Fonctions circulaires

Compléter :

1. Pour tout $x \in [-\pi\,;\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$

2. $|\sin(x)| \leqslant 1$.

3. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

4. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

7. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

8. $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$

Soient a et b deux réels.

9. $\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b\ [2\pi]$

10. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

11. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

12. $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

13. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

15. On appelle fonction *arcsinus*, notée arcsin, la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

16. $\forall\, x \in [0\,;\pi]$, $\arccos\left(\cos(x)\right) = x$

17. $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\sin\left(\arcsin(x)\right) = x$

18. $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

19. $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20. La fonction arcsin est continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En particulier,

— la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$. (Variations)

21. Pour toute fonction u, la fonction $x \longmapsto \arccos\left(u(x)\right)$ est dérivable sur un intervalle I si, et seulement si u est dérivable à valeurs dans $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \Big(\arccos(u)\Big)'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$$

Fonctions circulaires

22.

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

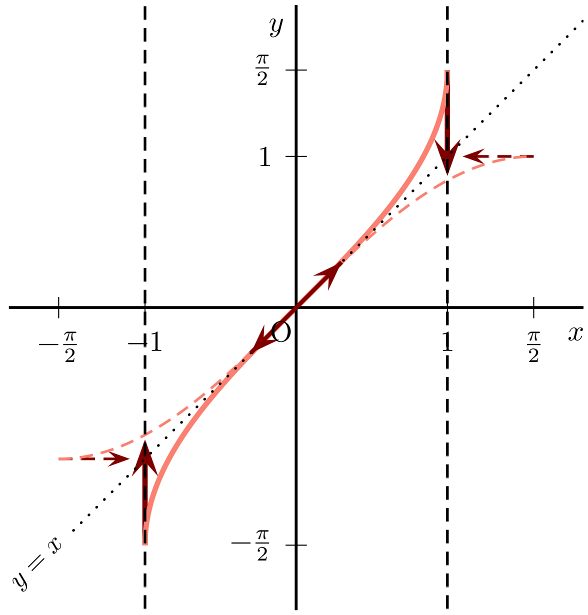

Figure VI.1 – Tableaux de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.
En dash, la courbe de sin.

23. La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

25. **Formule d'addition :** Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

— $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

— $\tan(p)+\tan(q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

— $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. — $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Fonctions circulaires

Compléter :

1. Pour tout $x \in [-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
2. $|\cos(x)| \leqslant 1$
3. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
6. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
7. $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
8. $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x)$ et $\sin(k\pi) = 0$

Soient a et b deux réels.

9. $\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv -b\ [2\pi]$
10. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
11. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
12. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
13. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
15. On appelle fonction *arccosinus*, notée arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.
16. $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
17. $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$
18. $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$
19. $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{3\pi}{4}$
20. La fonction arccos est continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En particulier,

— la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$. (Variations)

21. Pour toute fonction u, la fonction $x \longmapsto \arcsin(u(x))$ est dérivable sur un intervalle I si, et seulement si u est dérivable à valeurs dans $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \Big(\arcsin(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

22.

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

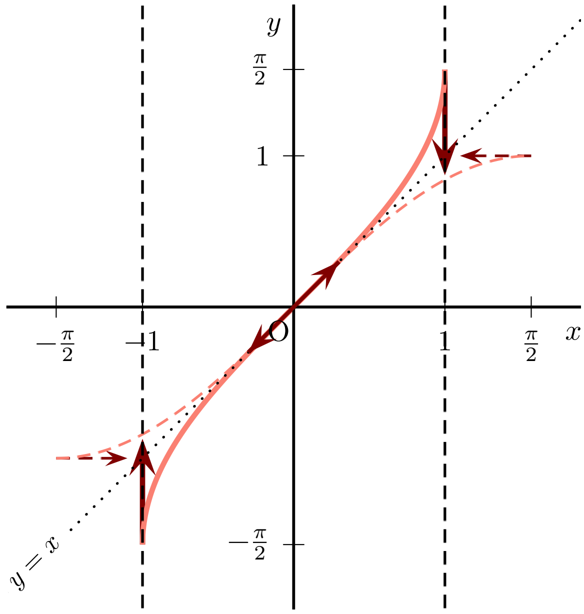

Figure VI.2 – Tableaux de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.
En dash, la courbe de sin.

23. On appelle fonction *tangente*, notée tan, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

25. **Formule d'addition :** Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

— $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Formule de duplication : Pour tout $(a\,;\in)\,\mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan(2a)$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Formule de factorisation : Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

— $\tan(p) - \tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

— $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.