Les Nombres Complexes I

I/ Formes algébrique et exponentielle

Exercice 1 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

Vérifier vos résultats à la calculatrice.

$z_1 = (2-\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)$

$z_2 = \dfrac{5+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} + \mathrm{i}$

$z_3 = (7\mathrm{i}-3)(7-3\mathrm{i})$

$z_4 = \mathrm{i}^{2n}$

$z_5 = \mathrm{i}^{2n+1}$

$z_6 = (1+\mathrm{i})^2$

$z_7 = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

$z_8 = (1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$

$z_9 = (1-2\mathrm{i})^3$

$z_{10} = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}}$

$z_{11} = \dfrac{1}{4\mathrm{i}-3}$

$z_{12} = \dfrac{6-\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}} \times \dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

$z_{13} = \dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

$z_{14} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

1. $\dfrac{z-2}{2z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Correction :

1. Posons $z = x + \mathrm{i}y$. On suppose $z \neq \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{z-2}{2z+\mathrm{i}} &= \frac{(x-2)+\mathrm{i}y}{2x+\mathrm{i}(2y+1)} = \frac{((x-2)+\mathrm{i}y)(2x-\mathrm{i}(2y+1))}{4x^2+(2y+1)^2}\\ &= \frac{2x(x-2)+y(2y+1)+\mathrm{i}\,(2xy-(x-2)(2y+1))}{4x^2+(2y+1)^2}\end{aligned}$$

Comme le dénominateur ne peut être nul,

$$\begin{aligned}\frac{z-2}{2z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} &\iff 2xy-(x-2)(2y+1)=0\\ &\iff -x+4y+2=0\end{aligned}$$

Les solutions sont les points de la droite d'équation $(\mathscr{D}) : x-4y-2=0$.

Remarque : On vérifiera bien que le point $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right) \notin (\mathscr{D})$.

2. Posons $z = x + \mathrm{i}y$. On suppose $z \neq \mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-\mathrm{i}} &= \frac{(x-1)+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}(y-1)} = \frac{((x-1)+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}(y-1))}{x^2+(y-1)^2}\\ &= \frac{x(x-1)+y(y-1)+\mathrm{i}\,(xy-(x-1)(y-1))}{x^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

Comme le dénominateur ne peut être nul,

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff x(x-1)+y(y-1)=0\\ &\iff x^2+y^2-x-y=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Les solutions sont les points du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On vérifiera bien que le point $(0\,;1) \in \mathscr{C}$.

L'ensemble cherché est donc le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $\mathrm{A}(\mathrm{i})$.

Une autre méthode :

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff \frac{z-1}{z-\mathrm{i}} = -\overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}\\ &\iff \frac{z-1}{z-\mathrm{i}} = -\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\\ &\iff (z-1)(\overline{z}+\mathrm{i})+(z-\mathrm{i})(\overline{z}-1)=0 \qquad z\neq \mathrm{i} \implies \overline{z}\neq -\mathrm{i}\\ &\iff 2|z|^2-\overline{(1+\mathrm{i})}z-(1+\mathrm{i})\overline{z}=0\\ &\iff |z|^2-\frac{1}{2}\overline{(1+\mathrm{i})}z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\overline{z}=0\\ &\iff \left|z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\right|^2-\frac{1}{2}=0\end{aligned}$$

Commentaires : $\left|z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\right|^2 = \left(z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\right)\overline{\left(z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\right)}$.

$= |z|^2-\frac{1}{2}\overline{(1+\mathrm{i})}z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\overline{z}+\frac{1}{2}$

En posant $\mathrm{M}(z)$, on reconnait $\mathrm{M}\Omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *i.e.* les points qui sont à la distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de Ω. C'est le cercle précédent privé de A.

Exercice 3 : Soit $z\in\mathbb{C}^*$.

1. Montrer de deux façons différentes que $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un réel.
2. Montrer de deux façons différentes que $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur.

Correction :

Avec les parties réelle et imaginaire : On compare avec les conjugués, en utilisant la compatibilité avec le somme et les quotients :

1. $\overline{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{z} = \frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ donc $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\in\mathbb{R}$.
2. $\overline{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)$ donc $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Avec les parties réelle et imaginaire : Posons $z = x + \mathrm{i}\, y$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

1. $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{x + \mathrm{i}\, y} + \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\, y} = \dfrac{x - \mathrm{i}\, y + x + \mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{x + \mathrm{i}\, y} - \dfrac{1}{x - \mathrm{i}\, y} = \dfrac{x - \mathrm{i}\, y - x - \mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} = -\dfrac{2\,\mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1 + \mathrm{i})z = 1 - \mathrm{i}$
2. $2\,\mathrm{i}\, z - 1 - \mathrm{i} = z + 2\,\mathrm{i}$
3. $\dfrac{2}{z} + 3\,\mathrm{i} = -2 - 5\,\mathrm{i}$
4. $\dfrac{\mathrm{i}\, z + 1}{z - 3\,\mathrm{i}} = 2 + \mathrm{i}$
5. $(2z + 1 - \mathrm{i})(\mathrm{i}\, z + 3) = 0$
6. $(z - \mathrm{i})^2 = (z + 1 + \mathrm{i})^2$
7. $\begin{cases} z + z' & = 2 - 5\,\mathrm{i} \\ z + 3z' & = \mathrm{i} - 1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} z + \mathrm{i}\, z' & = 2 \\ 2z + 2z' & = 2 + 3\,\mathrm{i} \end{cases}$
9. $(1+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})\overline{z} = 1 - 2\,\mathrm{i}$
10. $(1 + \mathrm{i})\overline{z} + 2\,\mathrm{i}\, z = 1 - \mathrm{i}$
11. $-2z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-2z + z^2 + 2 = 0$
13. $3z^2 - 2z = 1$
14. $\dfrac{3 + z}{3 - z} = z$
15. $(z - 2)^2 = -4$
16. $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$
17. $(z - 2)^2 = (3 + iz)^2$
18. $z^2 = 3\,\mathrm{i}\, z$
19. $-z^2 + (1 + \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$
20. $(z^2 + z - 3)^2 + (z^2 - z + 1)^2 = 0$

Exercice 5 : Pour θ nombre réel dans $[0\,;\pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.
2. Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

Correction :

1. L'existence des solutions réelles dépend du signe de $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$.

   L'équation admettra donc des solutions réelles si, et seulement si $\sin(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0\ [\pi]$ soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ dans notre intervalle.
2. Soit $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.

   L'équation à coefficients réels admet donc deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $x_2 = \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

Commentaires : *Merci de retenir que* $(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}) = z^2 - 2\cos(\theta)z + 1$ *et, d'une manière plus générale :*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}\,(\alpha)\, x + |\alpha|^2\,.$$

Exercice 6 : Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (13 + 4\,\mathrm{i})z - 13\,\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(VII.1)}$$

1. Montrer que i est solution de l'équation de (VII.1).
2. Résoudre alors l'équation (VII.1).

Les Nombres Complexes I

Correction :

1. $\mathrm{i}^3-(4+\mathrm{i})\mathrm{i}^2+(13+4\mathrm{i})\mathrm{i}-13\mathrm{i} = -\mathrm{i}+4-\mathrm{i}+13\mathrm{i}-4-13\mathrm{i} = 0$ donc i est solution de (VII.1).
2. Il suffit de factoriser de la manière que vous voulez :

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i} = (z-i)(z^2+bz+13)$$

En identifiant les coefficients des z^2 :

$$\begin{aligned} -(4+\mathrm{i}) = b-\mathrm{i} \iff b=-4 & \\ & = (z-i)(z^2-4z+13) \\ \Delta = b^2-4ac = (6\mathrm{i})^2 \text{ et } z_{12} = -2\pm 3\mathrm{i} & \\ & = (z-i)(z+2-3\mathrm{i})(z+2+3\mathrm{i}). \end{aligned}$$

On trouve donc $\mathcal{S}_{(\mathrm{VII.1})} = \{\mathrm{i}, -2+3\mathrm{i}, -2-3\mathrm{i}\}$.

Exercice 7 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

   Montrer que $|a-b| = |1-\overline{a}b| \iff |a| = 1$ ou $|b| = 1$.

   Aide : On pourra développer intelligemment $\left(|a|^2-1)(|b|^2-1\right)$.
2. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$.

   Cette relation est appelée *égalité du parallélogramme*. Pourquoi ?

Correction :

2. Soient $u, v \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |u+v|^2+|u-v|^2 &= (u+v)\left(\overline{u+v}\right)+(u-v)\left(\overline{u-v}\right) \\ &= (u+v)\left(\overline{u}+\overline{v}\right)+(u-v)\left(\overline{u}-\overline{v}\right) \\ &= [u\overline{u}+u\overline{v}+v\overline{u}+v\overline{v}]+[u\overline{u}-u\overline{v}-v\overline{u}+v\overline{v}] \\ &= 2\left(u\overline{u}+v\overline{v}\right) \\ &= 2(|u|^2+|v|^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc,} \quad |u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice 8 : Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Correction : Il est déjà clair que $z \neq 0$.

Avec la forme exponentielle : De l'égalité $|z| = \dfrac{1}{|z|}$, on tire $|z| = 1$ *i.e.* $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{Enfin } |z-1|=1 \iff \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1 \iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\iff \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [4\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [4\pi]\,.$$

Les solutions cherchées sont donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et son conjugué $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Avec la forme algébrique : Posons $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec $x^2+y^2 \neq 0$.

— $|z|^2 = x^2 + y^2$.
— $|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2$
— $\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$

Il suffit de résoudre des systèmes pour obtenir x et y :

$$|z|^2 = |z-1|^2 \iff x^2 = (x-1)^2 \iff x^2-(x-1)^2 = 0 \iff 2x-1=0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

$$|z|^2 = \left|\frac{1}{z}\right|^2 \iff (x^2+y^2)^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{4}+y^2\right)^2 = 1 \underset{\frac{1}{4}+y^2>0}{\iff} \frac{1}{4}+y^2 = 1 \iff y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On retrouve $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 9 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| &= \left|1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right| \\ &\leqslant |1|+|z|+|z^2|+\cdots+|z^{n-1}|, \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant 1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^{n-1} \\ &\leqslant \frac{1-|z|^n}{1-|z|} \quad \text{car } |z|\neq 1\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}, \quad \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 10 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1$

$z_3 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$

$z_6 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}(1+4k)},\ k \in \mathbb{Z}$

$z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$

$z_8 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$z_9 = \frac{1+\mathrm{i}\,b}{2b+(b^2-1)\,\mathrm{i}}$ où $(b\in\mathbb{R})$.

Correction :

$$z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^5 = \mathrm{i}\,.$$

z_9 : En multipliant numérateur et dénominateur par $2b-(b^2-1)\neq 0$ ou,

$$z_9 = \frac{1+\mathrm{i}\,b}{2b+(b^2-1)\,\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}\,b}{-\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i}\,b)^2} = \frac{1}{b-\mathrm{i}} = \frac{b+\mathrm{i}}{b^2+1}.$$

Exercice 11 : Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$z_1 = -2+2\,\mathrm{i}$
$z_2 = 1+\mathrm{i}$
$z_3 = -3-3\,\mathrm{i}$
$z_4 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$
$z_5 = 3\,\mathrm{i}$
$z_6 = 3$
$z_7 = -\mathrm{i}$
$z_8 = 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$
$z_9 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$

$z_{10} = \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$
$z_{11} = \mathrm{i}\sqrt{3}+1$
$z_{12} = -9\,\mathrm{i}$
$z_{13} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
$z_{14} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$
$z_{15} = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

$z_{16} = \mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})$
$z_{17} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
$z_{18} = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$
$z_{19} = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$
$z_{20} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$
$z_{21} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

$z_{22} = (1+i\sqrt{3})^6$
$z_{23} = \dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}$, où $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
$z_{24} = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n$
$z_{25} = 1+\cos(\alpha)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha)$
$z_{26} = (1+\cos\theta-\mathrm{i}\,\sin\theta)^n$

Correction :

$$z_{21} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

$$z_{22} = (1+i\sqrt{3})^6 = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6.$$

$$z_{23} = \frac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi}.$$

$$z_{24} = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}-1}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{-2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n$$
$$= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n = \underbrace{\tan^n\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}.$$

$$z_{25} = 1+\cos(\alpha)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha) = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} & \text{si } \alpha\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(4k-1)\pi\,;(4k+1)\pi] \\ 2\left|\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)} & \text{si } \alpha\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(4k+1)\pi\,;(4k+3)\pi] \end{cases}.$$

$$z_{26} = (1+\cos\theta-\mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \begin{cases} 2^n\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}} & \text{si } \theta\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(4k-1)\pi\,;(4k+1)\pi] \\ 2^n\left|\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}+\pi\right)} & \text{si } \theta\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(4k+1)\pi\,;(4k+3)\pi] \end{cases}$$

Exercice 12 (Fondamental) : Simplifier $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi\,;\pi[$.

Correction : Pour $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, $e^{i\theta}+1 \neq 0$. On factorise par l'angle moitié $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler :

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Remarque : On vérifiera que $\dfrac{\theta}{2} \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 13 (*) :

1. Déterminer le module et l'argument de $z = \dfrac{1}{1+i\tan(a)}$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. Quel est l'ensemble des points d'affixe z quand a décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$?
3. En déduire une construction simple du point A d'affixe $\dfrac{1}{1+i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

Correction :

1. Comme $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(a) \neq 0$ et on a :

$$z = \frac{1}{1+i\tan(a)} = \frac{\cos(a)}{\cos(a)+i\sin(a)} = \cos(a)\,e^{-ia}.$$

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(a) > 0$ d'où $|z| = \cos(a)$ et $\arg(z) = -a$.

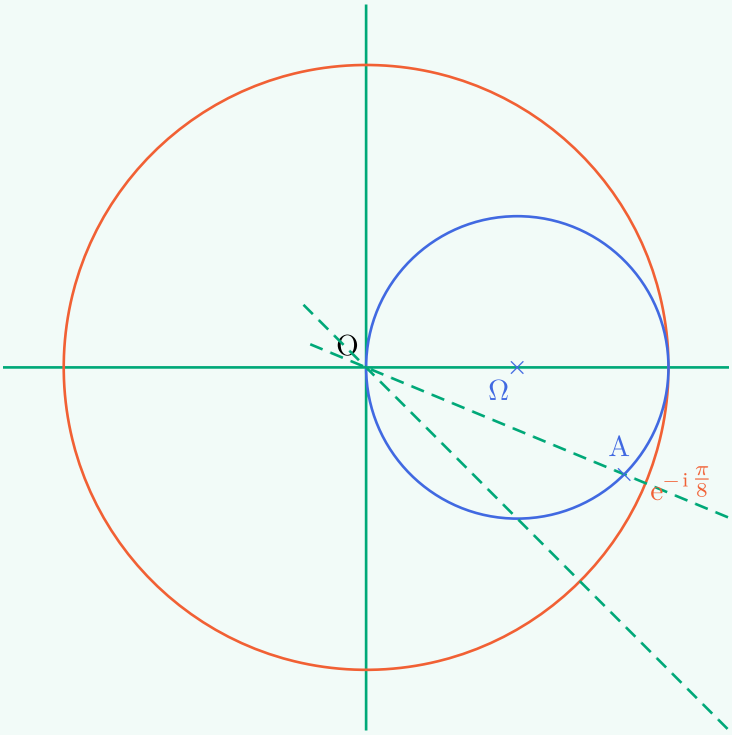
2. Il va falloir faire un peu de trigonométrie :

$$\begin{aligned} z &= \cos^2(a) + i\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2a)+i\sin(2a)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2ia} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où, $\left|z-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

Les points d'affixe z décrivent donc le demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. L'argument de l'affixe du point A qui appartient au cercle Cc est $-\dfrac{\pi}{8}$. On trace donc la bissectrice de la deuxième bissectrice qui coupe le cercle unité en $e^{-\frac{\pi}{8}}$ et le cercle $\mathscr{C}$ en A.



Exercice 14 : Soit $f : x \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,x)^2$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)\,, \mathrm{Im}\,(f)\,, \overline{f}$ et $|f|$.

Exercice 15 : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto e^x \cos(x)$
2. $g : x \longmapsto e^{-x} \sin(x)$
3. $h : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin\left(\sqrt{3}x\right)$

Correction :

1. On reconnait $f = \mathrm{Re}\,(\varphi)$ où $\varphi(x) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\,)x}$.

   Or, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = (1 + \mathrm{i}\,)^n \varphi(x) = \sqrt{2^n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{4}}\,\varphi(x)$.

   Par linéarité de la dérivation et de la partie réelle, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}\left(\varphi^{(n)}(x)\right) = \sqrt{2^n}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{x+(x+\frac{n\pi}{4})\,\mathrm{i}}\right) = \sqrt{2^n}\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\,\mathrm{e}^x.$$

2. Le raisonnement est identique : $g = \mathrm{Im}\,(\phi)$ où $\phi(x) = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\,)x}$:

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \phi^{(n)}(x) = (-1 + \mathrm{i}\,)^n \varphi(x) = \sqrt{2^n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3n\pi}{4}}\,\varphi(x)$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \mathrm{Im}\left(\phi^{(n)}(x)\right) = \sqrt{2^n}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-x+(x+\frac{3n\pi}{4})\,\mathrm{i}}\right) = \sqrt{2^n}\sin\left(x + \frac{3n\pi}{4}\right)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. $h = \mathrm{Im}\,(\psi)$ où $\psi(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\sqrt{3}x} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\,\sqrt{3})x}$ avec $\psi^{(n)}(x) = (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})^n(x) = 2^n\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,n\pi}{3}}\,\psi(x)$.

Donc $h^{(n)}(x) = 2^n \, \mathrm{e}^x \, \sin\left(x\sqrt{3} + n\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 16 : Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *i.e.* un complexe non réel.

Pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, montrer que

$$a + b\alpha = a' + b'\alpha \iff a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

Correction : $a + b\alpha = a' + b'\alpha \iff a - a' = (b' - b)\alpha$.

Si $b' = b$ alors $a' = a$ et le résultat est démontré.

Sinon $b' \neq b \implies \alpha = \dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$ ce qui contredit la définition de α.

La réciproque étant évidente, on a le résultat pour tout α non réel.

C'est exactement le même raisonnement dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ par exemple ie avec les éléments de la forme $a + b\sqrt{2}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$.

Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$, on démontrerait de même que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \iff a = a' \quad \text{et} \quad b = b'$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

II/ Trigonométrie

Exercice 17 : Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{in\theta} \mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$ puis en déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) \mathrm{d}\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Si $n = 0$, alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \mathrm{d}\theta = 2\pi$. Sinon,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{in\theta} \mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{\mathrm{i}\, n} \mathrm{e}^{in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\mathrm{i}\, n}(-1 + 1) = 0.$$

Par linéarité de la partie réelle et de l'intégrale, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{in\theta} \mathrm{d}\theta\right) = 0.$$

Exercice 18 : En utilisant les formules d'Euler, établir les identités suivantes :

1. $\cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$
2. $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$
3. $\sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos 4\theta}{8}$
4. $\cos^3(\theta) = \dfrac{3\cos(\theta) + \cos 3\theta}{4}$

Exercice 19 : À l'aide des formules de Moivre :

1. Linéariser $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.
2. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$.
3. Linéariser $\cos^3(2\theta)\sin^4(\theta)$.

Exercice 20 :

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique.
2. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^3 x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$.
3. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 21 :

1. Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Proposer une méthode plus efficace pour le calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.

Aide : Poser $u = \cos(x)$

Correction :

1. Les formules d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2\,\mathrm{i}}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{-5x} - 5\,\mathrm{e}^{-3x} + 5\,\mathrm{e}^{3x} + 10\,\mathrm{e}^{x} - 10\,\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{80}\cos(5x) + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{16}{15}.$$

2. Posons $u = \cos(x)$ alors $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Lorsque x parcourt l'intervalle $[0\,;\pi]$, u parcourt $[-1\,;1]$ dans le sens rétrograde par décroissance de cos.

$$\begin{aligned}\text{D'où, } \int_0^\pi \sin^5(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi (1-\cos^2(x))^2\,(-\sin(x)\,\mathrm{d}x)\\ &= \int_{-1}^1 (1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^1 1 - 2u^2 + u^4\,\mathrm{d}u\\ &= \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^1 = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

Exercice 22 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;\pi]$:

1. $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$
2. $\cos(2x) - 2\cos(x) = -\dfrac{3}{2}$
3. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0$
4. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leqslant 0$
5. $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 \leqslant 0$

Correction :

1. $\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \iff \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(2x) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) = 0 \iff \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \ldots$
2. $\cos(2x) - 2\cos(x) = -\dfrac{3}{2} \iff 2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) = -\dfrac{3}{2} \iff 4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 1 = 0 \iff \ldots$
3. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0 \iff \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \ldots$
4. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leqslant 0 \iff \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \ldots$
5. $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 \leqslant 0$

Exercice 23 : On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$
2. En utilisant la valeur $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :
$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$
3. Démontrer que $\left(z_0^2 + \dfrac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)^2 - 2$ et que $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Correction :

1. On développe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 - z)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right) = 1 - z^5$.

   Il ne reste plus qu'à diviser pour $z \neq 1$.
2. Comme $z_0^5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{10\pi}{5}} = 1$, la formule précédente nous donne :
$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$
   En simplifiant par $z_0^2 \neq 0$,
$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3. Il suffit de développer le membre de droite :
$$\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2-2=z_0^2+\frac{1}{z_0^2}+2 \iff \left(z_0^2+\frac{1}{z_0^2}\right)=\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2-2.$$
De plus, $\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2\pi}{5}}=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ d'après les formules d'Euler.

4. D'après les questions précédentes, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution l'équation du second degré $x^2+x-1=0$ dont les racines sont
$$\phi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\varphi=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Comme $0\leqslant\dfrac{2\pi}{5}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\geqslant 0$ et on a :
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Remarque : On en déduit $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\geqslant 0$ avec la formule $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$:
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 24 : Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$.

Correction :
$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}\right)^{2k+1}\right)$$
Or,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}\right)^{2k+1}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}\sum_{k=0}^{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{11}}\right)^{k}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{11}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{11}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{11}}}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{11}}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\end{aligned}$$
D'où,
$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}&=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\\&=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 25 : Calculer les sommes suivantes :

1. $\mathrm{A}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.
2. $\mathrm{B}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Correction :

1. et 2. Pour θ congru à 0 modulo 2π, on a $\mathrm{A}_n(\overline{0}) = n+1$ et $\mathrm{B}_n(\overline{0}) = 0$. On considère dorénavant $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Sommes classiques de chez classiques à savoir faire absolument. Je vous propose trois méthodes de la plus naturelle à la plus jolie :

Avec une suite géométrique : Par linéarité, $\mathrm{A}_n(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{B}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}$.

Or,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)\,\mathrm{i}\,\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}$$

On factorise numérateur et dénominateur par leur angle moitié,

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{(n+1)\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}} \\
&= \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \left(\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\right) \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire :

$$\mathrm{A}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En connaissant un peu le résultat :

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(k\theta)$$

Or, $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right) \\
&= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Pour retrouver la même formule, on utilise $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,

$$= 2\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

Avec $\frac{\theta}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Le raisonnement est identique pour $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

La plus jolie avec une somme télescopique :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{i\theta}-1)\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} &= \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1\\ \text{Avec } \theta\not\equiv 0\ [2\pi]\,,\ \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} &= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\\ &= \ldots\end{aligned}$$

Exercice 26 :

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, calculer $\mathrm{D}_n(\theta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ et $\mathrm{E}_n(\theta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

Correction :

1. Données ensemble, les deux expressions sont à traiter ensemble :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)\right)+i\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\\ &= (1+e^{\,i\,\theta})^n = (e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})^n e^{in\frac{\theta}{2}}\\ &= 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

2. Easy d'en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3^n}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 27 :

1. Calculer de deux manières $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.
2. En déduire $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots$ et $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots$

Correction :

1. D'une part,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right)\\ &=\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, avec le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{i})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right)\mathrm{i}^k\\ &=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\mathrm{i}^{2k}=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k.\end{aligned}$$

2. En identifiant, on obtient :

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Pour calculer la deuxième somme, il nous faudra calculer $(1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n$ de deux manières. Le raisonnement est identique et l'on trouve :

$$(1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n=\mathrm{i}\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Puis,

$$(1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n=2\,\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k.$$

Enfin,

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+(-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$