

Sommes et produits finis, fonctions circulaires

1. Sommes et Produits

- Notations \sum et \prod et manipulations.
- Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
- Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
- Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$.
- Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Sommes des termes.
- Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
- Définition de $n!$ et du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
- Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton et intégrité des coefficients binomiaux.
- Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle. Cas des variables séparées.
- Produit de sommes, carré d'une somme.

2. Trigonométrie

- Définition géométrique du radian, du cosinus et du sinus.
- Valeurs particulières des fonctions trigonométriques. Les étudiants doivent être capables d'étendre les valeurs du premier quart de cercle au reste du cercle et de connaître (ou retrouver rapidement) les formules associées.
- Formulaire : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, formules de linéarisation $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, cas où $a = b$, formules de factorisation $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- Formules de Carnot, de duplication et de l'angle moitié.
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.
- Limites remarquables : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1$.
- Les fonctions circulaires réciproques : arc sinus, arc cosinus, arctan, définition, parité (ou non), dérivation, limites aux bornes, asymptotes, tangentes en 0, graphes.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
2. Carré d'une somme : $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$.
3. Démonstration de $\cos(a + b) = \dots$ et $\sin(a + b) = \dots$
4. (★) Formules de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini, expression de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de t .
5. La fonction arc tangente : définition, monotonie, continuité, dérivabilité et formule de la dérivée, parité, limites, tangente à l'origine.
6. (★) Relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.