

Les Nombres Complexes I

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 8



- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Nombres et Plan complexes
- 3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$
- 4 Forme polaire
- 5 Applications à la trigonométrie
- 6 Exponentielle complexe



 On suppose l'ensemble \mathbb{R} des réels muni de ces deux opérations $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ connu et on construit un nouvel ensemble.



I. L'ensemble des nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

- Construction de \mathbb{C}
- Conjugué d'un nombre complexe
- Équations dans \mathbb{C} (prélude)

2 Nombres et Plan complexes

3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

4 Forme polaire

5 Applications à la trigonométrie

6 Exponentielle complexe



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :

On appelle ensemble des **nombre complexes**, noté \mathbb{C} , l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

$$\blacksquare (a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b'),$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :

On appelle ensemble des **nombre complexes**, noté \mathbb{C} , l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

- $(a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b')$,
- $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'; a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :

On appelle ensemble des **nombre complexes**, noté \mathbb{C} , l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

- $(a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b')$,
- $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'; a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1; 0) \quad \text{et} \quad i = (0; 1).$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :

On appelle ensemble des **nombre complexes**, noté \mathbb{C} , l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

- $(a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b')$,
- $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'; a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1; 0) \quad \text{et} \quad i = (0; 1).$$

L'application $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une injection qui permet alors de

$$a \mapsto (a; 0)$$

considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x; 0)$.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

❶ Soient $z = (a; b)$ et $z' = (a'; b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{cases}$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

① Soient $z = (a; b)$ et $z' = (a'; b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{cases}$$

② Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de \mathbb{R} :

L'assertion (2) permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et \times .



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

① Soient $z = (a; b)$ et $z' = (a'; b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{cases}$$

② Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de \mathbb{R} :

③ Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives et commutatives.

L'assertion (2) permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et \times .



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

❶ Soient $z = (a; b)$ et $z' = (a'; b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{cases}$$

❷ Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de \mathbb{R} :

❸ Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives et commutatives.

❹ $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{C}}$.

Si cela était au programme, la **proposition (1)** pourrait simplement se résumer en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

- 5 La loi $+_{\mathbb{C}}$ possède un élément neutre $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$ que l'on notera encore 0. Tout nombre complexe $z = (a; b)$ possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé opposé de z et noté $-z$ et tel que :

$$-z = (-a; -b).$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

- ⑤ La loi $+_{\mathbb{C}}$ possède un **élément neutre** $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$ que l'on notera encore 0. Tout nombre complexe $z = (a; b)$ possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé **opposé de z** et noté $-z$ et tel que :

$$-z = (-a; -b).$$

- ⑥ La loi $\times_{\mathbb{C}}$ possède un **élément neutre** $1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$ que l'on notera encore 1. Tout nombre complexe $z = (a; b)$ non nul possède un symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé **inverse de z** et noté $\frac{1}{z}$ et tel que :

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 1 (Identification des lois de \mathbb{R} et de \mathbb{C}) :

- Enfin, le nombre $(0; 1)$ est tel que $(0; 1)^2 = (-1; 0)$. On le notera i .
En particulier, on a :

$$i^2 = -1.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ peut s'écrire de manière **unique** la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée $\operatorname{Re}(z)$.
Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ peut s'écrire de manière **unique** la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée $\operatorname{Re}(z)$.
Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.
- Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z notée $\operatorname{Im}(z)$.
Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, le nombre complexe z est **réel** dont l'ensemble est noté \mathbb{R}



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ peut s'écrire de manière **unique** la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée $\text{Re}(z)$.
Si $\text{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.
- Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z notée $\text{Im}(z)$.
Si $\text{Im}(z) = 0$, le nombre complexe z est **réel** dont l'ensemble est noté \mathbb{R}
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** de z .



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :

Tout nombre complexe $z = (a; b)$ peut s'écrire de manière **unique** la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée $\operatorname{Re}(z)$.
Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.
- Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z notée $\operatorname{Im}(z)$.
Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, le nombre complexe z est **réel** dont l'ensemble est noté \mathbb{R}
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** de z .

Remarques : $\operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples I :

$$\blacksquare z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

$$\blacksquare z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$$

$$\blacksquare z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

$$\blacksquare z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$$

$$\blacksquare z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$$

$$\blacksquare z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$
- $z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$
- $z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i.$

Exemple 2 :

- $\operatorname{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3}$ et $\operatorname{Im}(\sqrt{3} - i) = -1.$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Globalement, comprenez que \mathbb{C} contient \mathbb{R} , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$
- $z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$
- $z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i.$

Exemple 2 :

- $\operatorname{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3}$ et $\operatorname{Im}(\sqrt{3} - i) = -1.$
- $\operatorname{Re}(4i) = 0$ et $\operatorname{Im}(4i) = 4.$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

- 1 On l'écrit sous sa forme algébrique.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

- 1 On l'écrit sous sa forme algébrique.
- 2 On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

- 1 On l'écrit sous sa forme algébrique.
- 2 On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
- 3 On résout l'équation ainsi écrite.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- 1 Donner la forme algébrique de $f(z)$.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- 1 Donner la forme algébrique de $f(z)$.
- 2 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- 1 Donner la forme algébrique de $f(z)$.
- 2 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée

- 1 $f(z) \in \mathbb{R}$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- 1 Donner la forme algébrique de $f(z)$.
- 2 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée
 - 1 $f(z) \in \mathbb{R}$
 - 2 $f(z)$ imaginaire pur



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- ❶ Donner la forme algébrique de $f(z)$.
- ❷ Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée
 - ❶ $f(z) \in \mathbb{R}$
 - ❷ $f(z)$ imaginaire pur
 - ❸ $\text{Im}(f(z)) = 2$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Exercice I :

Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- ① Donner la forme algébrique de $f(z)$.
- ② Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplit la condition demandée
 - ① $f(z) \in \mathbb{R}$
 - ② $f(z)$ imaginaire pur
 - ③ $\text{Im}(f(z)) = 2$
 - ④ $\text{Re}(f(z)) = \text{Im}(z)$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- $-z = -a - ib$.

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

- $zz' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$.

- $-z = -a - ib$.

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Corollaire I :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

- $-z = -a - ib$.

- $zz' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$.

- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Il n'existe pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si \ll était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

ATTENTION

- soit $iz \ll iz' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$
par anti-symétrie.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Il n'existe pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si \ll était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

ATTENTION

- soit $iz \ll iz' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$
par anti-symétrie.
- soit $iz' \ll iz \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$
par anti-symétrie.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Il n'existe pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si \ll était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

ATTENTION

- soit $iz \ll iz' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$
par anti-symétrie.
- soit $iz' \ll iz \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$
par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

$$\blacksquare (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

$$\blacksquare (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

$$\blacksquare (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\blacksquare (a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

$$\blacksquare (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\blacksquare (a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

$$\blacksquare (a - ib)^2 = a^2 - 2abi - b^2.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de \mathbb{C}

Proposition 2 (Identités remarquables dans \mathbb{C}) :

Soient a et b deux nombres complexes.

$$\blacksquare (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\blacksquare (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\blacksquare (a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

$$\blacksquare (a - ib)^2 = a^2 - 2abi - b^2.$$

$$\blacksquare (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 3 :

Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \frac{2 - i}{3 + 2i}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{\quad}$ » sachant que $i^2 = -1$.

D'après la **proposition (2)**, $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3 - 2i$:

$$z = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - i \frac{7}{13}.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\bar{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\bar{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\bar{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 :

Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

① $z_1 = \frac{3}{7} - i\sqrt{7}$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\bar{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 :

Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

① $z_1 = \frac{3}{7} - i\sqrt{7}$

② $z_2 = \sqrt{2} - 3$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemples 4 :

- $3 - 2i$ est le conjugué de $3 + 2i$.
- $\bar{7} = 7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 :

Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

① $z_1 = \frac{3}{7} - i\sqrt{7}$

② $z_2 = \sqrt{2} - 3$

③ $z_3 = \sqrt{7} + i\pi$

I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\textcircled{1} \quad z_1 = \frac{1}{1+i}$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\textcircled{1} \quad z_1 = \frac{1}{1+i}$$

$$\textcircled{2} \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\textcircled{1} \quad z_1 = \frac{1}{1+i}$$

$$\textcircled{2} \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\textcircled{3} \quad z_3 = \frac{7}{i}$$

I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$① \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$② \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \textcircled{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{4} \quad \forall z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{4} \quad \forall z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\textcircled{5} \quad \forall z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{4} \quad \forall z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\textcircled{5} \quad \forall z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$\textcircled{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{4} \quad \forall z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\textcircled{5} \quad \forall z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Une fois n'est pas coutume, remarquez que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition **et** la multiplication. Fait exceptionnel !



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

① $z_1 = z + 5 - i$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

① $z_1 = z + 5 - i$ ② $z_2 = iz + 2$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

① $z_1 = z + 5 - i$

② $z_2 = iz + 2$

③ $z_3 = z + \frac{1}{z}$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

① $z_1 = z + 5 - i$

② $z_2 = iz + 2$

③ $z_3 = z + \frac{1}{z}$

④ $z_4 = z + i\bar{z}$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall z \in \mathbb{C},$

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Méthode 3 :

- ❶ Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = z$ ou $\text{Im}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \bar{z}$.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Méthode 3 :

- 1 Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = z$ ou $\text{Im}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \bar{z}$.
- 2 Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = -z$ ou $\text{Re}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \bar{z}$.



I. L'ensemble des nombres complexes

2. Conjugué d'un nombre complexe

Méthode 3 :

- 1 Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = z$ ou $\text{Im}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \bar{z}$.
- 2 Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = -z$ ou $\text{Re}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \bar{z}$.

Exercice 5 :

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans \mathbb{C} .

On appelle **discriminant** de l'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ , le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\frac{b}{2a}$.

I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans \mathbb{C} .

On appelle **discriminant** de l'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ , le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans \mathbb{C} .

On appelle **discriminant** de l'équation $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ , le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

ATTENTION

Pour l'instant, faites bien attention que ce théorème ne s'applique qu'à des équations à coefficients réels. Seules les solutions sont complexes.



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Exemple 5 :

Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Exemple 5 :

Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) :

Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

❶ $z^2 - 7z = 0$.



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Exemple 5 :

Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) :

Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

❶ $z^2 - 7z = 0$.

❷ $z^2 - 4z + 5 = 0$.



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Exemple 5 :

Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) :

Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

❶ $z^2 - 7z = 0$.

❷ $z^2 - 4z + 5 = 0$.

❸ $-8 = 3z^2$.



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Théorème 1 :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\bar{\alpha}$ est une racine de P .



I. L'ensemble des nombres complexes

3. Équations dans \mathbb{C} (prélude)

Théorème 1 :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\bar{\alpha}$ est une racine de P .

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.



II. Nombres et Plan complexes

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Nombres et Plan complexes**
 - Représentation des nombres complexes
 - Module d'un nombre complexe
 - Inégalité triangulaire
- 3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$
- 4 Forme polaire
- 5 Applications à la trigonométrie
- 6 Exponentielle complexe



II. Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :

L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ réalise une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} .
 $(a; b) \mapsto z = a + ib$



II. Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :

L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ réalise une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} .
 $(a; b) \mapsto z = a + ib$

Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ appelé **plan complexe**.

Le **théorème (8)** permet donc d'associer à $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a; b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(M)}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(M)} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Plus précisément,

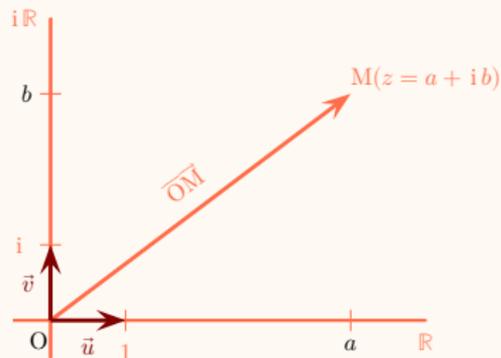


II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

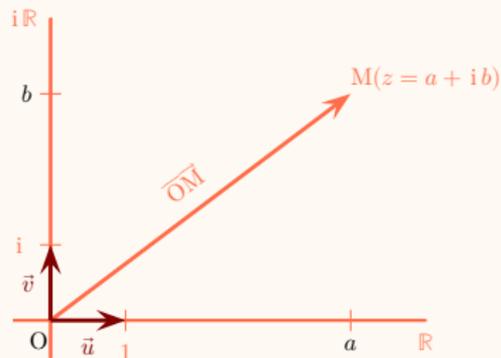


II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $M(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$.

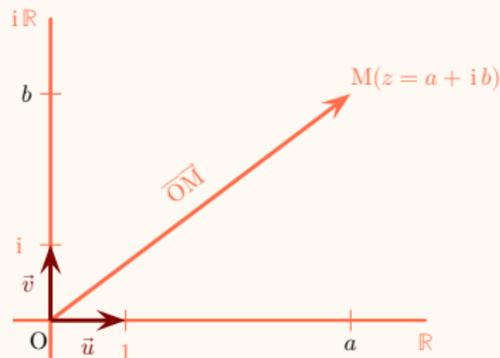


II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $M(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$.



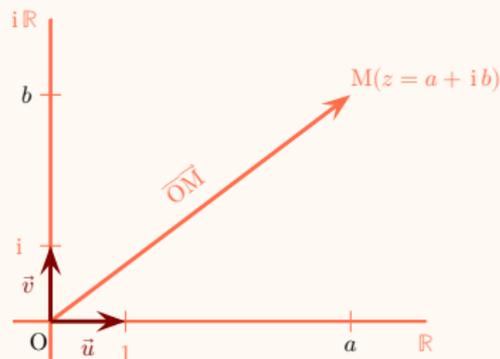
- ④ Le plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est appelé plan complexe.

II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $M(a; b)$ d'un plan orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$.



- 1 Le plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est appelé **plan complexe**.
- 2 Le nombre complexe z est appelé l'**affixe** du point M ou du vecteur \overrightarrow{OM} et on écrit $M(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(z)$.

II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

❶ $z_1 = 2 + 3i$

❷ $z_2 = 3 + i$

❸ $z_3 = -1 + 2i$

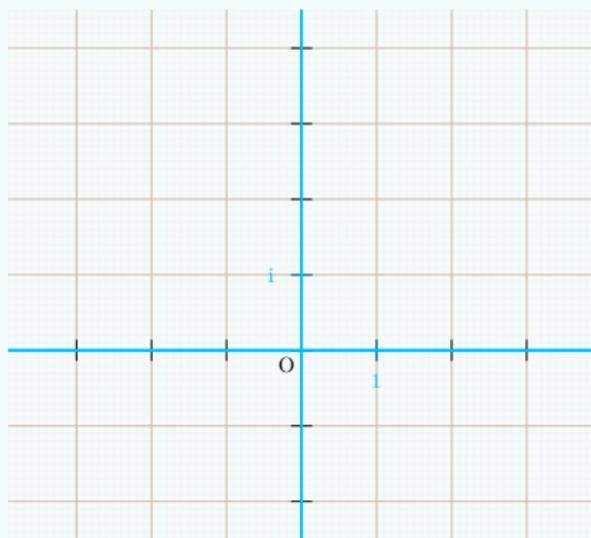
❹ $z_4 = 2 - i$

❺ $z_5 = i$

❻ $z_6 = -2i$

❼ $z_7 = -2$

❽ $z_8 = -i - 3$



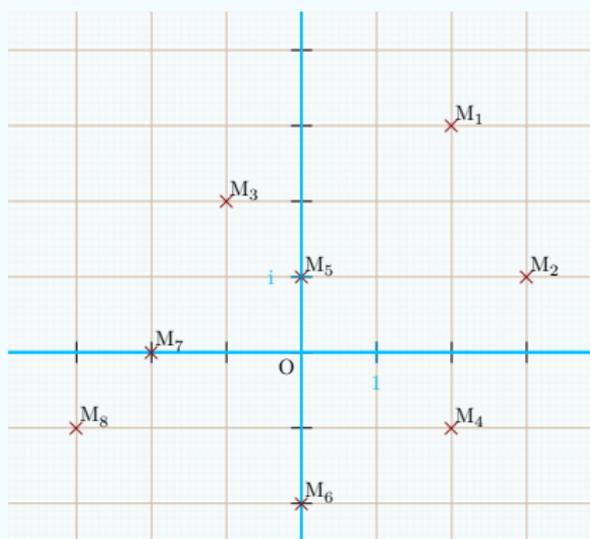
II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

- 1 $z_1 = 2 + 3i$
- 2 $z_2 = 3 + i$
- 3 $z_3 = -1 + 2i$
- 4 $z_4 = 2 - i$
- 5 $z_5 = i$
- 6 $z_6 = -2i$
- 7 $z_7 = -2$
- 8 $z_8 = -i - 3$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

① $\operatorname{Re}(z) = -2$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

❶ $\operatorname{Re}(z) = -2$

❷ $\operatorname{Im}(z) = 1$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

- 1 $\operatorname{Re}(z) = -2$
- 2 $\operatorname{Im}(z) = 1$
- 3 $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

❶ $\operatorname{Re}(z) = -2$

❷ $\operatorname{Im}(z) = 1$

❸ $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$

❹ $\operatorname{Im}(z^2) = 0$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

❶ $\operatorname{Re}(z) = -2$

❷ $\operatorname{Im}(z) = 1$

❸ $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$

❹ $\operatorname{Im}(z^2) = 0$

❺ $\operatorname{Im}(z^2) = 2$



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

❶ $\operatorname{Re}(z) = -2$

❷ $\operatorname{Im}(z) = 1$

❸ $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 1$

❹ $\operatorname{Im}(z^2) = 0$

❺ $\operatorname{Im}(z^2) = 2$

❻ $\operatorname{Re}((z-1)^2) = 0$



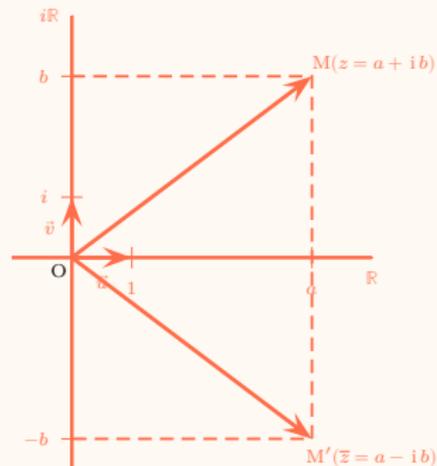
II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe z .

Le point M' d'affixe $\bar{z} = a - ib$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



II. Nombres et Plan complexes

1. Représentation des nombres complexes

Exercice 9 :

On pose $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1, $\bar{1}$, i , \bar{i} , j et \bar{j} .



II. Nombres et Plan complexes

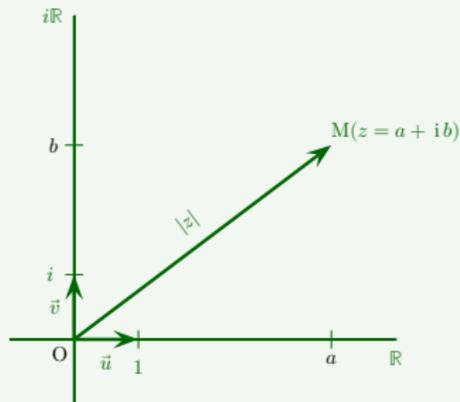
2. Module d'un nombre complexe

Définition 4 :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe z .

On appelle **module** de z , noté $|z|$, la distance OM *i.e.* le réel positif tel que :

$$\begin{aligned}|z| &= \|\overline{OM}\| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

① $z_1 = 3 + 4i$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

① $z_1 = 3 + 4i$

② $z_2 = 1 - i$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

❶ $z_1 = 3 + 4i$

❷ $z_2 = 1 - i$

❸ $z_3 = -5 - 2i$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

① $z_1 = 3 + 4i$

② $z_2 = 1 - i$

③ $z_3 = -5 - 2i$

④ $z_4 = -5$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

❶ $z_1 = 3 + 4i$

❷ $z_2 = 1 - i$

❸ $z_3 = -5 - 2i$

❹ $z_4 = -5$

❺ $z_5 = 9i$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$\blacksquare z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$\blacksquare z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$\blacksquare z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

$$\blacksquare |z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

$$\blacksquare z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

$$\blacksquare |z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$$

$$\blacksquare |-z| = |z| \text{ et } |\bar{z}| = |z|.$$

$$\blacksquare |z \times z'| = |z| \times |z'|.$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$

■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$

■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$

■ $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$ avec $z \neq 0.$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$

■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$

■ $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$ avec $z \neq 0.$

■ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|},$ avec $z' \neq 0.$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$

■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$

■ $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$ avec $z \neq 0.$

■ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|},$ avec $z' \neq 0.$ En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, \left| \frac{z}{z'} \right|^n = \frac{|z^n|}{|z'^n|},$ avec $z' \neq 0$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Proposition II :

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes.

■ $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■ $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■ $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|.$

■ $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$

■ $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|},$ avec $z \neq 0.$

■ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|},$ avec $z' \neq 0.$ En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, \left| \frac{z}{z'} \right|^n = \frac{|z^n|}{|z'^n|},$ avec $z' \neq 0$

■ $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

Exercice II :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

❶ $z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

Exercice II :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$\textcircled{1} z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$$

$$\textcircled{2} z_2 = i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

Exercice II :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$\textcircled{1} z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$$

$$\textcircled{2} z_2 = i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$$

$$\textcircled{3} z_3 = \left(\frac{-3i}{1+i\sqrt{3}} \right)^2$$



II. Nombres et Plan complexes

2. Module d'un nombre complexe

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

Exercice II :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$\textcircled{1} z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$$

$$\textcircled{2} z_2 = i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$$

$$\textcircled{3} z_3 = \left(\frac{-3i}{1+i\sqrt{3}} \right)^2$$

$$\textcircled{4} z_4 = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$$



II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de \mathbb{C} on a :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de \mathbb{C} on a :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$
i.e. les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.



II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de \mathbb{C} on a :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$
i.e. les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Remarque : En remplaçant z_2 par $-z_2$, on a aussi :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de \mathbb{C} on a :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$
i.e. les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Remarque : En remplaçant z_2 par $-z_2$, on a aussi :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Corollaire 2 :

Pour toute famille z_1, z_2, \dots, z_n de nombres complexes, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} alors :

$$\|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|.$$

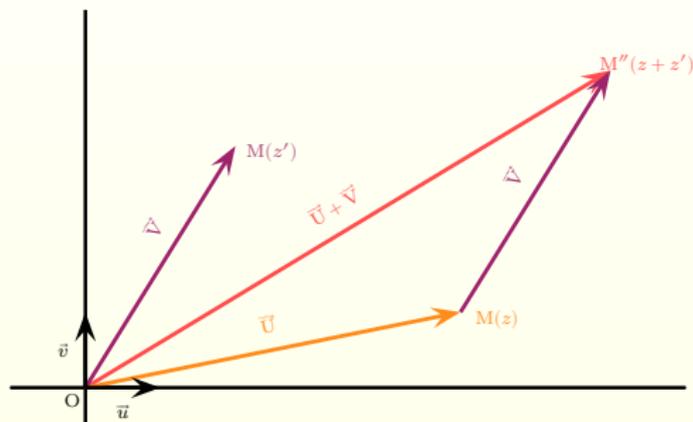


Figure 1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.



II. Nombres et Plan complexes

3. Inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} alors :

$$\|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|.$$

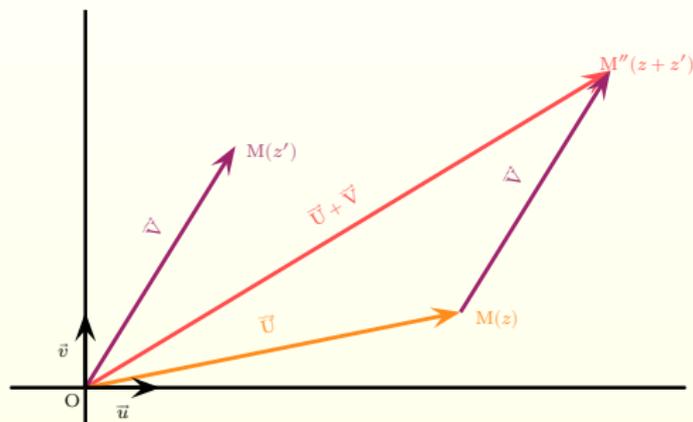


Figure 1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires de même sens.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1 L'ensemble des nombres complexes

2 Nombres et Plan complexes

3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

- Fonctions vectorielles
- Notation d'Euler
- Nombres complexes de module 1

4 Forme polaire

5 Applications à la trigonométrie

6 Exponentielle complexe



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Définition 5 :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de la **variable réelle** à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

- **partie réelle** de f :
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f) : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)). \end{aligned}$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Définition 5 :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de la **variable réelle** à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

■ **partie réelle** de f : $\operatorname{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)).$

■ et **partie imaginaire** de f : $\operatorname{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Définition 5 :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de la **variable réelle** à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

■ **partie réelle** de f : $\operatorname{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) .$

■ et **partie imaginaire** de f : $\operatorname{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)) .$

On a alors :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) + i \operatorname{Im}(f)(x) .$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

En identifiant \mathbb{C} au plan complexe \mathbb{R}^2 , la fonction f est un exemple de fonctions, dites **vectorielles**.

En particulier, on peut également définir les fonctions \bar{f} et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$$\forall x \in I,$$

$$\bullet \bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

$$\bullet |f|(x) = |f(x)|.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

En identifiant \mathbb{C} au plan complexe \mathbb{R}^2 , la fonction f est un exemple de fonctions, dites **vectorielles**.

En particulier, on peut également définir les fonctions \bar{f} et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$$\forall x \in I,$$

$$\bullet \bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

$$\bullet |f|(x) = |f(x)|.$$

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

$$\bullet \operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2}.$$

$$\bullet \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

En identifiant \mathbb{C} au plan complexe \mathbb{R}^2 , la fonction f est un exemple de fonctions, dites **vectorielles**.

En particulier, on peut également définir les fonctions \bar{f} et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$$\forall x \in I, \quad \bullet \bar{f}(x) = \overline{f(x)}. \quad \bullet |f|(x) = |f(x)|.$$

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

$$\bullet \operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2}. \quad \bullet \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Exercice 12 :

Soit $f : x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$.

Définir les fonctions $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, \bar{f} et $|f|$.

III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Théorème 14 (Dérivabilité) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont et on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + i \operatorname{Im}(f)'(x).$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Théorème 14 (Dérivabilité) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont et on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + i \operatorname{Im}(f)'(x).$$

Autrement dit $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re}(f))'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im}(f))'$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Si f est une fonction à valeurs complexes, ce n'est pas encore à proprement parler, une fonction complexe car elle n'est pas encore « de la variable complexe » mais plutôt un cas particulier de fonctions vectorielles.

Augmenter le but, ne pose pas vraiment de problèmes et l'on pourrait tout aussi bien considérer une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

ATTENTION

Augmenter la source, demandera de redéfinir totalement les notions de continuité et de dérivabilité notamment à partir d'une topologie de \mathbb{C} à définir aussi.

On parlera alors de fonctions holomorphes qui ont de très puissantes propriétés notamment leur analyticité.

To be continued...



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Exemple 1 :

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$x \mapsto \sin(x) + i e^x.$$

$$f'(x) = \cos(x) + i e^x.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Exemple 7 :

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$x \mapsto \sin(x) + i e^x.$$

$$f'(x) = \cos(x) + i e^x.$$

Exercice 13 :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

1. Fonctions vectorielles

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Citons par exemple :

Proposition 15 :

Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\frac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned}$$

- ④ Comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction f est aussi dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned}$$

- ❶ Comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction f est aussi dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$

- ❷ f vérifie $f(0) = 1$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned}$$

- ❶ Comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction f est aussi dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$

- ❷ f vérifie $f(0) = 1$.
- ❸ La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = i y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta). \end{aligned}$$

- ❶ Comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction f est aussi dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$

- ❷ f vérifie $f(0) = 1$.
❸ La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = i y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- ❹ Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$, on pose comme définition : $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{i\theta}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Conclusion : $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Conclusion : $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1.$

Théorème 16 (Relation d'Euler) :

Pour tout nombre réel θ , on a :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

(Eul)



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

④ $e^{i0} = 1.$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

- 1 $e^{i0} = 1$.
- 2 $|e^{i\theta}| = 1$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

- 1 $e^{i0} = 1$.
- 2 $|e^{i\theta}| = 1$.
- 3 $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

① $e^{i0} = 1$.

② $|e^{i\theta}| = 1$.

③ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.

④ $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

① $e^{i0} = 1$.

② $|e^{i\theta}| = 1$.

③ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.

④ $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

⑤ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

2. Notation d'Euler

Proposition 17 :

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

❶ $e^{i0} = 1$.

❷ $|e^{i\theta}| = 1$.

❸ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.

❹ $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

❺ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

❻ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :

Soient z et z' deux éléments de \mathbb{U} .

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 8 :

Soient z et z' deux éléments de \mathbb{U} .

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :

Soient z et z' deux éléments de \mathbb{U} .

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathbb{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}$.

Remarque : Tout élément de \mathbb{U} admet donc un symétrique (inverse) pour la multiplication. Le produit de deux éléments de \mathbb{U} est encore un élément de \mathbb{U} , $1 \in \mathbb{U}$. Ces trois propriétés font dire de \mathbb{U} qu'il est un **groupe** multiplicatif à l'instar de \mathbb{R}^* .



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Exercice 14 :

Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Théorème 19 :

$$U = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \{ e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \}.$$

Corollaire 3 :

- ① La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{U} .
Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha; \alpha + 2\pi[$ sur \mathbb{U} .



III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

3. Nombres complexes de module 1

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \{ e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \}.$$

Corollaire 3 :

- 1 La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{U} .
Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha; \alpha + 2\pi[$ sur \mathbb{U} .
- 2 La fonction $(r; \theta) \mapsto r e^{i\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi; \pi]$ sur \mathbb{C}^* .



IV. Forme polaire

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Nombres et Plan complexes
- 3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$
- 4 Forme polaire**
 - Forme trigonométrique et exponentielle
 - Règles de calcul en notation exponentielle
 - Argument d'un nombre complexe
- 5 Applications à la trigonométrie
- 6 Exponentielle complexe



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Définition/Théorème 1 :

- ④ Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \quad \text{(forme exponentielle)}$$

$$= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad \text{(forme trigonométrique)}$$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique/**exponentielle**/polaire de z .



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Définition/Théorème 1 :

- ① Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \quad (\text{forme exponentielle})$$

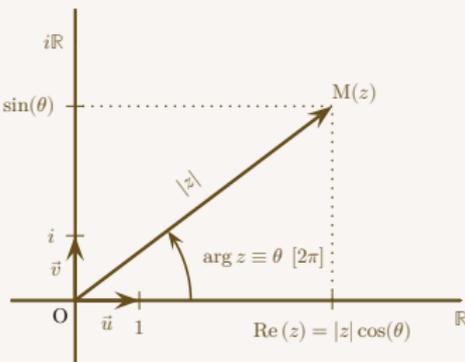
$$= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (\text{forme trigonométrique})$$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique/**exponentielle**/polaire de z .

- ② Tout réel θ de ce type s'appelle un **argument de z** et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

On note alors $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Définition/Théorème 1 :

- ① Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

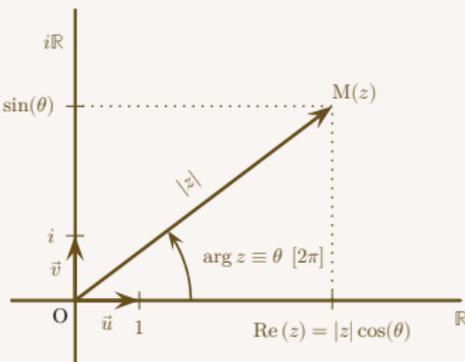
$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \quad (\text{forme exponentielle})$$

$$= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (\text{forme trigonométrique})$$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique/**exponentielle**/polaire de z .

- ② Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ où $M = \text{Im}(z) = |z| \sin(\theta)$ est le point du plan d'affixe z .

- ④ L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi; \pi]$ définit l'argument principal de z , noté $\arg(z)$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de ses arguments est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de ses arguments est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0; 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi; \pi]$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-e^{i\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de ses arguments est de la forme $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0; 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi; \pi]$.
- Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 [\pi].$$

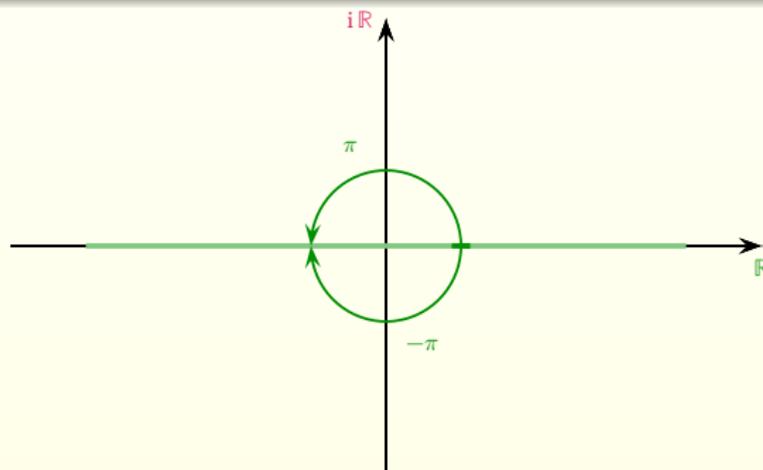


Figure 2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :

Soit z un nombre complexe non nul.

$$\blacksquare z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 [\pi].$$

$$\blacksquare z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

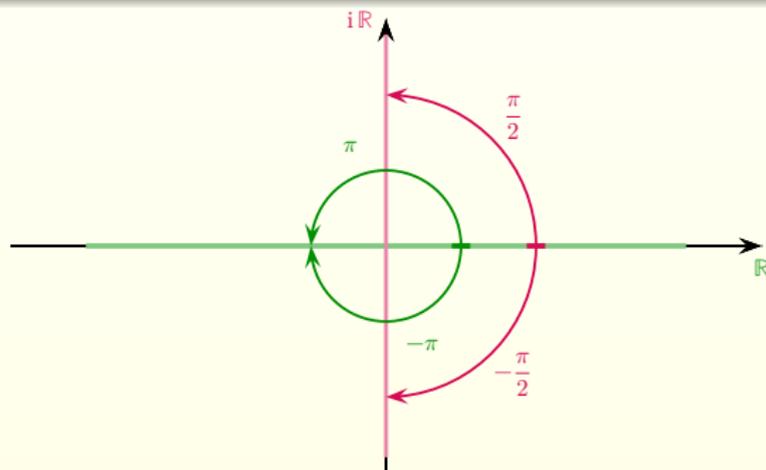


Figure 2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 (Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$) :

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2 e^{i \frac{\pi}{3}}$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$	$1 + i\sqrt{3}$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 (Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$) :

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2 e^{i \frac{\pi}{3}}$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$	$1 + i\sqrt{3}$

Exercice 15 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

④ $z_1 = 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 (Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$) :

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2 e^{i \frac{\pi}{3}}$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$	$1 + i\sqrt{3}$

Exercice 15 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

① $z_1 = 5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$

② $z_2 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 9 :

Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

<+>

$$\blacksquare e^{i0} = e^{i2\pi} = 1.$$

$$\blacksquare e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$\blacksquare e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1.$$

$$\blacksquare 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} + i2\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= 1 + i\sqrt{3}.$$

$$\blacksquare \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= 1 + i.$$

$$\blacksquare 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + i2\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \sqrt{3} + i.$$



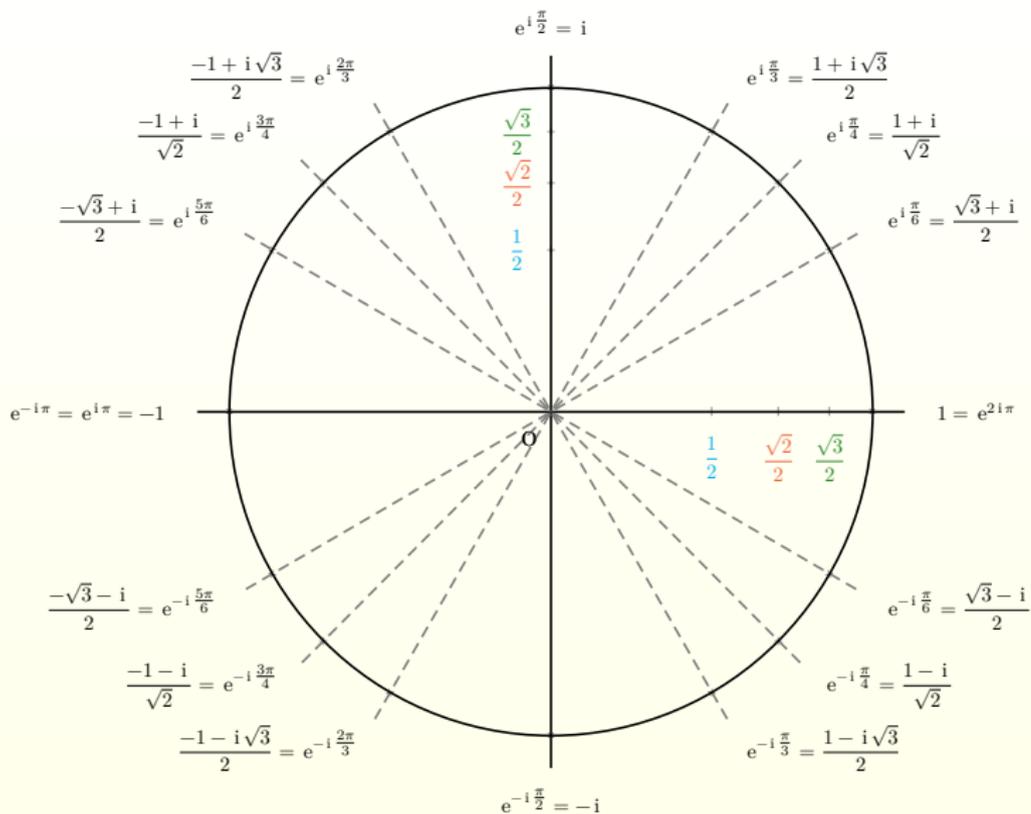


Figure 3 – Formes exponentielles remarquables



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemple 10 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad (\text{Forme exponentielle})$$

$$= 4 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{Forme trigonométrique})$$

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \quad (\text{Forme algébrique})$$

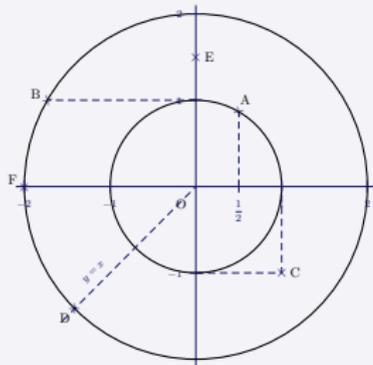


IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 16 :

Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemple II :

Quelle est la forme algébrique de $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$?



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemple II :

Quelle est la forme algébrique de $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i.$$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Méthode 4 :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

- ④ On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Méthode 4 :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

- 1 On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- 2 On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

$$\text{Au pire, si } a \neq 0, \theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Méthode 4 :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

- 1 On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- 2 On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

$$\text{Au pire, si } a \neq 0, \theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 12 :

- $\arg(3 + 2i) \equiv \arctan\left(\frac{2}{3}\right) [2\pi]$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 12 :

- $\arg(3 + 2i) \equiv \arctan\left(\frac{2}{3}\right) [2\pi].$

- $\arg(-1 + i) \equiv \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 12 :

$$\blacksquare \arg(3 + 2i) \equiv \arctan\left(\frac{2}{3}\right) [2\pi].$$

$$\blacksquare \arg(-1 + i) \equiv \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\blacksquare \arg(-3 - i\sqrt{3}) \equiv \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = -\frac{5\pi}{6} [2\pi].$$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples B :

Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

$$\blacksquare z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| &= \sqrt{2} \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } r &= \sqrt{2}, \theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples B :

Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

$$\blacksquare z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| &= \sqrt{2} \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } r &= \sqrt{2}, \theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare z_2 = -\sqrt{3} + i : \begin{cases} |-\sqrt{3} + i| &= 2 \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } r &= 2, \theta \equiv \frac{5\pi}{6} \text{ et } z_2 = -\sqrt{3} + i = 2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] \\ &= 2 e^{-i \frac{5\pi}{6}}. \end{aligned}$$

IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 17 :

Trouver un argument des nombres complexes suivants :

① $z_1 = -2 + 2i$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 17 :

Trouver un argument des nombres complexes suivants :

❶ $z_1 = -2 + 2i$.

❷ $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 14 (Factorisation directe) :

Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$?

④ Tout d'abord, on calcule $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 14 (Factorisation directe) :

Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$?

- 1 Tout d'abord, on calcule $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.
- 2 Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 14 (Factorisation directe) :

Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$?

- 1 Tout d'abord, on calcule $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.
- 2 Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

- 3 On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3} [2\pi]$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Exemples 14 (Factorisation directe) :

Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$?

- 1 Tout d'abord, on calcule $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.
- 2 Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

- 3 On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

D'où, $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}$.



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

■ $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$



IV. Forme polaire

1. Forme trigonométrique et exponentielle

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π .



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 22 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

■ **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 22 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 22 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 22 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$.
- **Quotient** : $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 2.2 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$.
- **Quotient** : $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.
- **Inverse** : $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 2.2 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$.
- **Quotient** : $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.
- **Inverse** : $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.

Moralité :

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Proposition 2.2 :

Soient $z = r e^{i\theta}$ et $z' = r' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- **Produit** : $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$.
- **Quotient** : $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.
- **Inverse** : $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.

Moralité :

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Exemples 15 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Exemples 15 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2^4 &= (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^4 \\ &= (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144 e^{\frac{2i\pi}{3}}.\end{aligned}$$



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Exemples 15 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2^4 &= (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^4 \\ &= (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144 e^{\frac{2i\pi}{3}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} \\ &= \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}.\end{aligned}$$



IV. Forme polaire

2. Règles de calcul en notation exponentielle

Exercice 18 :

Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) (1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right).$$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.3 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.3 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.3 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \arg z$.



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.3 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \arg z$.

ATTENTION

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}.$$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

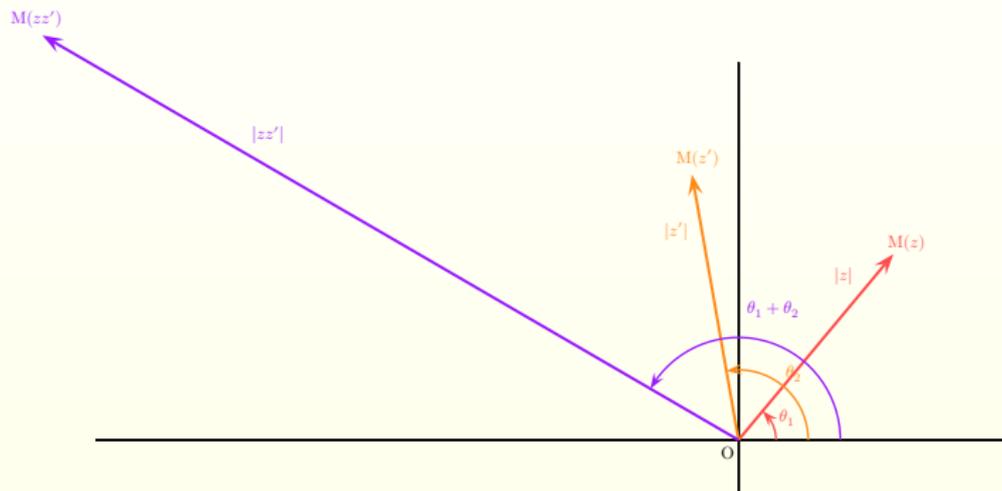


Figure 4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se **multiplient** et les arguments s'**ajoutent**.



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Exemples 16 :

En reprenant les notations de l' exemple (??) , on obtient, **sans calculs** :

$$\blacksquare \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Exemples 16 :

En reprenant les notations de l' exemple (??) , on obtient, **sans calculs** :

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$



IV. Forme polaire

3. Argument d'un nombre complexe

Exemples \Downarrow :

En reprenant les notations de l' exemple (??) , on obtient, **sans calculs** :

$$\blacksquare \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\blacksquare \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\blacksquare \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$



V. Applications à la trigonométrie

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Nombres et Plan complexes
- 3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$
- 4 Forme polaire
- 5 Applications à la trigonométrie**
 - Formule d'Euler et de Moivre
 - Linéarisation des puissances de cosinus et sinus
 - Factorisation par l'angle de l'arc moitié
 - Calculs de sommes de cosinus et sinus
 - « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev
 - Factorisation de sommes de cosinus et de sinus
- 6 Exponentielle complexe



V. Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.



V. Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Exemple 17 (Expression de $\cos \frac{\pi}{12}$) :

Il suffit de remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

D'où :

$$e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i \frac{\pi}{3}} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



V. Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Exemple 17 (Expression de $\cos \frac{\pi}{12}$) :

Il suffit de remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

D'où :

$$e^{i \frac{\pi}{12}} = e^{i \frac{\pi}{3}} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Proposition 24 (Formule d'Euler) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Exercice 19 :

Développer $A = (e^{i\theta} - 1)^3$ et $B = (1 + e^{i\theta})^4$.



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \operatorname{ch}(ix) &= \cos(x) & \operatorname{sh}(ix) &= i \sin(x) \\ \cos(ix) &= \operatorname{ch}(x) & \sin(ix) &= i \operatorname{sh}(x). \end{aligned}$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \operatorname{ch}(ix) &= \cos(x) & \operatorname{sh}(ix) &= i \sin(x) \\ \cos(ix) &= \operatorname{ch}(x) & \sin(ix) &= i \operatorname{sh}(x). \end{aligned}$

Il est alors aisé de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques à partir de leurs homologues circulaires.

Par exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1 \iff \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(i(a+b)) &= \cos(ia)\cos(ib) - \sin(ia)\sin(ib) \\ &\iff \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b). \end{aligned}$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Théorème 25 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Théorème 25 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Exemple 18 (Duplication des angles) :

À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$.



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Théorème 25 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Exemple 18 (Duplication des angles) :

À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta)$.

V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

Théorème 25 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Exemple 18 (Duplication des angles) :

À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta)$.

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$

V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus :

Proposition 26 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus :

Proposition 26 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus :

Proposition 26 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b).$$



V. Applications à la trigonométrie

1. Formule d'Euler et de Moivre

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus :

Proposition 26 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b).$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b).$$



V. Applications à la trigonométrie

2. Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en \cos^2 et \sin^2 .



V. Applications à la trigonométrie

2. Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en \cos^2 et \sin^2 .

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

Méthode 5 :

- 1 On utilise les formules d'Euler de la **proposition (24)** pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec e^{ix} et e^{-ix} .



V. Applications à la trigonométrie

2. Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en \cos^2 et \sin^2 .

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

Méthode 5 :

- 1 On utilise les formules d'Euler de la **proposition (24)** pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec e^{ix} et e^{-ix} .
- 2 On développe complètement, avec le binôme de Newton.



V. Applications à la trigonométrie

2. Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en \cos^2 et \sin^2 .

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

Méthode 5 :

- 1 On utilise les formules d'Euler de la **proposition (24)** pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec e^{ix} et e^{-ix} .
- 2 On développe complètement, avec le binôme de Newton.
- 3 On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.



V. Applications à la trigonométrie

2. Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Exercice 20 :

Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- 2 On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- 2 On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)

Exercice 21 :

Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- 2 On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)

Exercice 21 :

Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$.
- 2 1 Soient p et q des réels. Montrer que $e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}$.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$:

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- 2 On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (24)

Exercice 21 :

Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$.
- 2
 - 1 Soient p et q des réels. Montrer que $e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}$.
 - 2 En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p) + \cos(q)$, $\cos(p) - \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$ avec $(p; q) \in \mathbb{R}^2$.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Cette méthode, appelée aussi **principe de symétrisation des arguments**, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Cette méthode, appelée aussi **principe de symétrisation des arguments**, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Exercice 22 :

Mettre $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Proposition 2.7 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :

Soient p et q deux réels :

$$\blacksquare \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Proposition 2.7 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :

Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Proposition 2.7 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :

Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$



V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Proposition 2.7 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :

Soient p et q deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$



V. Applications à la trigonométrie

4. Calculs de sommes de cosinus et sinus

Exercice 23 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$A_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \text{ le noyau de Dirichlet, et } B_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k(t).$$

Montrer que $A_n(t) = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ et $B_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$.



V. Applications à la trigonométrie

5. Calculs de sommes de cosinus et sinus

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la **proposition (25)** .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en \cos ou en \sin , on procède comme à l' **exemple (18)** *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$):

① On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.



V. Applications à la trigonométrie

6. Calculs de sommes de cosinus et sinus

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la **proposition (25)** .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en \cos ou en \sin , on procède comme à l' **exemple (18)** *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$):

- 1 On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.
- 2 On développe avec le binôme de Newton.



V. Applications à la trigonométrie

7. Calculs de sommes de cosinus et sinus

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la **proposition (25)** .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos ou en sin, on procède comme à l' **exemple (18)** *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$):

- 1 On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.
- 2 On développe avec le binôme de Newton.
- 3 On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).



V. Applications à la trigonométrie

8. Calculs de sommes de cosinus et sinus

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la **proposition (25)**.

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en \cos ou en \sin , on procède comme à l'**exemple (18)** *i.e.* :

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$) :

- 1 On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$.
- 2 On développe avec le binôme de Newton.
- 3 On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 24 :

Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 28 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et ω un réel, il existe $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 28 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et ω un réel, il existe $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier,

$$A = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\varphi = -\arg(a + ib).$$



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 2.8 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et ω un réel, il existe $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier,

$$A = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\varphi = -\arg(a + ib).$$

Remarque : Une telle fonction $t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t$ est appelée **signal sinusoïdal**.



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 2.8 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ et ω un réel, il existe $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier, $A = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = -\arg(a + ib)$.

Remarque : Une telle fonction $t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t$ est appelée **signal sinusoïdal**.

Physiquement, le réel A représente son amplitude, et φ son déphasage. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est alors le module de $a + ib$ et la phase son argument.



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Exercice 25 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

- 1 Simplifier l'expression $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta)$.



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Exercice 25 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

- 1 Simplifier l'expression $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta)$.
- 2 Donner une interprétation physique de ce résultat.



V. Applications à la trigonométrie

9. Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Exercice 25 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

- 1 Simplifier l'expression $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta)$.
- 2 Donner une interprétation physique de ce résultat.
- 3 Même question avec $\sqrt{3} \cos(\theta) - \sin(\theta)$.



VI. Exponentielle complexe

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Nombres et Plan complexes
- 3 L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$
- 4 Forme polaire
- 5 Applications à la trigonométrie
- 6 Exponentielle complexe**



VI. Exponentielle complexe

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z , on appelle **exponentielle de z** , noté $\exp(z)$ ou e^z , le nombre défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$



VI. Exponentielle complexe

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z , on appelle **exponentielle de z** , noté $\exp(z)$ ou e^z , le nombre défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

Exemple 19 :

$$e^{2 + \frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{i e^2}{\sqrt{2}}.$$



VI. Exponentielle complexe

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z , on appelle **exponentielle de z** , noté $\exp(z)$ ou e^z , le nombre défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

Exemple 19 :

$$e^{2 + \frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{i e^2}{\sqrt{2}}.$$

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III) . Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in i\mathbb{R}$ alors $e^z \in \mathbb{U}$.



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$
- $\arg e^z \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi].$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$
- $\arg e^z \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi].$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 29 (Morphisme) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Proposition 30 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)).$
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)).$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$
- $\arg e^z \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi].$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 31 (Noyau de l'exponentielle) :

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z = e^{z'} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) & = & \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) & \equiv & \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi} \end{cases}$$
$$\iff z \equiv z' \pmod{2i\pi}.$$



VI. Exponentielle complexe

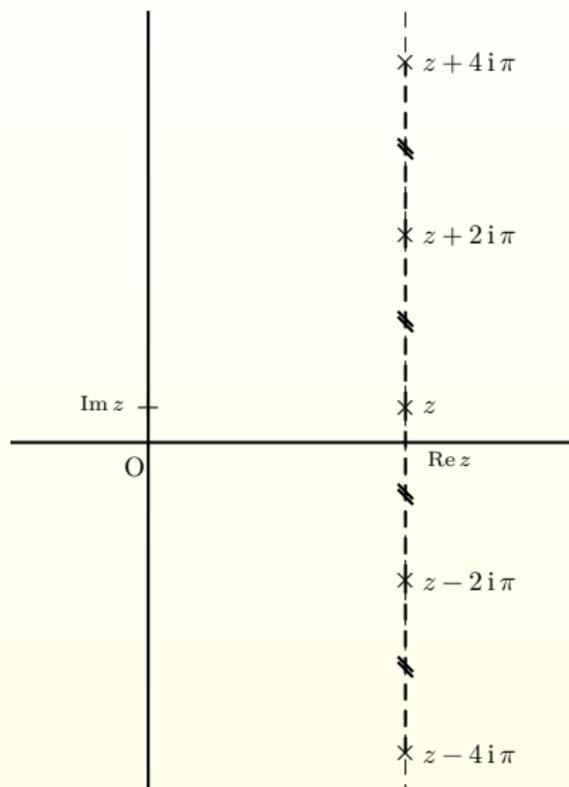


Figure 5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.



VI. Exponentielle complexe

Théorème 32 (Image réciproque) :

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $e^z = \omega$ n'a pas de solution.



VI. Exponentielle complexe

Théorème 32 (Image réciproque) :

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $e^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $e^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |\omega| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi].$$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 32 (Image réciproque) :

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $e^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $e^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |\omega| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi].$$

Exercice 26 :

Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $e^z = 2 + i$.



VI. Exponentielle complexe

Théorème 33 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I .

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = e^\varphi$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}.$$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 33 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I .

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = e^\varphi$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}.$$

Exemple 20 :

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \mapsto e^{ax}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} = a^n f(x).$$



VI. Exponentielle complexe

Théorème 33 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I .

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = e^\varphi$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}.$$

Exemple 20 :

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \mapsto e^{ax}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} = a^n f(x).$$

Exercice 27 :

Dériver les fonctions complexes $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{\arccos(t)+i \arcsin(t)}$.

