Chapitre

VIII Les Nombres Complexes I

CONTENU

I L'ensemble des nombres complexes. . . . 2
I.1 Construction de $\mathbb{C}$. . . . 2
I.2 Conjugué d'un nombre complexe 4
I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude) 6
II Nombres et Plan complexes 7
II.1 Représentation des nombres complexes. . . . 8
II.2 Module d'un nombre complexe 9
II.3 Inégalité triangulaire. . . . 10
III L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$ 11
III.1 Fonctions vectorielles 11
III.2 Notation d'Euler. . . . 13
III.3 Nombres complexes de module 1 14
IV Forme polaire 14
IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle 14
IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle 19
IV.3 Argument d'un nombre complexe. . . . 20
V Applications à la trigonométrie. . . . 21
V.1 Formule d'Euler et de Moivre 22
V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus 23
V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié 23
V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus 24
V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev 24
V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus. . . . 24
VI Exponentielle complexe. . . . 24

I/ L'ensemble des nombres complexes

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) : On appelle ensemble des *nombre complexes*, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

— $(a\,;b) +_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a +_{\mathbb{R}} a'\,;b +_{\mathbb{R}} b')$,

— $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'\,;a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1\,;0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{i} = (0\,;1)\,.$$

L'application $i_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & (a\,;0) \end{array}$ est une injection qui permet alors de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x\,;0)$.

Proposition 1 (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

1. Soient $z = (a\,;b)$ et $z' = (a'\,;b')$ deux nombres complexes.
$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \left\{ \begin{array}{lll} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{array} \right.$$
2. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$:
3. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives et commutatives.
4. $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{C}}$.
5. La loi $+_{\mathbb{C}}$ possède un *élément neutre* $0_{\mathbb{C}} = (0\,;0)$ que l'on notera encore 0.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé *opposé de* z et noté $-z$ et tel que :
$$-z = (-a\,;-b)\,.$$
6. La loi $\times_{\mathbb{C}}$ possède un *élément neutre* $1_{\mathbb{C}} = (1\,;0)$ que l'on notera encore 1.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ non nul possède un symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé *inverse de* z et noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que :
$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$
7. Enfin, le nombre $(0\,;1)$ est tel que $(0\,;1)^2 = (-1\,;0)$. On le notera i.

   En particulier, on a :
$$\mathrm{i}^{\,2} = -1.$$

Si cela était au programme, la proposition (1) pourrait simplement se résumer en disant que $\left(\mathbb{C},\,+,\,\times\right)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve grâce à 6 que :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) : Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ peut s'écrire de manière *unique* la forme :

$$z = a + \mathrm{i}\,b, \qquad \text{avec } (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{i}^{\,2} = -1.$$

— Le nombre réel a s'appelle la *partie réelle* de z notée $\mathrm{Re}\,(z)$.

Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur* et on note $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ leur ensemble.

— Le nombre réel b s'appelle la *partie imaginaire* de z notée $\mathrm{Im}\,(z)$.

Si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, le nombre complexe z est *réel* dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$

— L'écriture $z = a + \mathrm{i}\,b$ est appelée la *forme algébrique* de z.

Exemples 1 :

— $z_1 = 4 + 7\mathrm{i} - (2 + 4\mathrm{i}) = 4 + 7\mathrm{i} - 2 - 4\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$.

— $z_2 = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i}) = 6 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^{\,2} = 6 - \mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$.

— $z_3 = (4 - 3\mathrm{i})^2 = 16 - 24\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 7 - 24\mathrm{i}$.

Exemples 2 :

— $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = -1$.

— $\mathrm{Re}\,(4\,\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(4\,\mathrm{i}) = 4$.

Remarques : $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Méthode 1 (Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire) :
Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

1. On l'écrit sous sa forme algébrique.
2. On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
3. On résout l'équation ainsi écrite.

Exercice 1 : Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

1. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée

   (a) $f(z) \in \mathbb{R}$
   (b) $f(z)$ imaginaire pur
   (c) $\mathrm{Im}\,(f(z)) = 2$
   (d) $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Im}\,(z)$

Corollaire 1.1 :

— Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) &= \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) &= \mathrm{Im}\,(z') \end{cases}$$

— Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')$.
- $-z = -a - \mathrm{i}\,b$.
- $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(a'b + ab')$.
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}$

ATTENTION

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si $\ll$ était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

— soit $\mathrm{i}\,z \ll \mathrm{i}\,z' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.
— soit $\mathrm{i}\,z' \ll \mathrm{i}\,z \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

Proposition 2 (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) :
Soient a et b deux nombres complexes.

— $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
— $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
— $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
— $(a + \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 + 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
— $(a - \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 - 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
— $(a - \mathrm{i}\,b)(a + \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

I.2 Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 3 : Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 + 2\,\mathrm{i}}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{\ }$ » sachant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

D'après la proposition (2), $(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3 - 2i$:

$$z = \frac{(2 - \mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i})}{(3 + 2\,\mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i})} = \frac{4 - 7\,\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} - \mathrm{i}\,\frac{7}{13}.$$

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe.

On appelle *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$.

Exemples 4 :

— $3-2\,\mathrm{i}$ est le conjugué de $3+2\,\mathrm{i}$.
— $\overline{7}=7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
— $\overline{3\,\mathrm{i}}=-3\,\mathrm{i}$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

$z_1=\dfrac{3}{7}-\mathrm{i}\sqrt{7}$ $\quad z_2=\sqrt{2}-3$ $\quad z_3=\sqrt{7}+\mathrm{i}\,\pi$

Proposition 3 :

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad z\overline{z}\in\mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 (Forme algébrique d'un quotient) :
Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=\dfrac{1}{1+i}$ $\quad z_2=\dfrac{1+i}{1-i}$ $\quad z_3=\dfrac{7}{\mathrm{i}}$

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
2. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
3. $\overline{\overline{z}}=z$
4. $\forall\, z\neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall\, z'\neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n}=\overline{z}^n.}$

Exercice 4 : Soit $z\in\mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1=z+5-\mathrm{i}$ $\quad z_2=\mathrm{i}\,z+2$ $\quad z_3=z+\dfrac{1}{\overline{z}}$ $\quad z_4=z+\mathrm{i}\,\overline{z}$

Théorème 5 (Fondamental) :
$\forall\, z \in \mathbb{C}$,

— $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.

— $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

— $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

— $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $\mathrm{M}(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

Exercice 5 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

Méthode 3 (Nombres réels et imaginaires purs) :
1. Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = z$ ou $\mathrm{Im}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \overline{z}$.
2. Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\overline{z} = -z$ ou $\mathrm{Re}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \overline{z}$.

I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

On appelle *discriminant* de l'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ, le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes *conjuguées* : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 5 : Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 7z = 0$.
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
3. $-8 = 3z^2$.

Théorème 7 :
Soit $\mathrm{P(X)} = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + ... + a_1 \mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients *réels*.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

II/ Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :
L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a\,;b) & \longmapsto & z = a + \mathrm{i}\,b \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

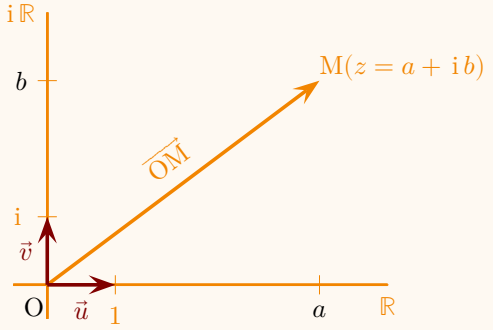
Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ appelé *plan complexe*.

II.1 Représentation des nombres complexes

Le théorème (8) permet donc d'associer à $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a\,;b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
Plus précisément,

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + \mathrm{i}\,b$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$.

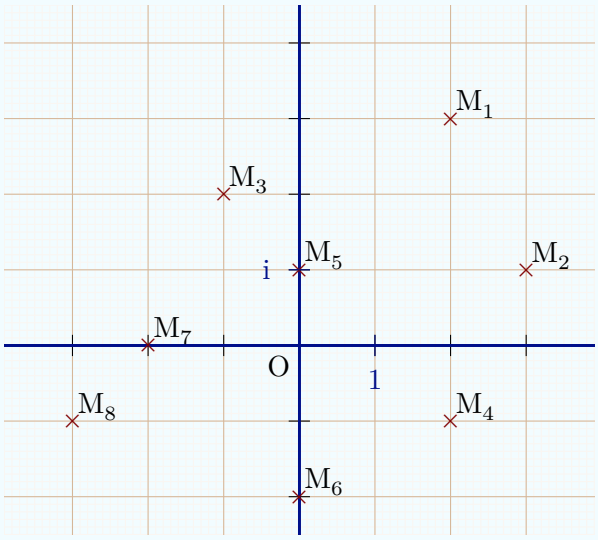


1. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé *plan complexe*.
2. Le nombre complexe z est appelé l'*affixe* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on écrit $\mathrm{M}(z)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)$.

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

1. $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3 + \mathrm{i}$
3. $z_3 = -1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$
5. $z_5 = \mathrm{i}$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -\mathrm{i} - 3$

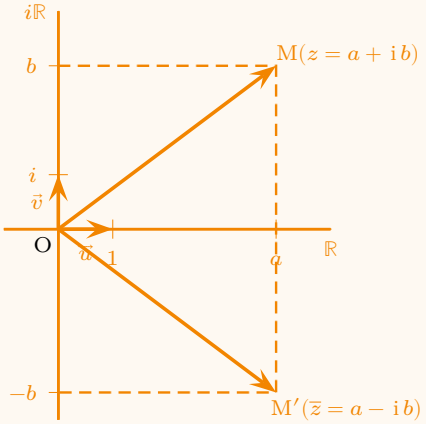


Exercice 8 : Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $\mathrm{Re}\,(z) = -2$
2. $\mathrm{Im}\,(z) = 1$
3. $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant 1$ et $\mathrm{Im}\,(z) \geqslant 1$
4. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 0$
5. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2$
6. $\mathrm{Re}\,((z-1)^2) = 0$

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

Le point M' d'affixe $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 9 : On pose $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

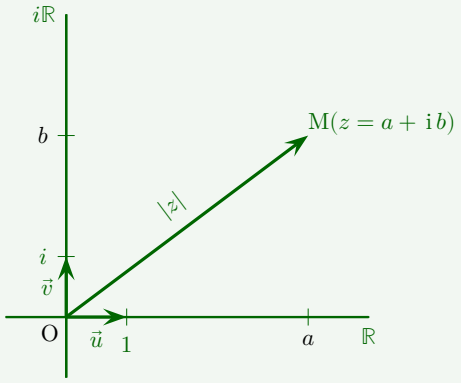
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1, $\overline{1}$, i, $\overline{\mathrm{i}}$, j et $\overline{\mathrm{j}}$.

II.2 Module d'un nombre complexe

Définition 4 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

On appelle *module* de z, noté $|z|$, la distance OM *i.e.* le réel positif tel que :

$$|z| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Exercice 10 : Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ $z_3 = -5 - 2\,\mathrm{i}$ $z_4 = -5$ $z_5 = 9i$

Proposition 11 :
Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et z' deux nombres complexes.

— $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

— $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

— $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$.

— $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

— $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.

— $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^n = \dfrac{|z^n|}{|z'^n|}$.

— $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$.

— $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$z_1 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(-1 - \mathrm{i}\,)$

$z_2 = \mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$

$z_3 = \left(\dfrac{-3\,\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$

$z_4 = \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

II.3 Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :
Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ *i.e.* les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ alors :

$$\left\|\vec{\mathrm{U}} + \vec{\mathrm{V}}\right\| \leqslant \left\|\vec{\mathrm{U}}\right\| + \left\|\vec{\mathrm{V}}\right\|.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont colinéaires de *même* sens.

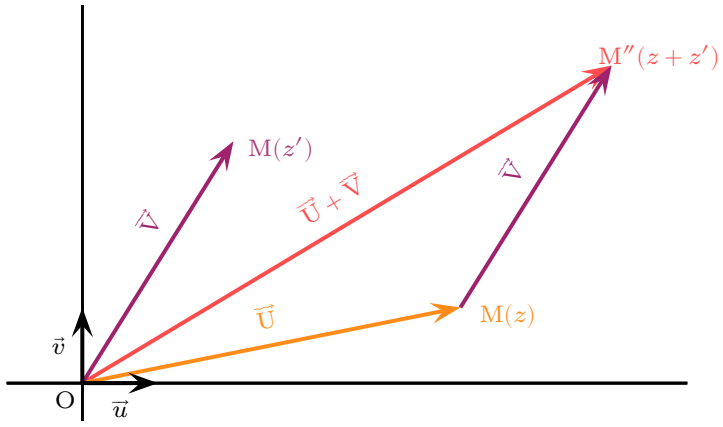


Figure VIII.1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

Corollaire 12.1 :
Pour toute famille z_1, z_2, ..., z_n de nombres complexes, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|\,.$$

III/ L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

III.1 Fonctions vectorielles

Définition 5 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

— *partie réelle* de f : $\quad \mathrm{Re}\,(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(f)\,(x) = \mathrm{Re}\,(f(x))\,. \end{array}$

— et *partie imaginaire* de f : $\quad \mathrm{Im}\,(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(f)\,(x) = \mathrm{Im}\,(f(x))\,. \end{array}$

On a alors :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = \mathrm{Re}\,(f)\,(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(f)\,(x). \end{array}$$

En particulier, on peut également définir les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$\forall\, x \in \mathrm{I},$ • $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}.$ • $|f|(x) = |f(x)|.$

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

• $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}.$ • $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}.$

Exercice 12 : Soit $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2-1)$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|f|$.

Théorème 13 (Continuité) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

Théorème 14 (Dérivabilité) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f'(x) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)'\,(x).$$

Autrement dit $\mathrm{Re}\,(f') = \Big(\mathrm{Re}\,(f)\Big)'$ et $\mathrm{Im}\,(f') = \Big(\mathrm{Im}\,(f)\Big)'$.

Exemple 7 : La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x. \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x.$$

Exercice 13 : Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Proposition 15 :
Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\dfrac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

III.2 Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \theta & \longmapsto & f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta). \end{array}$$

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\,\cos(\theta) = \mathrm{i}\,f(\theta).$$
2. f vérifie $f(0) = 1$.
3. La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :
$$(\mathscr{E}) \quad \begin{cases} y' = \mathrm{i}\,y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
4. Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a\,y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, on pose comme définition :
$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\quad f(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Conclusion : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta).}$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\,\sin(\pi) = -1$.

Autrement écrit :

Théorème 16 (Relation d'Euler) :
Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0.} \qquad \text{(VIII.1)}$$

Proposition 17 :
Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = 1$.
2. $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = 1$.
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
4. $\forall\,n \in \mathbb{N},\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}$.
5. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
6. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$.

On récupère ainsi toutes les propriétés de l'exponentielle réelle.

III.3 Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) : On appelle *cercle trigonométrique* et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :
Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.
Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.
Stabilité par l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Exercice 14 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Plus particulièrement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $\mathrm{e}^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel θ est, de plus, unique si on impose $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$.

Corollaire 19.1 :
1. La fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

   Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha\,;\alpha + 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.
2. La fonction $(r\,;\theta) \longmapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times\,]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

IV/ Forme polaire

IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle

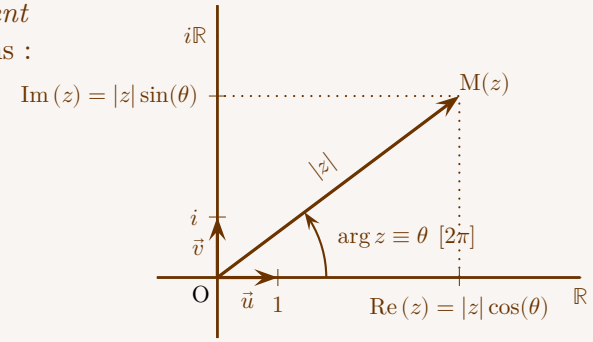
Définition/Théorème 7 : 1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

$$\begin{aligned} z &= r\ \mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec } r = |z| && \text{(forme exponentielle)} \\ &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta)). && \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

Cette écriture s'appelle la *forme trigonométrique/exponentielle*/polaire de z.

2. Tout réel θ de ce type s'appelle un *argument de* z et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|}.$$



On note alors $\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$.

3. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z.
4. L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi\,;\pi]$ définit l'argument principal de z, noté $\arg(z)$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel *positif*.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = 1$.

Remarques :

— On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.

— On a vu que si θ_0 est un argument de z, l'ensemble de ses arguments est de la forme $\left\{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

— Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0\,;2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.

— Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, ... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :
Soit z un nombre complexe non nul.

— $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi \ [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 \ [\pi]$.

— $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$.

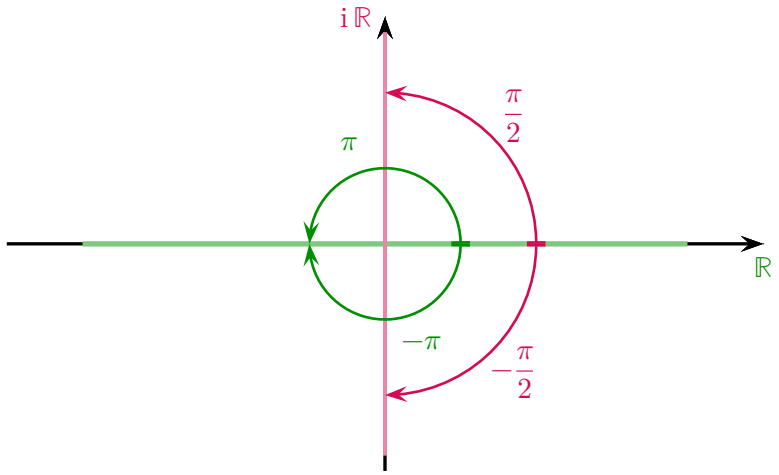


Figure VIII.2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Exemple 8 : Différentes écritures du nombre complexe $1+i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

Exercice 15 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\qquad$ $z_2 = \cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)$

Exemples 9 : Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1$.
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\,2\sin\frac{\pi}{3} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
- $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1+\mathrm{i}$.
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\,2\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}+\mathrm{i}$.

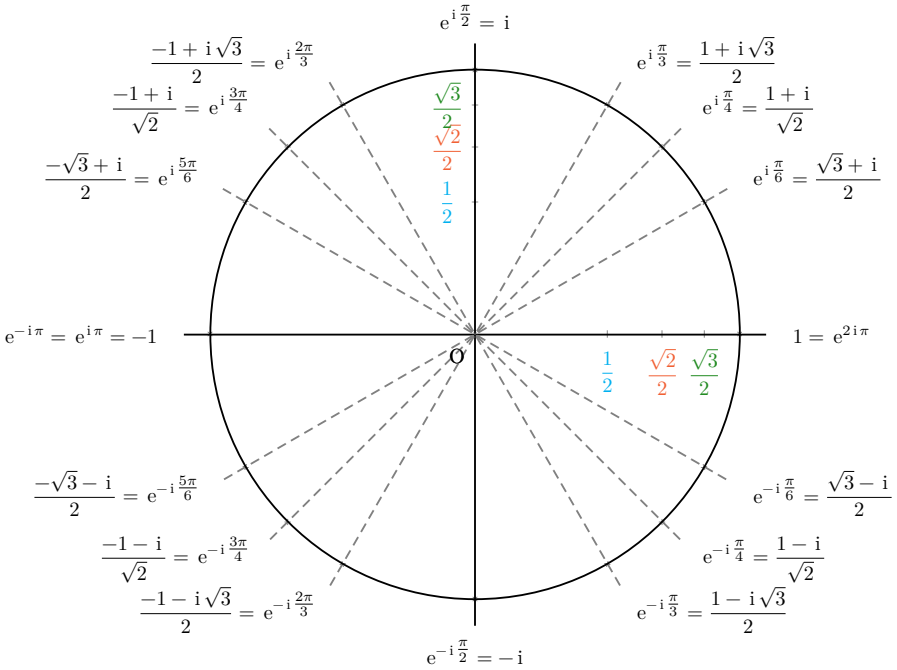
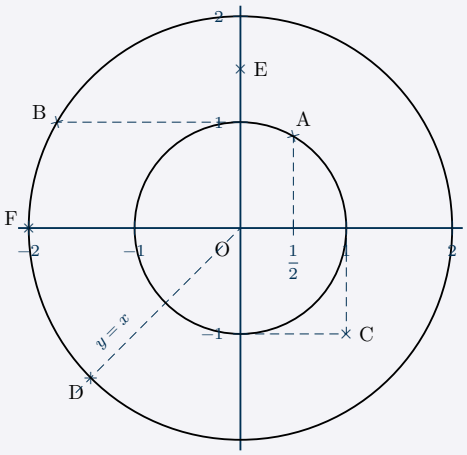


Figure VIII.3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 10 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$\begin{aligned} z &= 4\,e^{i\frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)}\\ &= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] && \text{(Forme trigonométrique)}\\ &= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)} \end{aligned}$$

Exercice 16 : Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



Exemple 11 : Quelle est la forme algébrique de $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\,.$$

Méthode 4 (Mettre sous forme trigonométrique un nombre complexe) :
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

$$\text{Au pire, si } a \neq 0,\ \theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)\ [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi\ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi\ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\,\frac{b}{|z|}\right).$$

Exemples 12 :

1. $\arg(3 + 2\,\mathrm{i}) \equiv \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)\ [2\pi]$.
2. $\arg(-1 + \mathrm{i}) \equiv \arctan(-1) + \pi = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
3. $\arg\left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \equiv \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exemples 13 : Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

— $z_1 = 1 - i$: $\begin{cases} |1 - i| &= \sqrt{2} \\ \cos(\theta) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) &= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

D'où $r = \sqrt{2}$, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

— $z_2 = -\sqrt{3} + i$: $\begin{cases} |-\sqrt{3}+i| &= 2 \\ \cos\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'où $r = 2$, $\theta \equiv \dfrac{5\pi}{6}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$
$= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Exercice 17 : Trouver un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$.
2. $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exemples 14 (Factorisation directe) : Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$?

1. Tout d'abord, on calcule $|z| = \left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.
2. Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\dfrac{1}{2}$ et pour sinus $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

D'où, $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

— $1 = \cos 0 + i\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
— $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π.

Proposition 22 :
Soient $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- *Produit :* $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
- *Puissance :* $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
- *Conjugué :* $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
- *Quotient :* $\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.
- *Inverse :* $\dfrac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Moralité :

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Exemple 15 (Forme exponentielle et calculs de produits et quotients) :
On considère les nombres complexes $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {z_2}^4 &= \left(2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 18 : Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right).$$

IV.3 Argument d'un nombre complexe

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\arg\left(z^n\right) = n\arg z.}$

ATTENTION $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$.

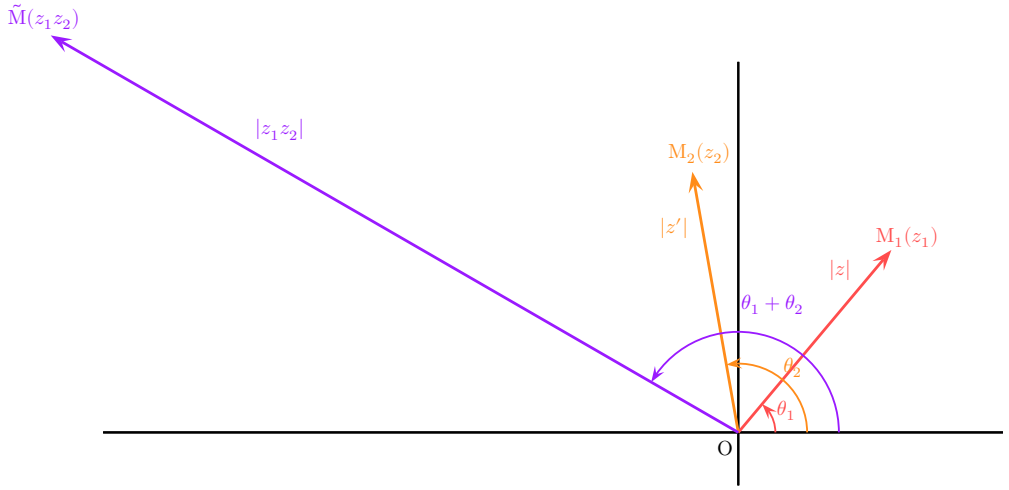


Figure VIII.4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se *multiplient* et les arguments s'*ajoutent*.

Exemple 16 : En reprenant les notations de l' exemple (15) , on obtient, *sans calculs* :

— $\arg(z_1z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

— $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

— $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

V/ Applications à la trigonométrie

Exemple 17 (Expression de $\cos\frac{\pi}{12}$) : Il suffit de remarquer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

D'où :

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

⌊−3⌋. Sur les modules, on obtiendrait $|zz'| = |z| \times |z'|$.
⌊−2⌋. Sur les modules, on obtiendrait $|\overline{z}| = |z|$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
⌊−1⌋. Sur les modules, on obtiendrait $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
⌊0⌋. Sur les modules, on obtiendrait $|z^n| = |z|^n$.

V.1 Formule d'Euler et de Moivre

Commençons par réécrire une des assertions du théorème (5) :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Exercice 19 : Développer $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1\right)^3$ et $\mathrm{B} = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4$.

Théorème 25 (Formules de Moivre) :
Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\Big)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

Exemple 18 (Duplication des angles) : À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^2 = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^2 = \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + 2\,\mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta)$.

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Proposition 26 (Formule d'addition) :
Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Méthode 5 (Linéarisation de $\cos^k x \sin^\ell x$) :

1. On utilise les formules d'Euler de la proposition (24) pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton [1].
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

Exercice 20 : Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 (Factorisation par l'angle de l'arc moitié) :
Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)

Exercice 21 : Factoriser les expressions suivantes :

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
2. (a) Soient p et g des réels. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}} \cos\dfrac{p-q}{2}$.
   (b) En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$ avec $(p\,;q) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 27 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :
Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 22 : Mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

[1]. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus

Exercice 23 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \quad \text{le noyau de Dirichlet, et} \quad \mathrm{B}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k(t).$$

Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \dfrac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ et $\mathrm{B}_n(t) = \left(\dfrac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$.

V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$) :

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 24 : Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 28 (Transformation de Fresnel) :
Si $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ et ω un réel, il existe $(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathrm{A}\cos\left(\omega t + \varphi\right).$$

En particulier, $\boxed{\mathrm{A} = 2r = \sqrt{a^2+b^2}}$ et $\boxed{\varphi = -\arg\left(a + \mathrm{i}\,b\right).}$

Exercice 25 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. Simplifier l'expression $\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{6}\sin(\theta)$.
2. Donner une interprétation physique de ce résultat.
3. Même question avec $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$.

VI/ Exponentielle complexe

Définition 8 : Pour tout nombre complexe z, on appelle *exponentielle de z*, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 19 : $\mathrm{e}^{2+\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}$.

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III) . Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^z \in \mathbb{U}$.

ATTENTION Ici aussi, ce n'est pas encore la *fonction* exponentielle complexe mais seulement la définition *algébrique* du nombre complexe e^z.

Théorème 29 (Morphisme) :
Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\cos\left(\mathrm{Im}\,(z)\right)$.
- $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\sin\left(\mathrm{Im}\,(z)\right)$.
- $\left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
- $\arg \mathrm{e}^z \equiv \mathrm{Im}\,(z)\ [2\pi]$.
- $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Théorème 31 (Noyau de l'exponentielle) :
Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} &\iff \begin{cases}\mathrm{Re}\,(z) &= \mathrm{Re}\,(z')\\ \mathrm{Im}\,(z) &\equiv \mathrm{Im}\,(z')\ [2\pi]\end{cases}\\ &\iff z \equiv z'\ [2\,\mathrm{i}\,\pi].\end{aligned}$$

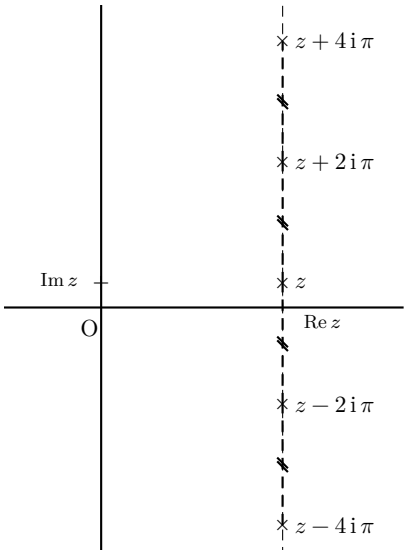


Figure VIII.5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

Théorème 32 (Image réciproque) :
Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\mathrm{Re}\,(z) = \ln|\omega| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \arg(\omega)\ [2\pi]\,.$$

Exercice 26 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathrm{e}^z = 2 + \mathrm{i}$.

Théorème 33 (Dérivée de composées) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Exemple 20 : Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^n\ \mathrm{e}^{ax} = a^n\, f(x).$$

Exercice 27 : Dériver les fonctions complexes $t \longmapsto e^{e^{\mathrm{i}\,t}}$ et $t \longmapsto e^{\arccos(t)+\mathrm{i}\,\arcsin(t)}$.