Sommes & Fonctions trigonométriques

25 avril 2025

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **4** exercices indépendants.

Exercice 1 – Dans tout l'exercice, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les fonctions suivantes pour tout réel x :

$$\varphi : x \longmapsto (1+x)^{2n}, \qquad \psi : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} \quad \text{et} \quad \theta : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k}.$$

On définit également les sommes suivantes :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \psi(x) + x\,\theta(x)$.

3. À partir de deux valeurs de φ bien choisies, en déduire l'expression des sommes S_n et T_n en fonction de n.

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, on se fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 2$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Enfin, on introduit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x) > 0$.

2. (a) Après avoir justifié leur existence, donner les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites en $\pm\infty$).

3. Établir l'encadrement suivant : $\forall\ x \in]0\,;1[$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

4. En déduire que : $\forall\ n \geqslant 2$, $\quad \ln\left(\dfrac{np+1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant -\ln\left(\dfrac{n-1}{np}\right)$.

5. Conclure quant à la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 – On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x).$$

1. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin(2x)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. En déduire les variations de la fonction g sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$. On précisera les valeurs de la dérivée en $-\dfrac{\pi}{4}$, 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Tracer soigneusement, sur la feuille donnée en annexe, la courbe représentative de la fonction g sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$. On tracera tout aussi soigneusement trois tangentes particulières.

   On donne aussi les approximations $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ *et* $\dfrac{\pi}{4} \simeq 0{,}8$.

5. (a) Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.

   (b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 1$.

   Indication : si $t \in [-1;1]$, quel est le signe de $t^2 - t^3$?

6. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $g\left(-\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ et $g\left(-\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\dfrac{5\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right]$ puis à $\mathbb{R}$ tout entier.

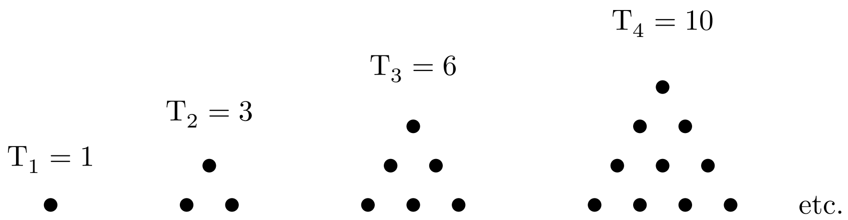
Problème 4 – Ce problème étudie une catégorie particulière d'entiers naturels, appelés *nombres polygonaux*. Commençons par quelques définitions préliminaires.

Définition 1 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle *polygone régulier à k côtés* tout polygone possédant k côtés de même longueur et k angles égaux.

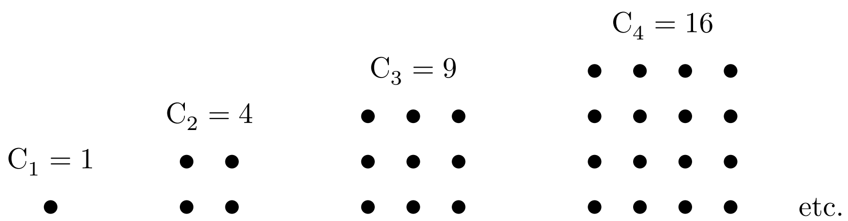
Définition 2 : Un *nombre polygonal* est un entier naturel pouvant être représenté par un polygone régulier.

Exemples et explications.

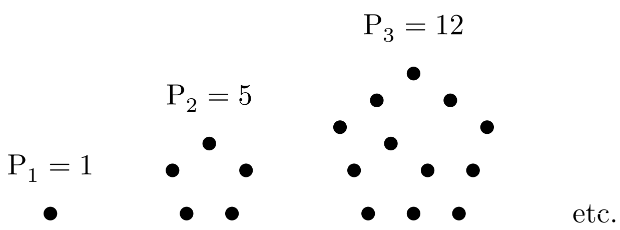
Cas des nombres triangulaires ($k = 3$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *triangulaire*, que l'on notera T_n, peut se représenter par un *triangle équilatéral* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres carrés ($k = 4$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *carré*, que l'on notera C_n, peut se représenter par un *carré* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres pentagonaux ($k = 5$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n^{\text{ème}}$ nombre *pentagonal*, que l'on notera P_n, peut se représenter par un *pentagone régulier* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Remarque : Il est important de noter que chaque figure (et donc chaque nombre polygonal) s'obtient facilement à partir de la figure précédente...
C'est ce que l'on va utiliser dans ce qui suit pour calculer ces nombres.

Questions.

A. À propos des nombres triangulaires.

1. Calculer les nombres T_5, T_6 et T_7 en faisant apparaître les calculs. *On n'attend pas de justification particulière, hormis des calculs un minimum détaillés.*

2. On pose $a_1 = 1$ et si $i \geqslant 2$, on pose $a_i = T_i - T_{i-1}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

   (b) Expliquer le plus simplement possible pourquoi on a $a_i = i$.

   (c) En déduire l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_n en fonction de n.

B. À propos des nombres carrés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre carré C_n en fonction de n. *Justifier brièvement.*

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$.

   (a) Écrire Γ_n sous la forme d'une somme $\sum_{i=1}^{n} b_i$ où b_i est un entier à expliciter en fonction de i.

   (b) En déduire Γ_n en fonction de n. Que remarque-t-on ?

C. À propos des nombres pentagonaux.

1. Calculer P_4 et P_5 en faisant apparaître les calculs. *Justifier brièvement.*

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geqslant 2$. Établir la relation de récurrence :

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

3. En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\;P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

D. Bonus : toute trace de recherche est la bienvenue !

Existe-t-il des entiers naturels $\geqslant 2$ qui sont à la fois un nombre triangulaire et un nombre carré ? Même question pour des entiers $\geqslant 2$ étant à la fois un nombre carré et un nombre pentagonal.

Nom : .... **Prénom :** ....

ANNEXE

Exercice 3 –