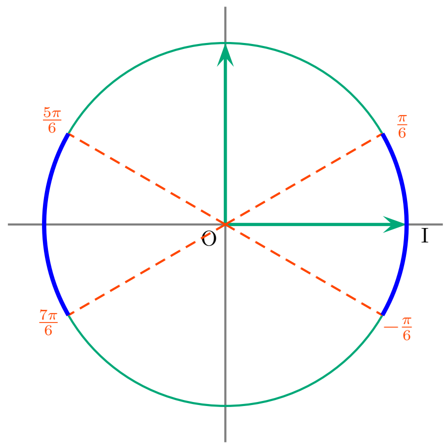
Fonctions circulaires - Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\cos(2x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

   $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(2x) \geqslant \dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6} + k\pi.$



2. Après avoir donné le domaine de définition, exprimer $\mathrm{G} = \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   G est défini si, et seulement si $1 + \sin(x) \neq 0 \iff x \not\equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   De même, u est défini si, et seulement si $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

   On travaillera donc avec $x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\pi + 2k\pi\right[\cup \left]\pi + 2k\pi\,;\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\right)$.

   On a alors $\mathrm{G} = \dfrac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{1-t^2}{(1+t)^2} = \dfrac{1-t}{1+t}$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$.

   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0 &\iff (\sin(x) - 1)(\sin(x) + 3) = 0 \\
&\iff \sin(x) = 1 \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

4. Donner le domaine de définition puis simplifier l'expression $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.

   $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

   Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\implies \arcsin(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\subset \mathcal{D}_{\tan}$ et $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Donner la partie imaginaire de $\dfrac{1}{2+3\,\mathrm{i}}$.

   $\dfrac{1}{2+3\,\mathrm{i}} = \dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{13}$ donc $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{2+3\,\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{3}{13}$.

6. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

   Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -\mathrm{i}$.

   Ensuite, en posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

   $\forall\, z \neq -\mathrm{i}$, $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{x-2+\mathrm{i}\,y}{x+(y+1)\,\mathrm{i}} = \dfrac{((x-2)+\mathrm{i}\,y)\,(x-(y+1)\,\mathrm{i}\,)}{x^2+(y+1)^2} = \dfrac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)\,\mathrm{i}}{x^2+(y+1)^2}$.

   D'où,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} &\iff (2-x)(y+1)+xy = 0 \\ &\iff 2-x+2y = 0 \\ &\iff x-2y-2 = 0. \end{aligned}$$

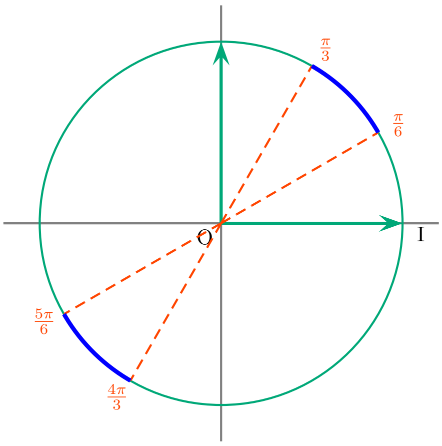
   En vérifiant que $-\mathrm{i} = (0\,;-1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x-2y-2=0$ privé du point $(0\,;-1)$.

Fonctions circulaires - Nombres complexes

Fonctions circulaires - Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sin(2x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

   $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\sin(2x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff \dfrac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} + k\pi.$



2. Après avoir donné le domaine de définition, exprimer $\mathrm{D} = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   G est défini si, et seulement si $1 + \cos(x) \neq 0 \iff x \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

   De même, u est défini si, et seulement si $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

   On travaillera donc avec $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi + 2k\pi\,;\pi + 2k\pi[$.

   On a alors $\mathrm{D} = \dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = t.$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$.

   Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0 &\iff (\cos(x) - 1)(\cos(x) + 3) = 0\\ &\iff \cos(x) = 1\\ &\iff x \equiv 0\ [2\pi]\,.\end{aligned}$$

Fonctions circulaires - Nombres complexes

4. Donner le domaine de définition puis simplifier l'expression $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.

   $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

   Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\forall\, x \in [-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1] \implies \arccos(x) \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\,\cup\,\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right] \subset \mathcal{D}_{\tan}$ et $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

5. Donner la partie réelle de $\dfrac{1}{4-3\,\mathrm{i}}$.

   $\dfrac{1}{4-3\,\mathrm{i}} = \dfrac{4+3\,\mathrm{i}}{25}$ donc $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{4-3\,\mathrm{i}}\right) = \dfrac{4}{25}$.

6. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

   Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -\mathrm{i}$.

   Ensuite, en posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

   $\forall\, z \neq -\mathrm{i}$, $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{x-2+\mathrm{i}\,y}{x+(y+1)\,\mathrm{i}} = \dfrac{((x-2)+\mathrm{i}\,y)\,(x-(y+1)\,\mathrm{i})}{x^2+(y+1)^2} = \dfrac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)\,\mathrm{i}}{x^2+(y+1)^2}$.

   D'où,

$$\begin{aligned}\frac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff x(x-2)+y(y+1)=0\\ &\iff x^2-2x+y^2+y=0\\ &\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

   En vérifiant que $-\mathrm{i} = (0\,;-1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0\,;-1)$.