Chapitre

VIII Les Nombres Complexes I

Les nombres complexes ont été introduits par Cardan et Bombelli au 16ème siècle, comme moyen d'exprimer certaines racines de polynômes de degrés 3 ou 4.

À cette époque, l'introduction des nombres imaginaires (via des racines de réels négatifs) est un pur artifice. La notation i sera introduite par Euler [1] en 1777 pour remplacer la notation $\sqrt{-1}$ qui n'avait pas de sens.

Ainsi, dès leur origine, les nombres complexes sont introduits pour pallier l'absence de racines (réelles) de certains polynômes comme, par exemple, $X^2 + 1$.

On démontrera plus tard que ceci implique que tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1. C'est, en substance, le théorème de D'Alembert-Gauss qui se réexprime ainsi :

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine.

Ce théorème est d'une importance capitale, puisqu'il motive la construction de $\mathbb{C}$. Il est conjecturé depuis longtemps déjà lorsque d'Alembert en propose une preuve en 1743. Cette preuve n'est pas satisfaisante, Gauss [2] va jusqu'à la qualifier de *petitio principii*, puisqu'elle part de l'hypothèse de l'existence de racines « fictives ».

La première preuve complète et rigoureuse revient à Gauss, au 19ème siècle d'où le nom qu'a laissé la postérité à ce théorème.

[1]. **Leonhard Euler** *(15 avril 1707 - 18 septembre 1783)* naît à Bâle. Il étudia les mathématiques sur les conseils de Johann Bernoulli, qui était ami avec son père. Il s'installa à Saint-Petersbourg, auprès de Pierre le Grand, puis à Berlin sous le règne de Frédéric II, où à chaque fois il rencontra un environnement scientifique exceptionnel. Son œuvre est considérable.

Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière, ...), les mathématiques, où il met au premier plan le concept de fonction. On lui doit aussi la très jolie relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe (ex : le cube, le tétraèdre, ...).

La santé d'Euler était assez fragile. Il perdit son œil droit en 1735, puis son œil gauche en 1771 en raison d'une cataracte. Il fut donc pendant 12 ans totalement aveugle. Cela obligeait ce mathématicien très prolixe, qui publia 886 ouvrages, le tout en 80 volumes, à faire appel à des personnes de son entourage à qui il dictait ses mémoires. Il décède le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg d'une hémorragie cérébrale.

Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous. »

[2]. **Carl Friedrich Gauss** *(30 avril 1777 [Brunswick] - 23 février 1855 [Göttingen])* est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. Il est à la fois le dernier des classiques, et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Par exemple, il démontra comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide des seuls règle et compas, ce qui était un problème ouvert depuis les grecs. Mieux, il démontra pour quels nombres ce partage en parts égales est possible.

CONTENU

I L'ensemble des nombres complexes . . . 3
- I.1 Construction de $\mathbb{C}$ . . . 3
- I.2 Conjugué d'un nombre complexe . . . 8
- I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude) . . . 11

II Nombres et Plan complexes . . . 13
- II.1 Représentation des nombres complexes . . . 13
- II.2 Module d'un nombre complexe . . . 15
- II.3 Inégalité triangulaire . . . 17

III L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$ . . . 18
- III.1 Fonctions vectorielles . . . 18
- III.2 Notation d'Euler . . . 21
- III.3 Nombres complexes de module 1 . . . 23

IV Forme polaire . . . 24
- IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle . . . 24
- IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle . . . 30
- IV.3 Argument d'un nombre complexe . . . 31

V Applications à la trigonométrie . . . 33
- V.1 Formule d'Euler et de Moivre . . . 33
- V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus . . . 35
- V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié . . . 36
- V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus . . . 38
- V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev . . . 39
- V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus . . . 39

VI Exponentielle complexe . . . 40

Mathématicien et physicien, Carl Friedrich Gauss est une figure incontournable du XIX ème siècle, non seulement pour la quantité monumentale de ses découvertes et la profondeur de ses idées, mais aussi pour sa rigueur à laquelle il attachait la plus haute importance. Sa devise, Pauca sed matura (peu mais mûr), illustre la précaution que prenait Gauss à ne publier que des textes soigneusement affinés : une de ces phrase célèbres est que « lorsqu'un bel édifice est achevé, on ne doit pas y lire ce qui fut l'échafaudage ». On peut ainsi concevoir qu'il n'ait pas souhaité la publication de certains de ses travaux.

Gauss influencera considérablement la vie mathématique de son époque et de fait annonce la révolution cantorienne.

Gauss est né dans une famille modeste : sa mère était femme de chambre, son père exerçait toute sorte de métiers, du jardinage à la trésorerie d'une société d'assurances. Il est un élève particulièrement précoce. Un épisode célèbre (peut-être romancé !) de son enfance rapporte qu'alors qu'il était âgé de 9 ans, son maître demanda de calculer 1+2+…+100. Gauss inscrivit presque immédiatement le résultat sur son ardoise, ayant trouvé une méthode extrêmement efficace pour calculer de telles sommes.

À 11 ans, Gauss entre au lycée, où il étudie latin, grec, mathématiques, etc…Il est un élève tellement brillant que le duc de Brünswick souhaite le rencontrer. Visiblement séduit par cet entretien, le duc le prend sous sa protection et lui accorde une bourse : c'est ainsi que Gauss, quoiqu'issu d'une famille modeste, pourra poursuivre ses études.

Il entre à l'université de Göttingen à l'automne 1795. Un an plus tard, après avoir découvert comment construire à la règle et au compas le polygone régulier à 17 côtés, il décide de se consacrer aux mathématiques. Sa thèse, soutenue en 1799, contient la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Deux ans plus tard, il publie Disquisitiones Arithmaticae, un ouvrage consacré à la théorie des nombres, où il explore des méthodes complètement nouvelles. Cette même année, en 1801, il détermine l'orbite de Cérès, une planète naine du système solaire, apparue furtivement sur les écrans des télescopes au début de 1801, et disparue ensuite. À cette occasion, Gauss introduit un outil fondamental, la méthode des moindres carrés.

En 1831 arrive à Göttingen Wilhelm Weber avec qui Gauss s'entend à merveille. Pendant six ans, jusqu'à ce que Weber soit chassé de l'Université pour avoir protesté contre le régime, les deux savant mènent des recherches sur l'électro-magnétisme. Ainsi, le « gauss » est devenu l'unité d'induction magnétique.

I/ L'ensemble des nombres complexes

On suppose l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ces deux opérations $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ connu et on construit un nouvel ensemble que l'on munit également de ses propres lois :

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) : On appelle ensemble des *nombre complexes*, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

— $(a\,;b) +_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a +_{\mathbb{R}} a'\,;b +_{\mathbb{R}} b')$,

— $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'\,;a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1\,;0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{i} = (0\,;1)\,.$$

L'application $i_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & (a\,;0) \end{array}$ est une injection qui permet alors de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x\,;0)$.

Muni de cette identification, on a immédiatement quelques propriétés :

Proposition 1 (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

1. Soient $z = (a\,;b)$ et $z' = (a'\,;b')$ deux nombres complexes.
$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{array} \right.$$
2. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$:
3. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives et commutatives.
4. $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{C}}$.
5. La loi $+_{\mathbb{C}}$ possède un *élément neutre* $0_{\mathbb{C}} = (0\,;0)$ que l'on notera encore 0.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé *opposé de z* et noté $-z$ et tel que :
$$-z = (-a\,;-b)\,.$$
6. La loi $\times_{\mathbb{C}}$ possède un *élément neutre* $1_{\mathbb{C}} = (1\,;0)$ que l'on notera encore 1.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ non nul possède un symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé *inverse de z* et noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que :
$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$
7. Enfin, le nombre $(0\,;1)$ est tel que $(0\,;1)^2 = (-1\,;0)$. On le notera i.

   En particulier, on a :
$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

L'assertion 2 permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et $\times$.

Preuve :

1. D'après la définition de $\mathbb{R}^2$, $(a\,;b) = (a'\,;b') \iff a = a'$ et $b = b'$.
2. $\forall\, a, a' \in \mathbb{R}$, $(a\,;0) +_{\mathbb{C}} (a'\,;0) = (a +_{\mathbb{R}} a'\,;0) = a +_{\mathbb{R}} a'$.
3. Il suffit de calculer et comparer $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b')$ et $(a'\,;b') \times_{\mathbb{C}} (a\,;b)$.

   Même chose avec $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} ((a'\,;b') \times_{\mathbb{C}} (a''\,;b''))$ et $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b') \times_{\mathbb{C}} (a''\,;b'')$.

   La commutativité permettant de montrer la dernière égalité avec $((a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b')) \times_{\mathbb{C}} (a''\,;b'')$.

   On montrera les mêmes propriétés de la même façon pour la loi $+_{\mathbb{C}}$ et on remarquera bien que celles-ci sont induites par les propriétés des lois $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$.
4. Idem avec $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} ((a'\,;b') +_{\mathbb{C}} (a''\,;b''))$ et $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b') +_{\mathbb{C}} (a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a''\,;b'')$.
5. $\forall\, z = (a\,;b) \in \mathbb{C}$, $(a\,;b) +_{\mathbb{C}} (0\,;0) = (0\,;0) +_{\mathbb{C}} (a\,;b) = (a\,;b)$.

   Donc $0_{\mathbb{C}} = (0\,;0)$ est élément neutre pour $+_{\mathbb{C}}$.

   De plus $z +_{\mathbb{C}} (-a\,;-b) = (a +_{\mathbb{R}} (-a)\,;b +_{\mathbb{R}} (-b)) = (0\,;0)$.

   Par commutativité de $+_{\mathbb{C}}$, on a également $(-a\,;-b) +_{\mathbb{C}} z = (0\,;0)$.

   Donc, tout nombre complexe z possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé *opposé* de z et noté $-z$.
6. $\forall\, z = (a\,;b) \in \mathbb{C}$, $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (1\,;0) = (1\,;0) \times_{\mathbb{C}} (a\,;b) = (a\,;b)$.

   Donc $1_{\mathbb{C}} = (1\,;0)$ est élément neutre pour $\times_{\mathbb{C}}$.

   De plus, $\forall\, z = (a\,;b) \neq (0\,;0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} z \times_{\mathbb{C}} \left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2}\right) &= \left(a \times_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2+b^2} +_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2+b^2}\,;-a \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2+b^2} +_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2+b^2} \times_{\mathbb{R}} b\right) \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\,;\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1\,;0)\,. \end{aligned}$$

   Par commutativité de $\times_{\mathbb{C}}$, on a également $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2}\right) \times_{\mathbb{C}} z = (1\,;0)$.

   Tout nombre complexe z non nul admet donc un symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé *inverse* de z et noté $\frac{1}{z}$.
7. Il suffit de calculer :

$$(0\,;1)^2 = (0\,;1) \times_{\mathbb{C}} (0\,;1) = (0 \times_{\mathbb{R}} 0 -_{\mathbb{R}} 1 \times_{\mathbb{R}} 1\,;0 \times_{\mathbb{R}} 1 +_{\mathbb{R}} 0 \times_{\mathbb{R}} 1) = (-1\,;0) = -(1\,;0) = -1.$$

Si cela était au programme, la proposition (1) pourrait simplement se résumer en disant que $\left(\mathbb{C}, +, \times\right)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve grâce à 6 que :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

Preuve : Si $zz' = 0$ et $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z}$ existe et on a $\frac{1}{z} \times zz' = 0 \iff z' = 0$. La réciproque est évidente.

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) : Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ peut s'écrire de manière *unique* la forme :

$$z = a + \mathrm{i}\,b, \qquad \text{avec } (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1.$$

— Le nombre réel a s'appelle la *partie réelle* de z notée $\mathrm{Re}\,(z)$.

Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur* et on note $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ leur ensemble.

— Le nombre réel b s'appelle la *partie imaginaire* de z notée $\mathrm{Im}\,(z)$.

Si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, le nombre complexe z est *réel* dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$

— L'écriture $z = a + \mathrm{i}\,b$ est appelée la *forme algébrique* de z.

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Preuve :

Existence : Soit $z = (a\,;b)$ un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned} z = (a\,;b) &\iff (a\,;0) + (0\,;b) \iff z = (a\,;0) + b \times (0\,;1) \\ &\iff z = (a\,;0) + (b\,;0) \times \mathrm{i} \\ &\iff z = a + \mathrm{i}\,b. \end{aligned}$$

Unicité : Soient deux couples de réels $(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$ tels que $z = a + \mathrm{i}\,b = a' + \mathrm{i}\,b'$.

On a alors $a - a' = (b' - b)\,\mathrm{i} \iff (a - a'\,;0) = (0\,;b' - b) \iff a = a'$ et $b = b'$.

Exemples 1 :

— $z_1 = 4 + 7\,\mathrm{i} - (2 + 4\,\mathrm{i}) = 4 + 7\,\mathrm{i} - 2 - 4\,\mathrm{i} = 2 + 3\,\mathrm{i}$.

— $z_2 = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i}) = 6 - 4\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i}^2 = 6 - \mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$.

— $z_3 = (4 - 3\,\mathrm{i})^2 = 16 - 24\,\mathrm{i} + (3\,\mathrm{i})^2 = 7 - 24\,\mathrm{i}$.

Exercice 1 : On pose $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$.

Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ et j^3.

Correction :

1. $$\begin{aligned} 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} - \frac{3}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. $\mathrm{j}^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\mathrm{i} + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\mathrm{i} = 1.$

Exemples 2 :

— $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = -1$.

— $\mathrm{Re}\,(4\,\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(4\,\mathrm{i}) = 4$.

Remarques : $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Méthode 1 (Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire) :
Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

1. On l'écrit sous sa forme algébrique.
2. On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
3. On résout l'équation ainsi écrite.

Exercice 2 : Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

1. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée

   (a) $f(z) \in \mathbb{R}$

   (b) $f(z)$ imaginaire pur

   (c) $\mathrm{Im}\,(f(z)) = 2$

   (d) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Im}\,(z)$

Correction :

1. Pour $z = x + \mathrm{i}\,y$, $f(z) = x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,xy$.
2. (a) $f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\,(f(z)) = 0 \iff xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.
   $\iff (x\,;y)$ appartient aux axes du repère.

   (b) $f(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(f(z)) = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = x$ ou $y = -x$
   $\iff (x\,;y)$ appartient à la première ou la seconde bissectrice.

   (c) $\mathrm{Im}\,(f(z)) = 2 \iff xy = 1 \iff x \neq 0$ et $y = \frac{1}{x}$
   $\iff (x\,;y)$ appartient l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

   (d) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Im}\,(z) \iff x^2 - y^2 = 2xy \iff (x-y)^2 - 2y^2 = 0$
   $\iff \left(x - \left(1+\sqrt{2}\right)y\right)\left(x - \left(1-\sqrt{2}\right)y\right) = 0$
   $\iff y = \left(\sqrt{2}-1\right)x$ ou $y = \left(\sqrt{2}+1\right)x$.

Avec la forme algébrique, la proposition (1) peut se réécrire :

Corollaire 1.1 :

— Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) &= \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) &= \mathrm{Im}\,(z') \end{cases}$$

— Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')$.
- $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(a'b + ab')$.
- $-z = -a - \mathrm{i}\,b$.
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}$

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.

Désormais, nous abandonnons la notation d'un complexe sous forme d'un couple, et nous représenterons un nombre complexe sous la forme $a + \mathrm{i}\,b$.

ATTENTION

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si $\ll$ était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

— soit $\mathrm{i}\,z \ll \mathrm{i}\,z' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.
— soit $\mathrm{i}\,z' \ll \mathrm{i}\,z \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

Proposition 2 (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) :
Soient a et b deux nombres complexes.

— $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
— $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
— $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
— $(a + \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 + 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
— $(a - \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 - 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
— $(a - \mathrm{i}\,b)(a + \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

Preuve : Seules, les dernières égalités sont nouvelles :

$$(a \pm \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 \pm 2abi + (\mathrm{i}\,b)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2,$$

et

$$(a - \mathrm{i}\,b)(a + \mathrm{i}\,b) = a^2 - (\mathrm{i}\,b)^2 = a^2 + b^2.$$

Vous pourrez enfin factoriser une somme de deux carrés... dans $\mathbb{C}$!

I.2 Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 3 : Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{3+2\,\mathrm{i}}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{}$ » sachant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

D'après la proposition (2) , $(a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b) = a^2+b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3-2i$:

$$z = \frac{(2-\mathrm{i})(3-2\,\mathrm{i})}{(3+2\,\mathrm{i})(3-2\,\mathrm{i})} = \frac{4-7\,\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} - \mathrm{i}\,\frac{7}{13}.$$

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) : Soit $z = a+\mathrm{i}\,b$ un nombre complexe.

On appelle *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$.

Exemples 4 :

- $3-2\,\mathrm{i}$ est le conjugué de $3+2\,\mathrm{i}$.
- $\overline{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3\,\mathrm{i}} = -3\,\mathrm{i}$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 3 : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

$z_1 = \dfrac{3}{7} - \mathrm{i}\sqrt{7}$ $\qquad$ $z_2 = \sqrt{2}-3$ $\qquad$ $z_3 = \sqrt{7}+\mathrm{i}\,\pi$

Proposition 3 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z\overline{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve : Soit $z = a+\mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$. Il suffit d'écrire :

$$z\overline{z} = (a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Petite propriété simplette qui aura de grandes conséquences dont la première :

Méthode 2 (Forme algébrique d'un quotient) :
Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 4 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1}{1+i}$ $\qquad z_2 = \dfrac{1+i}{1-i}$ $\qquad z_3 = \dfrac{7}{\mathrm{i}}$

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\forall\, z \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall\, z' \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n.}$

Une fois n'est pas coutume, remarquez que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition *et* la multiplication. Fait exceptionnel !

Preuve : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

1. La première assertion est triviale.
2. Calculons et comparons :
$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - \mathrm{i}\,b)(a' - \mathrm{i}\,b') = aa' - bb' - \mathrm{i}\,(ab' + a'b)$$
et
$$\overline{z \times z'} = \overline{(a + \mathrm{i}\,b)(a' + \mathrm{i}\,b')} = \overline{aa' - bb' + \mathrm{i}\,(ab' + a'b)} = aa' - bb' - \mathrm{i}\,(ab' + a'b).$$
Donc $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et on conclut par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ puis symétrie par rapport à 0 avec $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.
3. Easy.
4. Avec $z \neq 0$ inversible, modifions tout d'abord l'expression de $\dfrac{1}{z}$:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}\,b} = \frac{a - \mathrm{i}\,b}{(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b)} = \frac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - \mathrm{i}\,b).$$
De la même manière $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \times (a + \mathrm{i}\,b)$.

Comme $\dfrac{1}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$, il est alors clair que
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - \mathrm{i}\,b)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times \overline{(a - \mathrm{i}\,b)} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a + \mathrm{i}\,b) = \frac{1}{\overline{z}}.\end{aligned}$$

5. Avec $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exercice 5 : Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = z + 5 - \mathrm{i}$ $\quad z_2 = \mathrm{i}\, z + 2$ $\quad z_3 = z + \dfrac{1}{\overline{z}}$ $\quad z_4 = z + \mathrm{i}\,\overline{z}$

Théorème 5 (Fondamental) :
$\forall\, z \in \mathbb{C}$,

- $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $\mathrm{M}(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

Preuve : On a :

$$z + \overline{z} = a + \cancel{\mathrm{i}b} + a - \cancel{\mathrm{i}b} = 2a = 2\mathrm{Re}\,(z) \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = \cancel{a} + \mathrm{i}\,b - \cancel{a} + \mathrm{i}\,b = 2\,\mathrm{i}\,b = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

Le reste est trivial comme, par exemple : $z = \overline{z} \iff \mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{\cancel{2}z}{\cancel{2}} \iff z \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

Méthode 3 (Nombres réels et imaginaires purs) :

1. Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = z$ ou $\mathrm{Im}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \overline{z}$.
2. Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = -z$ ou $\mathrm{Re}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \overline{z}$.

I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

On appelle *discriminant* de l'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ, le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes *conjuguées* : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

ATTENTION Pour l'instant, faites bien attention que ce théorème ne s'applique qu'à des équations à coefficients réels. Seules les solutions sont complexes.

Preuve : La démonstration est identique à celle de première si ce n'est que l'on n'est plus gêné par la cas où le discriminant est négatif.

La forme canonique s'écrit :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

— Pour les deux premiers cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ ont retrouve les cas vus en première.

— si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ d'où $\Delta = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

On factorise à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned}\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \\ &= \left(z + \frac{b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).\end{aligned}$$

On en déduit les deux solutions de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans ce cas.

Exemple 5 : Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 7 (À savoir faire absolument !) : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 7z = 0$.
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
3. $-8 = 3z^2$.

Théorème 7 :
Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients *réels*.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Preuve : Par compatibilité du conjugué avec les lois de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}(\mathrm{X})} &= \overline{a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0} \\ &= \overline{a_n\mathrm{X}^n} + \overline{a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\mathrm{X}} + \overline{a_0} \\ &= a_n\overline{\mathrm{X}}^n + a_{n-1}\overline{\mathrm{X}}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\mathrm{X}} + a_0.\end{aligned}$$

Il est alors clair que :

$$\alpha \text{ est racine de } \mathrm{P} \iff \mathrm{P}(\alpha) = 0 \iff \overline{\mathrm{P}(\alpha)} = 0 \iff \mathrm{P}(\overline{\alpha}) = 0 \iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } \mathrm{P}.$$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

II/ Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :
L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a\,;b) & \longmapsto & z = a + \mathrm{i}\,b \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

Preuve : D'après le théorème (5), tout nombre complexe z possède un unique antécédent $\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\,;\dfrac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ par φ qui est donc bien bijective entre ces deux ensembles.

Remarque : Pour l'injectivité, c'est simplement une traduction du corollaire (1.1) .

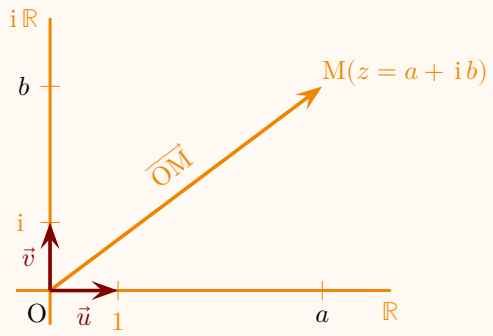
En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leur partie réelle et imaginaire sont égales.

Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ appelé *plan complexe*.

II.1 Représentation des nombres complexes

Le théorème (8) permet donc d'associer à $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a\,;b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
Plus précisément,

Proposition 9 :
- À tout nombre $z = a + \mathrm{i}\,b$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$.

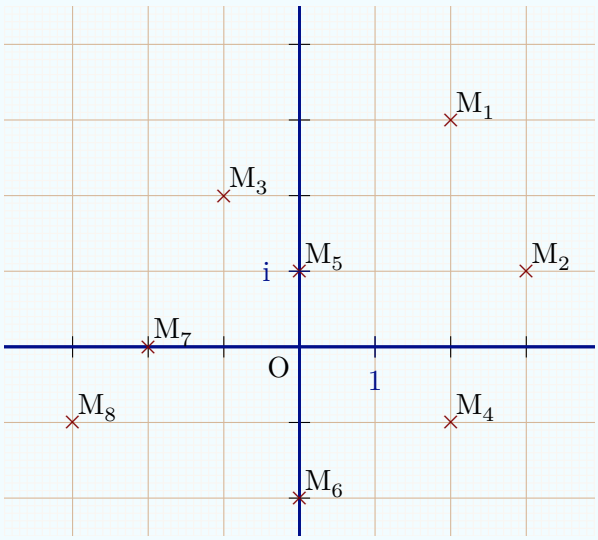


1. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé *plan complexe*.
2. Le nombre complexe z est appelé l'*affixe* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on écrit $\mathrm{M}(z)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)$.

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

1. $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3 + \mathrm{i}$
3. $z_3 = -1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$
5. $z_5 = \mathrm{i}$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -\mathrm{i} - 3$

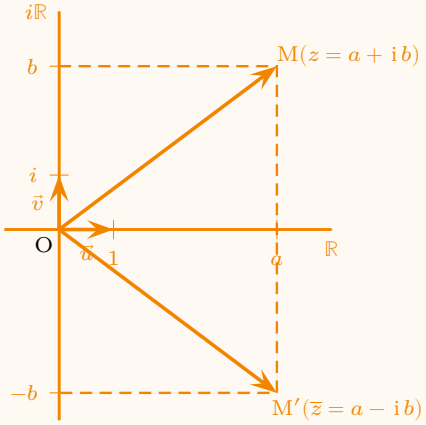


Exercice 9 : Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $\mathrm{Re}\,(z) = -2$
2. $\mathrm{Im}\,(z) = 1$
3. $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant 1$ et $\mathrm{Im}\,(z) \geqslant 1$
4. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 0$
5. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2$
6. $\mathrm{Re}\,((z-1)^2) = 0$

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

Le point M′ d'affixe $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 10 : On pose $\mathrm{j} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

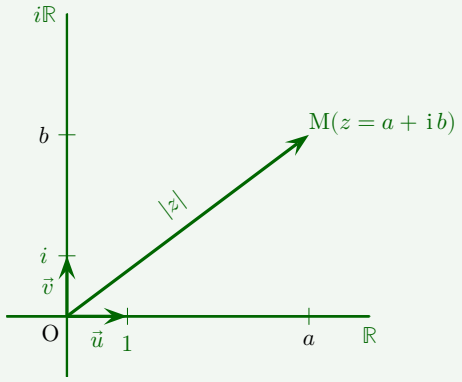
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1, $\overline{1}$, i, $\overline{\mathrm{i}}$, j et $\overline{\mathrm{j}}$.

II.2 Module d'un nombre complexe

Définition 4 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

On appelle *module* de z, noté $|z|$, la distance OM *i.e.* le réel positif tel que :

$$\begin{aligned}|z| &= \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| \\ &= \sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$



Exercice 11 : Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ $\quad z_2 = 1 - \mathrm{i}$ $\quad z_3 = -5 - 2\,\mathrm{i}$ $\quad z_4 = -5$ $\quad z_5 = 9i$

Proposition 11 :
Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et z' deux nombres complexes.

- $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

  En particulier, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^n = \dfrac{|z^n|}{|z'^n|}$.
- $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$.
- $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

— Il suffit de calculer : $z\overline{z} = (a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

La forme de $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ est tout de même plus sympathique que celle de la proposition (1) !

— $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$.

Observez surtout que l'on a une équivalence entre un zéro complexe ($z = 0_{\mathbb{C}}$) et un zéro réel ($|z| = 0_{\mathbb{R}}$) !

Une autre manière est d'écrire :

$$|z| = 0 \iff z\overline{z} = 0 \iff z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0 \iff z = 0.$$

— $a^2 + b^2 = |-z| = |\overline{z}| = |z|$ ou en revient à la définition :

$$|-z| = \sqrt{(-z)\overline{(-z)}} = \sqrt{(-z)\,(-\overline{z})} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|\,.$$

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|\,.$$

— $|z \times z'| = \sqrt{(zz') \times \overline{(zz')}} = \sqrt{z \times z'\overline{z} \times \overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z} \times z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \times |z'|$.

— Comme $z \neq 0$ alors $|z| \neq 0$ et $\overline{z} \neq 0$ et on a :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{z} \times \frac{1}{\overline{z}}} = \sqrt{\frac{1}{z\overline{z}}} = \frac{1}{\sqrt{z\overline{z}}} = \frac{1}{|z|}.$$

Une autre méthode est de montrer que $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$ *i.e.* $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ est l'inverse de $|z|$ soit $\dfrac{1}{|z|}$.

— $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

— Doit-on vraiment montrer que $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ ou $b^2 \leqslant a^2 + b^2$?

Exercice 12 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$z_1 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(-1 - \mathrm{i})$

$z_2 = \mathrm{i}\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)$

$z_3 = \left(\dfrac{-3\,\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$

$z_4 = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$

II.3 Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :
Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

En particulier, $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ *i.e.* les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Preuve : Pour l'inégalité de droite, on a :

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) && \text{(VIII.1)}\\
&\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2\big|\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})\big| && \text{(VIII.2)}\\
&\leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2\big|z_1\overline{z_2}\big| = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| && \text{(VIII.3)}\\
&= \big(|z_1|+|z_2|\big)^2.
\end{aligned}$$

Inégalité entre deux réels positifs donc $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.

Pour l'inégalité de gauche, il suffit d'écrire que $|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_2|$ *i.e.* $|z_1|-|z_2| \leqslant |z_1+z_2|$. Par symétrie entre z_1 et z_2, on a aussi $|z_2|-|z_1| \leqslant |z_1+z_2|$.

En conclusion, $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1+z_2|$.

Supposons avoir l'égalité $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ alors les inégalités (VIII.2) et (VIII.3) doivent être des égalités *i.e.*

$$2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 2\,|\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})| = 2\big|z_1\overline{z_2}\big|.$$

Ainsi $\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$ puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = \big|z_1\overline{z_2}\big| &\iff \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})^2 = \big|z_1\overline{z_2}\big|^2 \qquad \text{(les nombres réels étant positifs)}\\
&\iff \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})^2 = \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})^2 + \mathrm{Im}\,(z_1\overline{z_2})^2\\
&\iff \mathrm{Im}\,(z_1\overline{z_2})^2 = 0
\end{aligned}$$

En d'autres termes, le nombre $z_1\overline{z_2}$ est donc un réel positif λ.

Si $z_2 = 0$, $|z_1| \leqslant |z_1|$ est clairement une égalité.

Sinon, on finit en écrivant, $z_1 = z_1 \times \dfrac{z_2\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \times z_2 = \dfrac{\lambda}{|z_2|^2} \times z_2 = \alpha z_2$ où $\alpha = \dfrac{\lambda}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, si $z_1 = \alpha z_2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a facilement :

$$|z_1+z_2| = |\underbrace{(\alpha+1)}_{\geqslant 0} z_2| = (\alpha+1)|z_2| = \underbrace{\alpha}_{\geqslant 0}|z_2|+|z_2| = |\alpha z_2|+|z_2| = |z_1|+|z_2|.$$

Remarque : En remplaçant z_2 par $-z_2$, on a aussi :

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

Quoi qu'il en soit, on a coutume de dire qu'on majore les valeurs absolues de réels et les modules de complexes.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors :

$$\left\|\vec{U}+\vec{V}\right\| \leqslant \left\|\vec{U}\right\| + \left\|\vec{V}\right\|.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires de *même* sens.

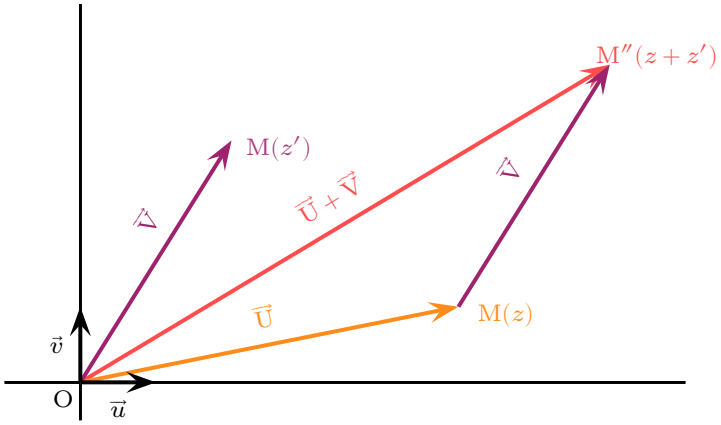


Figure VIII.1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

Par récurrence, on montre facilement que,

Corollaire 12.1 :
Pour toute famille z_1, z_2, ..., z_n de nombres complexes, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

III/ L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

III.1 Fonctions vectorielles

Définition 5 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

— *partie réelle* de f : $\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)). \end{array}$

— et *partie imaginaire* de f : $\mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)). \end{array}$

On a alors :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)(x). \end{array}$$

En identifiant $\mathbb{C}$ au plan complexe $\mathbb{R}^2$, la fonction f est un exemple de fonctions, dites *vectorielles*.

En particulier, on peut également définir les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$\forall\, x \in \mathrm{I},$

- $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.
- $|f|(x) = |f(x)|$.

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

- $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f-\overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$.

Exercice 13 : Soit $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2-1)$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)\,, \mathrm{Im}\,(f)\,, \overline{f}$ et $|f|$.

Théorème 13 (Continuité) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

Preuve : Tout repose sur l'inégalité triangulaire de la proposition (12) . Soit a un élément de I.

Supposons $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ continues en a. Alors

$$\big|f(x)-f(a)\big| \leqslant \big|\mathrm{Re}\,(f)\,(x) - \mathrm{Re}\,(f)\,(a)\big| + \big|\mathrm{Im}\,(f)\,(x) - \mathrm{Im}\,(f)\,(a)\big|.$$

La continuité de f en a en découle.

Réciproquement, si f est continue en a, on en déduit que $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont trivialement à l'aide des inégalités de la proposition (11) :

$$\big|\mathrm{Re}\,(f)\,(x) - \mathrm{Re}\,(f)\,(a)\big| = \big|\mathrm{Re}\,(f(x)-f(a))\,\big| \leqslant \big|f(x)-f(a)\big|$$

et

$$\big|\mathrm{Im}\,(f)\,(x) - \mathrm{Im}\,(f)\,(a)\big| = \big|\mathrm{Im}\,(f(x)-f(a))\,\big| \leqslant \big|f(x)-f(a)\big|.$$

Théorème 14 (Dérivabilité) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f'(x) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)'\,(x).$$

Autrement dit $\mathrm{Re}\,(f') = \Big(\mathrm{Re}\,(f)\Big)'$ et $\mathrm{Im}\,(f') = \Big(\mathrm{Im}\,(f)\Big)'$.

Preuve : Soit $a \in \mathrm{I}$. La démonstration est identique à la précédente en majorant les quotients ci-dessous suivant les besoins :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \left(\mathrm{Re}\,(f)'\,(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f)'\,(a)\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(f)\,(x) - \mathrm{Re}\,(f)\,(a)}{x-a} - \mathrm{Re}\,(f)'\,(a) + \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{Im}\,(f)\,(x) - \mathrm{Im}\,(f)\,(a)}{x-a} - \mathrm{Im}\,(f)'\,(a)\right).$$

Les limites $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{Re}\,(f)\,(x) - \mathrm{Re}\,(f)\,(a)}{x-a} = \mathrm{Re}\,(f)'\,(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{Im}\,(f)\,(x) - \mathrm{Im}\,(f)\,(a)}{x-a} = \mathrm{Im}\,(f)'\,(a)$ existant, on obtient alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \mathrm{Re}\,(f)'\,(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f)'\,(a) \quad \textit{i.e.} \quad f'(a) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f)'\,(a).$$

Réciproquement, il suffira d'écrire, exemple, que :

$$\frac{\mathrm{Re}\,(f)\,(x) - \mathrm{Re}\,(f)\,(a)}{x-a} - \mathrm{Re}\,(f)'\,(a) = \mathrm{Re}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right),$$

puis se rappeler encore que $|\mathrm{Re}\,(u)| \leqslant |u|$.

ATTENTION

Si f est une fonction à valeurs complexes, ce n'est pas encore à proprement parler, une fonction complexe car elle n'est pas encore « de la variable complexe » mais plutôt un cas particulier de *fonctions vectorielles*.

Augmenter le but, ne pose pas vraiment de problèmes et l'on pourrait tout aussi bien considérer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\, f_2(x), \dots,\, f_n(x)) \end{array}.$$

Augmenter la source, demandera de redéfinir totalement les notions de continuité et de dérivabilité notamment à partir d'une *topologie* de $\mathbb{C}$ à définir aussi.

On parlera alors de *fonctions holomorphes* qui ont de très puissantes propriétés notamment leur analyticité. To be continued...

Exemple 7 : La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x. \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x.$$

Exercice 14 : Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2 - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Citons par exemple :

Proposition 15 :
Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\dfrac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Preuve : Il suffit simplement d'écrire et d'identifier. Montrons par exemple que $(fg)' = f'g + fg'$ en notant f_1, f_2, g_1 et g_2 les fonctions réelles et imaginaires de f et g respectivement :

$$fg = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + \mathrm{i}\,(f_1 g_2 + f_2 g_1).$$

En dérivant et en identifiant, on a, d'une part :

$$(fg)' = (f_1' g_1 + f_1 g_1' - f_2' g_2 - f_2 g_2') + \mathrm{i}\,(f_1' g_2 + f_1 g_2' + f_2' g_1 + f_2 g_1').$$

D'autre part, en développant $f'g + fg'$:

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= (f_1' + \mathrm{i}\, f_2')(g_1 + \mathrm{i}\, g_2) + (f_1 + \mathrm{i}\, f_2)(g_1' + \mathrm{i}\, g_2') \\ &= (f_1' g_1 + f_1 g_1' - f_2' g_2 - f_2 g_2') + \mathrm{i}\,(f_1' g_2 + f_1 g_2' + f_2' g_1 + f_2 g_1'). \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

III.2 Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta). \end{array}$$

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\,\cos(\theta) = \mathrm{i}\, f(\theta).$$

2. f vérifie $f(0) = 1$.
3. La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathscr{E}) \quad \begin{cases} y' = \mathrm{i}\, y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a\, y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, on pose comme définition : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Conclusion : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta).}$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\,\sin(\pi) = -1$.

Autrement écrit :

Théorème 16 (Relation d'Euler) :
Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0.} \tag{VIII.4}$$

Cette relation relie d'une manière quasi-miraculeuse, les 5 constantes universelles des mathématiques 0, 1, π, i et e et avec elles, relie, dans l'ordre, l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse.

Proposition 17 :
Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = 1$.
2. $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = 1$.
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}$.
5. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
6. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$.

On récupère ainsi toutes les propriétés de l'exponentielle réelle.

Preuve :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = \cos(0) + \mathrm{i}\,\sin(0) = 1$.
2. $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$.
3. $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\,\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}\,(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + \mathrm{i}\,\sin(\theta')) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}\end{aligned}$$
4. Par récurrence sur n à partir de la relation précédente.
5. Il suffit d'écrire et d'utiliser la parité des fonctions cos et sin :
$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \overline{\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\,\sin(\theta) = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}.$$
6. $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \begin{cases}\cos(\theta) = \cos(\theta)' \\ \sin(\theta) = \sin(\theta)'\end{cases} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]\,.$$

III.3 Nombres complexes de module 1

En remarquant que $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ *i.e.* le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1, on est encouragé à s'intéresser à ce dernier :

Définition 6 (Cercle trigonométrique) : On appelle *cercle trigonométrique* et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :
Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.
Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.
Stabilité par l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Preuve :

1. Soient $z,\ z' \in \mathbb{U}$. $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1 \implies zz' \in \mathbb{U}$.
2. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $z \neq 0$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$. Donc $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

   Enfin, $|z| = 1 \iff z \times \overline{z} = 1 \iff \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Remarque : Tout élément de $\mathbb{U}$ admet donc un symétrique (inverse) pour la multiplication. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est encore un élément de $\mathbb{U}$ et $1 \in \mathbb{U}$. Ces trois propriétés font dire de $\mathbb{U}$ qu'il est un *groupe* multiplicatif à l'instar de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preuve : Comme $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$, on a facilement $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{U}$.

Réciproquement, par définition des fonctions cos et sin, tout point $\mathrm{M}(z)$ du cercle trigonométrique a pour coordonnées $(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ *i.e.* pour affixe $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et l'inclusion voulue.

En conclusion, $\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Plus particulièrement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $\mathrm{e}^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel θ est, de plus, unique si on impose $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$.

Corollaire 19.1 :

1. La fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

   Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha\,;\alpha + 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.
2. La fonction $(r\,;\theta) \longmapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

Preuve :

1. Simple traduction du théorème (19).
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme $z \neq 0$ alors $r = |z| \neq 0$ et on peut écrire $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

   Il existe alors un unique $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ ou encore un unique couple $(r\,;\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi\,;\pi]$ tel que :
   $$z = |z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$
   L'application $(r\,;\theta) \longmapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est bien une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

IV/ Forme polaire

IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle

De manière pratique, le corollaire (19.1) se traduit par le résultat suivant :

Définition/Théorème 7 :

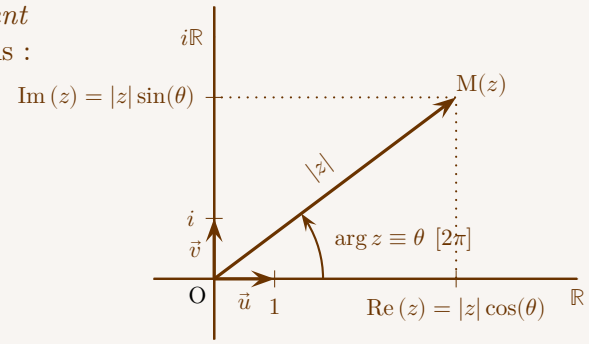
1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :
   $$\begin{aligned} z &= r\ \mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec } r = |z| && \text{(forme exponentielle)} \\ &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta)). && \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

   Cette écriture s'appelle la *forme trigonométrique/exponentielle*/polaire de z.

2. Tout réel θ de ce type s'appelle un *argument de z* et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|}.$$

On note alors $\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$.



3. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z.
4. L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi\,;\pi]$ définit l'argument principal de z, noté $\arg(z)$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel *positif*.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = 1$.

Remarques :

— On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.

— On a vu que si θ_0 est un argument de z, l'ensemble de ses arguments est de la forme $\left\{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

— Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0\,;2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.

— Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, ... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :
Soit z un nombre complexe non nul.

— $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi \ [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 \ [\pi]$.

— $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$.

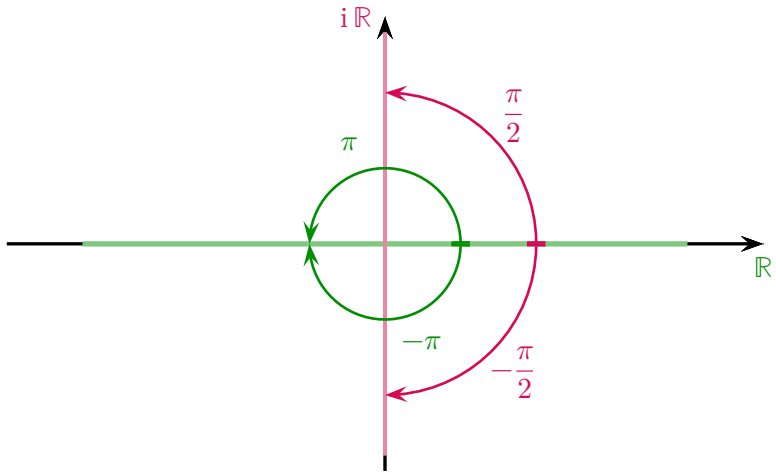


Figure VIII.2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 : Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Exemple 9 : Quelle est la forme algébrique de $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\,.$$

Exercice 16 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ $\qquad$ $z_2 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\,\sin(\pi)$

Exemples 10 : Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} = 1.$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,.$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} = -1.$
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = 2\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,2\sin\dfrac{\pi}{3} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$
- $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} = 1 + \mathrm{i}\,.$
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} = 2\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,2\sin\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \mathrm{i}\,.$

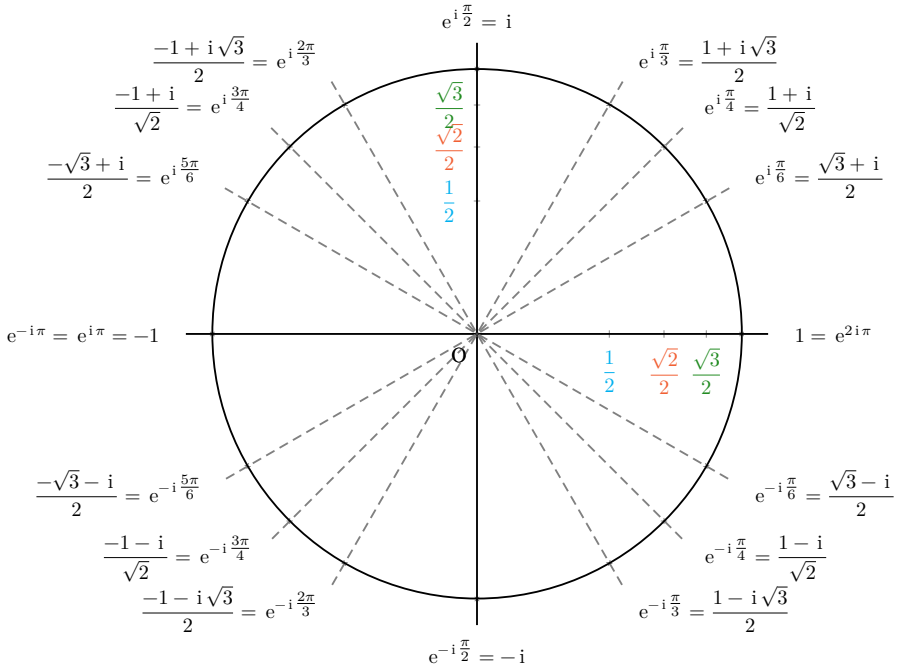
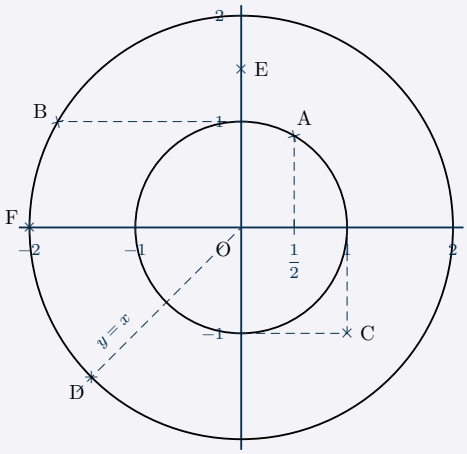


Figure VIII.3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 11 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$\begin{aligned}
z &= 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)}\\
&= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] && \text{(Forme trigonométrique)}\\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)}
\end{aligned}$$

Exercice 17 : Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



Méthode 4 (Mettre sous forme trigonométrique un nombre complexe) :
Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

$$\text{Au pire, si } a \neq 0,\ \theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)\ [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi\ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi\ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\, \frac{b}{|z|} \right).$$

Exemples 12 :

1. $\arg(3 + 2\,\mathrm{i}) \equiv \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)\ [2\pi]$.
2. $\arg(-1 + \mathrm{i}) \equiv \arctan(-1) + \pi = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
3. $\arg\left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \equiv \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exemples 13 : Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

— $z_1 = 1 - i$: $\begin{cases} |1 - i| & = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) & = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) & = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

D'où $r=\sqrt{2}$, $\theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $z_1 = 1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$
$= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

— $z_2 = -\sqrt{3}+i$: $\begin{cases} \left|-\sqrt{3}+i\right| &= 2 \\ \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où $r=2$, $\theta \equiv \frac{5\pi}{6}$ et $z_2 = -\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$
$= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Exercice 18 : Trouver un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2+2\,\mathrm{i}$.
2. $z_2 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Correction :

1. $z_1 = -2+2\,\mathrm{i}$: $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{2}{|-2+2\,\mathrm{i}\,|} = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{|2+2\,\mathrm{i}\,|} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

   Donc $\arg(-2+2\,\mathrm{i}\,) = \frac{3\pi}{4}$.

2. $z_2 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$: $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{\left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

   Donc $\arg(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

Exemples 14 (Factorisation directe) : Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$?

1. Tout d'abord, on calcule $|z| = \left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.
2. Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:
$$z = 2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
3. On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

D'où, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

— $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$

— $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π.

Preuve : Soient deux nombres complexes $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = |z'|\,e^{\mathrm{i}\theta'}$ non nuls sous leur forme exponentielle.

$$z = z' \iff |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |z'|\,e^{\mathrm{i}\theta'} \iff \frac{|z|}{|z'|} = \mathrm{e}^{i(\theta'-\theta)} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Or, $\mathrm{e}^{i(\theta'-\theta)} \in \mathbb{R}_+^* \iff \theta - \theta' \equiv 0 \ [2\pi] \iff \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi]$.

Mais alors $\frac{|z|}{|z'|} = \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}} = 1 \iff |z| = |z'|$ et c'est le résultat escompté.

Proposition 22 :
Soient $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

— *Produit :* $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.

— *Puissance :* $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

— *Conjugué :* $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

— *Quotient :* $\frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.

— *Inverse :* $\frac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Moralité :

— Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.

— Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Preuve : Rien à faire si ce n'est rappeler les propriétés de la fonction exponentielle.

Exemple 15 (Forme exponentielle et calculs de produits et quotients) :
On considère les nombres complexes $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {z_2}^4 &= \left(2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 19 : Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right).$$

IV.3 Argument d'un nombre complexe

L'analogie avec la fonction exponentielle et l'idée géniale de remarquer qu'un nombre complexe puisse se mettre sous une forme exponentielle permet d'obtenir rapidement et simplement grâce à la proposition (22) des propriétés sur les modules et les arguments. Concentrons-nous donc sur ces derniers.

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\arg(z^n) = n\arg z.}$

ATTENTION $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$.

Bien sûr, tout le monde aura remarqué que la fonction arg se comporte comme la fonction ln avec les produits.

Preuve : La proposition (23) n'est qu'un cas particulier de la proposition (22) en ne considérant que les arguments.

On considère donc deux nombres complexes $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ écrits sous leur forme exponentielle.

- $zz' = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$. Donc $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$. [3]

— $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et si $z \neq 0 \iff r \neq 0$, $\dfrac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. En ne regardant que les arguments, on obtient $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$. [4]

— Pour l'argument du quotient, soit on écrit que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) \equiv \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)\\ &\equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]\end{aligned}$$

en transformant le quotient en produit et on utilise les formules précédentes, soit on préfère la forme exponentielle :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} \implies \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]\,.$$ [5]

— La dernière assertion est une conséquence de $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. [6]

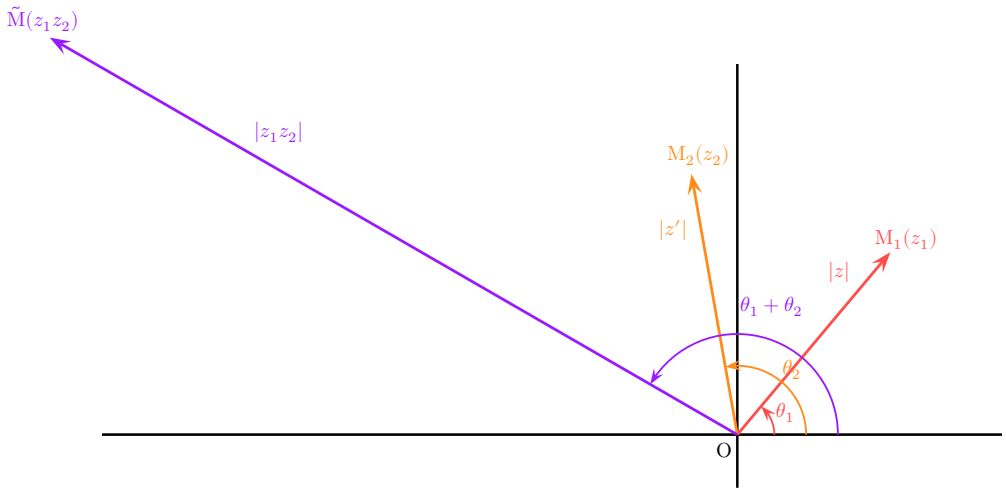


Figure VIII.4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se *multiplient* et les arguments s'*ajoutent*.

Exemple 16 : En reprenant les notations de l' exemple (15) , on obtient, *sans calculs* :

— $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

— $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

— $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

[3]. Sur les modules, on obtiendrait $|zz'| = |z| \times |z'|$.

[4]. Sur les modules, on obtiendrait $|\overline{z}| = |z|$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

[5]. Sur les modules, on obtiendrait $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

[6]. Sur les modules, on obtiendrait $|z^n| = |z|^n$.

V/ Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Exemple 17 (Expression de $\cos\frac{\pi}{12}$) : Il suffit de remarquer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

D'où :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

V.1 Formule d'Euler et de Moivre

Commençons par réécrire une des assertions du théorème (5) :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Preuve : On a :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta),$$
$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\,\sin(\theta).$$

La somme et la différence des deux expressions précédentes donnent le résultat.

Exercice 20 : Développer $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1\right)^3$ et $\mathrm{B} = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\,(\mathrm{i}\,x) = \cos(x) \quad \mathrm{sh}\,(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\,\sin(x)$
$\cos(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{ch}\,(x) \quad \sin(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(x).$

Il est alors aisé de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques à partir de leurs homologues circulaires.

Par exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(\mathrm{i}\,x) + \sin^2(\mathrm{i}\,x) = 1 \iff \mathrm{ch}\,(x)^2 - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$
$$\forall a,\ b \in \mathbb{R}, \cos\left(\mathrm{i}\,(a+b)\right) = \cos(\mathrm{i}\,a)\cos(\mathrm{i}\,b) - \sin(\mathrm{i}\,a)\sin(\mathrm{i}\,b)$$
$$\iff \mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$

Théorème 25 (Formules de Moivre) :
Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\Big)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

Preuve : Magique de simplicité grâce à la notation exponentielle, c'est simplement une réécriture de la proposition (17) :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \iff \Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\Big)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

Un peu d'histoire :

— *Abraham de Moivre* (1667, *Vitry-le-François* - 1667, *Londres) était un mathématicien ami des physiciens et astronomes Newton et Halley qu'il rencontra lors de son exil forcé en Angleterre à la suite de la révocation de l'édit de Nantes en 1685 et la recrudescence des persécutions contre les huguenots*[a]*. Il faudrait théoriquement dire « formule de De Moivre », (selon la règle de conservation de la particule onomastique pour les noms d'une syllabe, comme de Gaulle), mais on dit plus souvent « formule de Moivre ».*

— *La version démontrée par Moivre est la version donnée avec les fonctions* sin *et* cos*, le lien avec les propriétés de l'exponentielle n'ayant été découvertes que plus tard par Euler (19ème siècle), qui est à l'origine de la notation exponentielle* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

a. protestants (ndp.)

Exemple 18 (Duplication des angles) : À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\right)^2 = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\,\sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\right)^2 = \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + 2\,\mathrm{i}\,\cos(\theta)\sin(\theta)$.

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus.

Proposition 26 (Formule d'addition) :
Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Preuve : Pour tous a et b réels, on a :

$$e^{\mathrm{i}\,a} = \cos a + \mathrm{i}\,\sin a \qquad \text{et} \qquad e^{\mathrm{i}\,b} = \cos b + \mathrm{i}\,\sin b.$$

Or, $e^{\mathrm{i}\,a} \times e^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a+b)} = \cos(a+b) + \mathrm{i}\,\sin(a+b)$ mais aussi :

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\,a} \times e^{\mathrm{i}\,b} &= \Big(\cos a + \mathrm{i}\,\sin a\Big)\Big(\cos b + \mathrm{i}\,\sin b\Big) \\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b + \mathrm{i}\,\Big(\sin a\cos b + \cos a\sin b\Big). \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les deux premières formules. Il suffit alors de remplacer b par $-b$ et d'utiliser la parité de $\cos$ et l'imparité de $\sin$ pour avoir la deuxième série de formules.

V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en $\cos^2$ et $\sin^2$.

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$, on procède comme suit :

Méthode 5 (Linéarisation de $\cos^k x \sin^\ell x$) :

1. On utilise les formules d'Euler de la proposition (24) pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$.
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton [7].
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

[7]. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 21 : Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Correction : Appliquons la méthode :

1. $$\begin{aligned}\cos^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+5\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+5\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{32}\cos^3(x)+\frac{5}{16}\cos(x).\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\,\mathrm{i}}\right)^3\\ &= -\frac{1}{2^2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\times\frac{1}{2^3\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{2^5\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

   On pouvait aussi faire autrement :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin^3(x) &= \frac{1}{4}\sin^2(2x)\sin(x)=\frac{1}{8}\left(1-\cos(4x)\right)\sin(x)\\ &= \frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\left(\sin(5x)+\sin(3x)\right)\\ &= -\frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 (Factorisation par l'angle de l'arc moitié) :
Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)

Exercice 22 : Factoriser les expressions suivantes :

1. $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
2. (a) Soient p et g des réels. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\cos\dfrac{p-q}{2}$.
   (b) En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$ avec $(p\,;q)\in\mathbb{R}^2$.

Cette méthode, appelée aussi *principe de symétrisation des arguments*, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

Remarquez que c'est une façon commode de retenir ou retrouver les formules de factorisation des fonctions trigonométriques (transformation d'une somme en produit).

Conséquence de l' exercice (22) , une nouvelle série de formules trigonométriques :

Proposition 27 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :
Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Preuve : Afin de ne pas tout redémontrer, il sera bon de se rappeler, à partir de la première expression de $\cos(p) + \cos(q)$, que

$$-\cos q = \cos(q \pm \pi) \quad \text{et} \quad \pm\sin(p) = \cos\left(p \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 23 : Mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

Correction : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}.$

V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus

Les nombres complexes à travers la forme exponentielle sont aussi utiles pour le calcul de sommes de cosinus ou sinus

On écrira alors que $\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$, $\sin(\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ et on utilisera la linéarité des opérateurs Re et Im avant de remarquer, souvent, un binôme de Newton ou une série géométrique.

Exercice 24 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \quad \text{le noyau de Dirichlet, et} \quad \mathrm{B}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k(t).$$

Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\mathrm{B}_n(t) = \left(\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2$.

Correction : Pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$ et on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}\right) \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k\right) - 1 \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right) - 1 = 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}}\right) - 1 \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) - 1 = 2\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{nt}{2} + \dfrac{(n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{nt}{2} - \dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(2k+1)t}{2}}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(n+1)t}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{(n+1)t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(n+1)t}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la proposition (25) .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos ou en sin, on procède comme à l' exemple (18) *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$) :

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)^n\right)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 25 : Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 28 (Transformation de Fresnel) :
Si $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ et ω un réel, il existe $(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

Preuve : On utilise, comme précédemment, les formules de la proposition (24) .

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = a\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}}{2} - \mathrm{i}\,b\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}}{2} = \frac{a - \mathrm{i}\,b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + \frac{a + \mathrm{i}\,b}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}.$$

Notons $z = \dfrac{a + \mathrm{i}\,b}{2} \neq 0$ et $r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}$ sa forme polaire [8].

$$\begin{aligned}\text{D'où, } a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= \overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t} = \overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + \overline{\overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}} = 2\mathrm{Re}\left(\overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\right)\\ &= 2\mathrm{Re}\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)}\right) = \underbrace{2r}_{\mathrm{A}}\cos\left(\omega t + \varphi\right)\\ &= \mathrm{A}\cos\left(\omega t + \varphi\right).\end{aligned}$$

En particulier, $\boxed{\mathrm{A} = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\boxed{\varphi = -\arg\left(a + \mathrm{i}\,b\right).}$

Remarque : Une telle fonction $t \longmapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ est appelée *signal sinusoïdal*.

Physiquement, le réel A représente son amplitude, et φ son déphasage. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est alors le module de $a + \mathrm{i}\,b$ et la phase son argument.

Exercice 26 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. Simplifier l'expression $\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{6}\sin(\theta)$.
2. Donner une interprétation physique de ce résultat.
3. Même question avec $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$.

Correction :

1. $\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{6}\sin(\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
2. La somme des signaux $\theta \longmapsto \sqrt{2}\cos(\theta)$ et $\theta \longmapsto \sqrt{6}\sin(\theta)$ est encore un signal sinusoïdal de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $-\dfrac{\pi}{6}$.
3. $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

VI/ Exponentielle complexe

Définition 8 : Pour tout nombre complexe z, on appelle *exponentielle de z*, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 19 : $\mathrm{e}^{2+\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}$.

[8]. $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On prend un argument en notation négative simplement pour des facilités d'écriture.

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III) . Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^z \in \mathbb{U}$.

ATTENTION

Ici aussi, ce n'est pas encore la *fonction* exponentielle complexe qui existe et qui est définie par

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{e}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \qquad \text{(VIII.5)}$$

mais seulement la définition *algébrique* du nombre complexe e^z.

De façon immédiate, on a les résultats suivants :

Théorème 29 (Morphisme) :
Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Encore une fois, la relation précédente n'est facile que par la définition algébrique que l'on a donné du nombre e^z.

Montrer cette même formule dans le cadre de la fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ définie en (VIII.5) demande un peu plus de bagages mathématiques. Le théorème (29) est d'ailleurs une propriété caractéristique de cette fonction.

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}\,(\,\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \cos\,(\mathrm{Im}\,(z)\,)$.
- $\mathrm{Im}\,(\,\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \sin\,(\mathrm{Im}\,(z)\,)$.
- $\left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
- $\arg \mathrm{e}^z \equiv \mathrm{Im}\,(z)\ [2\pi]$.
- $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Preuve : Il suffit d'écrire et d'identifier à partir de :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\left(\cos\,(\mathrm{Im}\,(z)\,) + \mathrm{i}\ \sin\,(\mathrm{Im}\,(z)\,)\right).$$

Pour la dernière assertion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'après le théorème (29) :

$$\mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

On en déduit deux choses :

1. La première : e^z ne peut être nul, pas plus que e^{-z}.

2. La seconde : e^z est inversible pour tout $z \in \mathbb{C}$ et sont inverse est e^{-z}.
   Magique !

Théorème 31 (Noyau de l'exponentielle) :
Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}\,(z) & = & \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) & \equiv & \mathrm{Im}\,(z') \ [2\pi] \end{array} \right.$$
$$\iff z \equiv z' \ [2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

Preuve : Déjà fait maintes fois. Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} |e^z| & = & |\mathrm{e}^{z'}| \\ \arg \mathrm{e}^z & \equiv & \arg \mathrm{e}^{z'} \ [2\pi]\,. \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Re}\,(z) & = & \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) & \equiv & \mathrm{Im}\,(z') \ [2\pi]\,. \end{array} \right. \iff z \equiv z' \ [2\,\mathrm{i}\,\pi]\,.$$

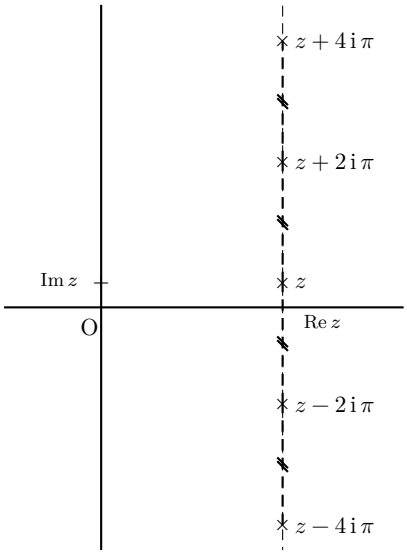


Figure VIII.5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

Théorème 32 (Image réciproque) :
Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

— Si $\omega = 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ n'a pas de solution.
— Si $\omega \neq 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\mathrm{Re}\,(z) = \ln|\omega| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \arg(\omega) \ [2\pi]\,.$$

Preuve : Il suffit d'écrire (encore) les égalités entre module et argument.

Exercice 27 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathrm{e}^z = 2 + \mathrm{i}$.

Correction : $z \equiv \dfrac{1}{5}\ln(5) + \mathrm{i}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)\ [2\,\mathrm{i}\,\pi]$.

Moralité : Le théorème (29) et le théorème (31) montrent que l'application exponentielle est *un morphisme continue surjectif* de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau $2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 33 (Dérivée de composées) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Preuve : On a rapidement :

$$f_1 = \mathrm{Re}\,(\,\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\left(\mathrm{Im}\,(\varphi)\,\right) \quad \text{et} \quad f_2 = \mathrm{Im}\,(\,\mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\left(\mathrm{Im}\,(\varphi)\,\right).$$

Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur I, $\exp(\varphi)$ est dérivable sur I d'après le théorème (14) et en utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned}(\,\mathrm{e}^{\varphi})' &= f_1'\,\mathrm{e}^{f_1}(\cos(f_2) + \mathrm{i}\ \sin(f_2)) + \mathrm{e}^{f_1}(-f_2'\sin(f_2) + \mathrm{i}\,f_2'\cos(f_2))\\ &= (f_1' + \mathrm{i}\ f_2')\,\mathrm{e}^{f_1}(\cos(f_2) + \mathrm{i}\ \sin(f_2))\\ &= \varphi'\,\mathrm{e}^{\varphi}.\end{aligned}$$

Exemple 20 : Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^n\ \mathrm{e}^{ax} = a^n\, f(x).$$

Exercice 28 : Dériver les fonctions complexes $t \longmapsto e^{e^{\mathrm{i}\,t}}$ et $t \longmapsto e^{\arccos(t) + \mathrm{i}\arcsin(t)}$.

Affixe, 13
Angle
    Factorisation par l'angle moitié, 36
Argument
    d'un nombre complexe, 24, 29
    propriétés algébriques, 31

Bernoulli, 1
Bombelli, 1

$\mathbb{C}$, 3
Cardan, 1
Conjugué
    d'un nombre complexe, 8
    Propriétés algébriques, 9
Continuité, 19

Dirichlet, 38
Discriminant, 11
Dérivabilité, 19

Élément neutre
    pour $+_{\mathbb{C}}$, 3
    pour $\times_{\mathbb{C}}$, 3
Équation
    dans $\mathbb{C}$, 11
    du second degré dans $\mathbb{C}$, 11
Euler, 1
    Formule d', 33
    Relation d', 22
Exponentielle, 43
    complexe, 24, 40
    Forme algébrique, 41
    Forme polaire, 41
    sur $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$, 18

Factorisation
    de sinus et de cosinus, 39
Fonction
    bijective, 24
    exponentielle
        complexe, 41
    injective, 3
    surjective, 24, 43
    vectorielle, 19, 20
Forme
    algébrique, 5, 8, 9, 25, 26, 30
    exponentielle, 24, 26, 30
    trigonométrique, 24, 26, 30
Formule
    de factorisation par l'angle moitié, 37
    de Fresnel, 39
    de Moivre, 39

Gauss, 1
Groupe, 23

Halley, 34

i, 4, 5
Identité
    remarquable, 7
Imaginaire
    pur, 5
Inverse
    d'un nombre complexe, 3, 4
Inégalité
    triangulaire, 17

Laplace, 1
Linéarisation
    de cosinus et sinus, 35
Linéarité
    de Re, 38
Loi
    associative, 4
    commutative, 4
    distributive, 4

Méthode
    Factorisation par l'angle moitié, 36
    Forme algébrique d'un quotient, 9
    Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire, 6
    Trouver la forme trigonométrique, 28
Module
    d'un nombre complexe, 15
    propriétés algébriques, 15, 32
Moivre, 34
    Formule de, 34
Morphisme, 43

Newton, 34
Nombre complexe, 3
    Affixe d'un, 13
    argument, 24
    conjugué, 9, 11
    Égalité entre, 13
    Ensemble des, 3
    imaginaire pur, 25
    inverse, 16
    module, 15
    représentation, 13
    réel, 10, 25
Noyau

de Dirichlet, 38
de l'exponentielle, 43

Opposé
d'un nombre complexe, 3, 4

Partie
imaginaire, 5, 18, 35
réelle, 5, 18, 35
Plan
complexe, 13
Polynôme
de Tchebychev, 39

Réel, 6
Nombre, 5

Somme
de sinus et de cosinus, 38
Série
géométrique, 38

Tchebychev, 39
Théorème
de D'Alembert-Gauss, 1
fondamental
de l'algèbre, 2
Topologie
de $\mathbb{C}$., 20
Trigonométrie, 33