Les Nombres Complexes I

I/ Formes algébrique et exponentielle

Exercice 1 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

Vérifier vos résultats à la calculatrice.

$$z_1 = (2-\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)$$
$$z_2 = \frac{5+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} + \mathrm{i}$$
$$z_3 = (7\mathrm{i}-3)(7-3\mathrm{i})$$
$$z_4 = \mathrm{i}^{2n}$$
$$z_5 = \mathrm{i}^{2n+1}$$
$$z_6 = (1+\mathrm{i})^2$$
$$z_7 = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$$
$$z_8 = (1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$$
$$z_9 = (1-2\mathrm{i})^3$$
$$z_{10} = \frac{1}{2+3\mathrm{i}}$$
$$z_{11} = \frac{1}{4\mathrm{i}-3}$$
$$z_{12} = \frac{6-\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}} \times \frac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$$
$$z_{13} = \frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$$
$$z_{14} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

1. $\dfrac{z-2}{2z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Exercice 3 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer de deux façons différentes que $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un réel.
2. Montrer de deux façons différentes que $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i}$
2. $2\mathrm{i}z - 1 - \mathrm{i} = z + 2\mathrm{i}$
3. $\dfrac{2}{z} + 3\mathrm{i} = -2 - 5\mathrm{i}$
4. $\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$
5. $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3) = 0$
6. $(z-\mathrm{i})^2 = (z+1+\mathrm{i})^2$
7. $\begin{cases} z + z' &= 2 - 5\mathrm{i} \\ z + 3z' &= \mathrm{i} - 1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} z + \mathrm{i}z' &= 2 \\ 2z + 2z' &= 2 + 3\mathrm{i} \end{cases}$
9. $(1+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})\overline{z} = 1 - 2\mathrm{i}$
10. $(1+\mathrm{i})\overline{z} + 2\mathrm{i}z = 1 - \mathrm{i}$
11. $-2z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-2z + z^2 + 2 = 0$
13. $3z^2 - 2z = 1$
14. $\dfrac{3+z}{3-z} = z$
15. $(z-2)^2 = -4$
16. $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$
17. $(z-2)^2 = (3+iz)^2$
18. $z^2 = 3\mathrm{i}z$
19. $-z^2 + (1+\sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$
20. $(z^2+z-3)^2 + (z^2-z+1)^2 = 0$

Exercice 5 : Pour θ nombre réel dans $[0\,;\pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.
2. Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

Exercice 6 : Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\,\mathrm{i})z - 13\,\mathrm{i} = 0. \tag{VII.1}$$

1. Montrer que i est solution de l'équation de (VII.1).
2. Résoudre alors l'équation (VII.1).

Exercice 7 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

   Montrer que $|a-b| = |1-\overline{a}b| \iff |a| = 1$ ou $|b| = 1$.

   Aide : On pourra développer intelligemment $\left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)$.
2. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$.

   Cette relation est appelée *égalité du parallélogramme*. Pourquoi ?

Exercice 8 : Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 9 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 10 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \qquad z_8 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 \qquad z_6 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}(1+4k)},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$z_3 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \qquad z_9 = \frac{1+\mathrm{i}\,b}{2b+(b^2-1)\,\mathrm{i}} \text{ où } (b \in \mathbb{R}).$$

$$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \qquad z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$$

Exercice 11 : Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$z_1 = -2+2\,\mathrm{i}$
$z_2 = 1+\mathrm{i}$
$z_3 = -3-3\,\mathrm{i}$
$z_4 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$
$z_5 = 3\,\mathrm{i}$
$z_6 = 3$
$z_7 = -\mathrm{i}$
$z_8 = 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$
$z_9 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$
$z_{10} = \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$
$z_{11} = \mathrm{i}\sqrt{3}+1$
$z_{12} = -9\,\mathrm{i}$
$z_{13} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
$z_{14} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$
$z_{15} = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$
$z_{16} = \mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})$
$z_{17} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
$z_{18} = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$
$z_{19} = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$
$z_{20} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$
$z_{21} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
$z_{22} = (1+i\sqrt{3})^6$
$z_{23} = \dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}$, où $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
$z_{24} = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n$
$z_{25} = 1+\cos(\alpha)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha)$
$z_{26} = (1+\cos\theta-\mathrm{i}\,\sin\theta)^n$

Exercice 12 (Fondamental) : Simplifier $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$ pour $\theta \in \,]-\pi\,;\pi[$.

Exercice 13 (*) :

1. Déterminer le module et l'argument de $z = \dfrac{1}{1+i\tan(a)}$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. Quel est l'ensemble des points d'affixe z quand a décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$?
3. En déduire une construction simple du point A d'affixe $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

Exercice 14 : Soit $f : x \longmapsto (1+\mathrm{i}\,x)^2$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|f|$.

Exercice 15 : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto e^x \cos(x)$
2. $g : x \longmapsto e^{-x}\sin(x)$
3. $h : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin\left(\sqrt{3}x\right)$

Exercice 16 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *i.e.* un complexe non réel.

Pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, montrer que

$$a+b\alpha = a'+b'\alpha \iff a=a' \text{ et } b=b'.$$

II/ Trigonométrie

Exercice 17 : Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$ puis en déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 : En utilisant les formules d'Euler, établir les identités suivantes :

1. $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
2. $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
3. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = \dfrac{1-\cos 4\theta}{8}$
4. $\cos^3(\theta) = \dfrac{3\cos(\theta)+\cos 3\theta}{4}$

Exercice 19 : À l'aide des formules de Moivre :

1. Linéariser $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.
2. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$.
3. Linéariser $\cos^3(2\theta)\sin^4(\theta)$.

Exercice 20 :

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique.
2. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^3 x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$.
3. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 21 :

1. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Proposer une méthode plus efficace pour le calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.

Aide : Poser $u = \cos(x)$

Exercice 22 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;\pi]$:

1. $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$
2. $\cos(2x) - 2\cos(x) = -\dfrac{3}{2}$
3. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0$
4. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leqslant 0$
5. $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 \leqslant 0$

Exercice 23 : On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:
$$1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}.$$
2. En utilisant la valeur $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :
$$\left(z_0^2+\frac{1}{z_0^2}\right)+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)+1=0.$$
3. Démontrer que $\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)^2 - 2$ et que $\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Exercice 24 : Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 25 : Calculer les sommes suivantes :

1. $\mathrm{A}_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$.
2. $\mathrm{B}_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.

Exercice 26 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathrm{D}_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\mathrm{E}_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 27 :

1. Calculer de deux manières $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$.
2. En déduire $\dbinom{n}{0}-\dbinom{n}{2}+\dbinom{n}{4}-\ldots$ et $\dbinom{n}{1}-\dbinom{n}{3}+\dbinom{n}{5}-\ldots$

Les Nombres Complexes I