- Valeur
 - absolue, 1022
 - absolue
 - définition, 753
 - d'adhérence, 886
- Valeurs
 - intermédiaires, 748
- Valuation
 - d'un nombre premier, 98
- Vandermonde, 841
- vect (), 1141
- Vecteur
 - colinéaire, 596, 1142
 - coplanaire, 1142
 - orthogonal, 596
- Voisinage, 934
 - d'un point, 750
 - de l'infini, 750
- Weierstrass, 933
- $\mathbb{Z}$, 41

