Sommes et Fonctions trigonométriques

Commentaires :

- *J'ai été ravi de constater à quel point je n'avais parlé pour rien en essayant de vous expliquer la différence entre une fonction f et ses valeurs $f(x)$. Si vous savez tout, pourquoi m'écouter ?*
- *Est-il possible de ne plus voir des expressions de la forme $(-1)\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}\times 1\times 0$ ou $(-1).\dfrac{3}{\sqrt{2}}.1.0$?*
- *Combien d'élèves de prépa ne savent pas dériver une expression aussi simple que $\cos^3(x)$?*
- *Cessez d'écrire ou de commencer par le résultat qu'on vous demande de démontrer !*
- *Pour justifier la dérivabilité d'une fonction entraînez-vous à faire des phrases directes, courtes, claires et concises plutôt que vos romans qui ne font que tenter de noyer le poisson !*

Exercice 1 – Dans tout l'exercice, on se fixe $n\in\mathbb{N}^*$.

On définit les fonctions suivantes pour tout réel x :

$$\varphi : x\longmapsto (1+x)^{2n},\qquad \psi : x\longmapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2k}\quad\text{et}\quad \theta : x\longmapsto \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}x^{2k}.$$

On définit également les sommes suivantes :

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\quad\text{et}\quad \mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.$$

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.

Correction : $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Commentaires : *Combien auront précisé qui étaient les a et b ? Seulement 9 !*

2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\psi(x)+x\,\theta(x)$.

Correction : D'après la formule du binôme, on sait que $\varphi(x)=(1+x)^{2n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$. Somme que l'on sépare entre puissances paires et impaires de x par linéarité :

$$\varphi(x)=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}\binom{2n}{k}x^k+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ impair}}}\binom{2n}{k}x^k.$$

Or, dans la 1ère somme, tout nombre pair k compris entre 0 et $2n$, s'écrit $k=2\ell$ où $\ell\in[\![0;n]\!]$.

De même, dans la 2ème somme, si k est un nombre impair compris entre 0 et $2n$, alors il s'écrit $k=2\ell+1$ où $\ell\in[\![0;n-1]\!]$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}x^{2\ell+1} \quad \text{(puis on factorise par } x \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme)}\\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}x^{2\ell} + x\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}x^{2\ell}\\ &= \psi(x) + x\,\theta(x).\end{aligned}$$

3. À partir de deux valeurs de φ bien choisies, en déduire l'expression des sommes S_n et T_n en fonction de n.

Correction : Utilisons l'identité précédente avec $x = 1$:

$$\begin{aligned}\varphi(1) = \psi(1) + \theta(1) &\iff (1+1)^{2n} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}1^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}1^{2\ell}\\ &\iff 2^{2n} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}\\ &\iff \mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = 2^{2n}.\end{aligned}$$

De même, avec $x = -1$:

$$\begin{aligned}\varphi(-1) = \psi(-1) - \theta(-1) &\iff (1-1)^{2n} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}(-1)^{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}(-1)^{2\ell}\\ &\iff 0 = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{2n}{2\ell+1}\\ &\iff \mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les sommes S_n et T_n sont solutions du système suivant, que l'on résout :

$$\begin{cases}\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = 2^{2n}\\ \mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n\\ 2\mathrm{S}_n = 2^{2n}\end{cases} \iff \mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n = 2^{2n-1}.$$

Exercice 2 – Dans tout l'exercice on se fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 2$ on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{np}\mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Enfin, on introduit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,(x)} - x - 1$.

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}\,(x) > 0$.

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ donc $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}\,(x) = \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{sh}\,(x) + 1$.

Quitte à poser $\mathrm{X} = \mathrm{sh}\,(x)$, on reconnait le polynôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ de discriminant strictement négatif donc de signe strictement positif.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}\,(x) > 0.$$

Commentaires : ***Méthode Solal :*** $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}\,(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ *Très bien !*

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 + 2\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x + 1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + 1\right)\\ &= \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^x + 1)^2 + (\mathrm{e}^{-x} - 1)^2\right) > 0.\end{aligned}$$

2. (a) Après avoir justifier leur existence, donner les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Somme et composée de fonctions au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est également et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} - 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) = (\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x))\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)}.$$

Commentaires : *Ne pas savoir dériver de telles fonctions est très inquiétant à mon sens.*

(b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de déterminer les limites en $\pm\infty$).

Correction : D'après la question (1), f' est croissante.

Or, $f'(0) = 0$.

On en déduit donc le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Commentaires :

— *Sans difficulté,* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

— *En* $+\infty$, $f(x) = x\left(\dfrac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{x} - 1\right) - 1$.

Or, $\dfrac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{x} = \dfrac{e^{\operatorname{sh}(x)}}{\operatorname{sh}(x)}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ *et les deux facteurs tendent vers* $+\infty$ $\left(\text{le deuxième car } \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} \geqslant \dfrac{e^x}{2x}\right)$. *Par conséquent,* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Établir l'encadrement suivant : $\forall\ x \in \,]0\,;1[,\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Correction : Comme, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$, on en déduit déjà que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \geqslant x + 1$.

D'autre part, en appliquant la relation en $-x$, on obtient aussi $\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}(x)} \geqslant 1 - x$.

Pour $x < 1$, $1 - x > 0$ et on peut composer par la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Réunissant les deux inégalités, on obtient :

$$\forall x \in \,]0\,;1[\,,\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

4. En déduire que : $\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln\left(\dfrac{np+1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant -\ln\left(\dfrac{n-1}{np}\right).$

Correction : Les inégalités précédentes étant strictement positives, on peut composer par le logarithme, fonction croissante, pour avoir

$$\forall\, x \in \left]0\,;1\right[,\ \ln(1+x) \leqslant \operatorname{sh}(x) \leqslant -\ln(1-x).$$

Pour $k > 1$, on applique l'inégalité précédente avec $x = \dfrac{1}{k} \in \left]0\,;1\right[$:

$$\forall\, k > 1, \quad \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

Il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités membre à membre pour $k = n$ à $k = np$:

$$\forall\, n \geqslant 2, \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

En simplifiant les deux sommes télescopiques aux extrémités :

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np+1}\right).$$

5. Conclure quant à la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Correction : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln(p).$

De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{p+\frac{1}{n}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln(p).$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \ln(p).$$

Exercice 3 – On considère la fonction g définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$.

1. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Les fonctions $\cos^3$ et $\sin^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car ce sont des puissances entières de fonctions usuelles) donc par somme, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\cos(x)\sin(x)\left(\sin(x) - \cos(x)\right).$$

Commentaires : *Ne pas savoir dériver une telle fonction est très inquiétant à mon sens.*

2. Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin(2x)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Correction : Il est connu que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)\sin(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

En factorisant par $\sqrt{2}$, et reconnaissant l'expression de $\cos(a+b)$, on obtient également que :

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}}\sin(2x)\,\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3. En déduire les variations de la fonction g sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$. On précisera les valeurs de la dérivée en $-\dfrac{\pi}{4}$, 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

Correction : $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \implies x + \dfrac{\pi}{4} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\cos$ est positif. La dérivée de g est donc du signe opposé de $\sin(2x)$.

Or, $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \geqslant 0 \iff u \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit le signe de $\sin(2x)$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$:

$$\sin(2x) \geqslant 0 \iff x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$$
$$\sin(2x) \leqslant 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;0\right]$$

Finalement, le tableau de variations de g sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ s'écrit

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
$\sin(2x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

On calcule rapidement :

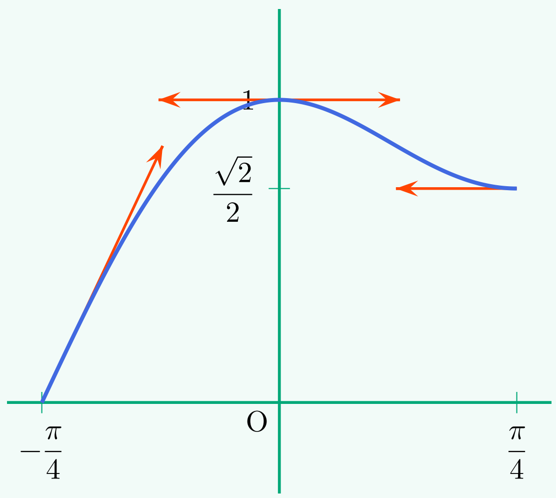
$$g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}},\quad g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

4. Tracer soigneusement, sur la feuille donnée en annexe, la courbe représentative de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$. On tracera tout aussi soigneusement trois tangentes particulières.

On donne aussi les approximations $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ *et* $\frac{\pi}{4} \simeq 0{,}8$.

Correction : La courbe $\mathscr{C}_g$ possède deux tangentes horizontales en $(0\,;1)$ et $\left(\frac{\pi}{4}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La tangente en $\left(-\frac{\pi}{4}\,;0\right)$ a pour coefficient directeur $g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 2{,}1$.



5. (a) Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.

Correction : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

Commentaires : *Combien auront pensé au domaine de définition ?* $\forall\, x \in \mathbb{R}$. *Seuls ceux-là ont fait des mathématiques. Seulement 7 élèves !*

(b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 1$.

Indication : si $t \in [-1;1]$, *quel est le signe de* $t^2 - t^3$ *?*

Correction : Commençons par l'indication : si $-1 \leqslant t \leqslant 1$, alors en multipliant par $t^2 \geqslant 0$, on obtient $-t^2 \leqslant t^3 \leqslant t^2$ donc en particulier $t^2 - t^3 \geqslant 0$.

Passons à l'équation $g(x) = 1$, où $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff \cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 \\ &\iff \cos^3(x) + \sin^3(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &\iff \underbrace{\cos^2(x) - \cos^3(x)}_{\text{« } t^2 - t^3 \text{ »} \geqslant 0} + \underbrace{\sin^2(x) - \sin^3(x)}_{\text{« } t^2 - t^3 \text{ »} \geqslant 0} = 0 \end{aligned}$$

Or, une somme de deux nombres positifs est nulle, si et seulement si ces deux nombres sont tous les deux nuls. Ainsi :

$$\iff \begin{cases} \cos^2(x)\,(1-\cos(x)) = 0 \\ \sin^2(x)\,(1-\sin(x)) = 0 \end{cases}$$

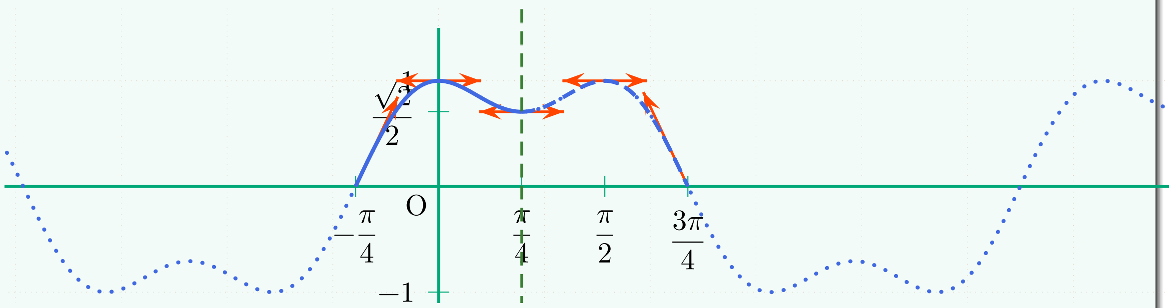
$$\iff \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \text{(impossible) ou } \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 1 \end{cases} \text{(impossible).}$$

$$\iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0\ [2\pi]\,.$$

6. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.

Correction : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^3(x) + \cos^3(x) = g(x)$.

On peut donc compléter la courbe de g sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ par symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$.



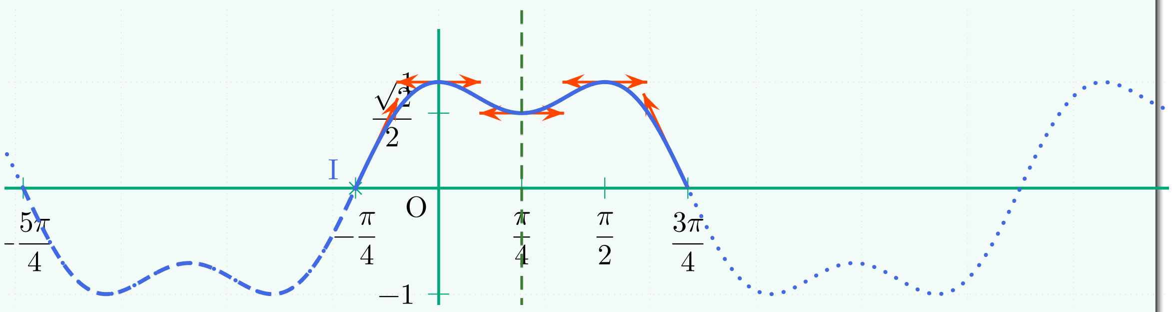
(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $g\left(-\frac{\pi}{4} + x\right)$ et $g\left(-\frac{\pi}{4} - x\right)$ et en déduire une méthode pour prolonger la courbe de g sur $\left[-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ puis à $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) &= \cos^3\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) \\
&= \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \\
&= -\cos^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \\
&= -\cos^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \\
&= -g\left(-\frac{\pi}{4} - x\right).
\end{aligned}$$

On peut donc compléter la courbe de g sur $\left[-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ par symétrie de centre $\mathrm{I}\left(-\frac{\pi}{4}\,;0\right)$.

Enfin, g étant clairement 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ invariant par translations et $\left[-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ de longueur $\frac{5\pi}{4}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=2\pi$, on peut compléter la courbe de $\left[-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ à $\mathbb{R}$ tout entier par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.



Commentaires : *En fait, nul n'est besoin de faire tout ça pour avoir la courbe de g.*

En effet, à partir de la 2π-périodicité et de la dérivée trouvée en (2), il suffit d'étudier le signe de cette dernière sur un intervalle de longueur 2π bien choisi i.e. $\left[-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ *et de trouver :*

x	$-\frac{5\pi}{4}$		$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$\sin(2x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0		$+$		0	$-$	
$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$			$-$		0			$+$			0		$-$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	↘	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	0

Bien sûr, la recherche des symétries centrales et axiales est plus jolie mais hors-programme en PTSI ;-)

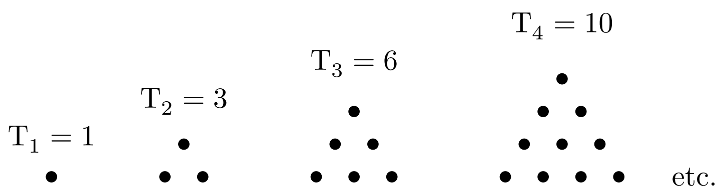
Problème 4 – Ce problème étudie une catégorie particulière d'entiers naturels, appelés *nombres polygonaux*. Commençons par quelques définitions préliminaires.

Définition 1 : Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On appelle *polygone régulier à k côtés* tout polygone possédant k côtés de mêmes longueurs et k angles égaux.

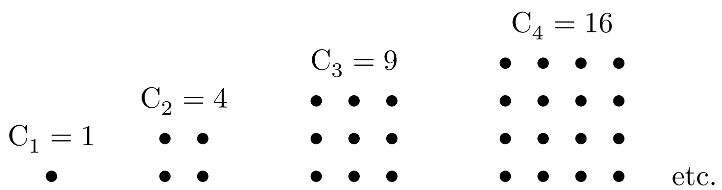
Définition 2 : Un *nombre polygonal* est un entier naturel pouvant être représenté par un polygone régulier.

Exemples et explications.

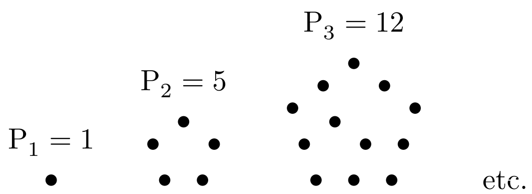
Cas des nombres triangulaires ($k = 3$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième nombre *triangulaire*, que l'on notera T_n, peut se représenter par un *triangle équilatéral* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres carrés ($k = 4$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième nombre *carré*, que l'on notera C_n, peut se représenter par un *carré* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Cas des nombres pentagonaux ($k = 5$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième nombre *pentagonal*, que l'on notera P_n, peut se représenter par un *pentagone régulier* dont les côtés possèdent n points régulièrement espacés (voir figure ci-dessous) :



Remarque. Il est important de noter que chaque figure (et donc chaque nombre polygonal) s'obtient facilement à partir de la figure précédente... C'est ce que l'on va utiliser dans ce qui suit pour calculer ces nombres.

Questions.

A. À propos des nombres triangulaires.

1. Calculer les nombres T_5, T_6 et T_7 en faisant apparaître les calculs. *On n'attend pas de justification particulière, hormis des calculs un minimum détaillés.*

Correction : On a $\mathrm{T}_5 = \mathrm{T}_4 + 5 = 10 + 5 = 15$, $\mathrm{T}_6 = \mathrm{T}_5 + 6 = 21$ puis $\mathrm{T}_7 = \mathrm{T}_6 + 7 = 28$.

Commentaires : *On pouvait aussi calculer directement sans relation de récurrence (mais plus fastidieux) :*

$$\mathrm{T}_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$\mathrm{T}_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$\mathrm{T}_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

2. On pose $a_1 = 1$ et si $i \geqslant 2$ on pose $a_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de sommer les a_i pour $i = 1$ à n et de reconnaître une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i && \text{On fait attention à ce que } \mathrm{T}_0 \text{ n'existe pas.} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}) && \text{On reconnait la somme télescopique} \\ &= 1 + \mathrm{T}_n - \mathrm{T}_1 = 1 + \mathrm{T}_n - 1 \\ &= \mathrm{T}_n. \end{aligned}$$

(b) Expliquer le plus simplement possible pourquoi on a $a_i = i$.

Correction : Le nombre a_i est la différence entre le $i^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_i et le $(i-1)^{\text{ème}}$ T_{i-1}.

Or, T_i s'obtient à partir de T_{i-1} en ajoutant un côté possédant i points afin de former un triangle équilatéral dont chaque côté possède i points régulièrement espacés.

Ceci justifie que $a_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1} = i$.

(c) En déduire l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire T_n en fonction de n.

Correction : À l'aide de ce qui précède, $\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

B. À propos des nombres carrés.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression du $n^{\text{ème}}$ nombre carré C_n en fonction de n. *Justifier brièvement.*

Correction : Le nombre C_n est le nombre de points dans un carré formé de n lignes avec n points chacune soit $\mathrm{C}_n = n \times n = n^2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$.

(a) Écrire Γ_n sous la forme d'une somme $\sum_{i=1}^{n} b_i$ où b_i est un entier à expliciter en fonction de i.

Correction : En posant $b_i = 2i - 1$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a facilement $\Gamma_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

(b) En déduire Γ_n en fonction de n. Que remarque-t-on ?

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \qquad \left(\text{par linéarité de } \sum\right)\\ &= n(n+1) - n = n^2.\end{aligned}$$

La somme des n premiers nombres impairs vaut donc C_n, le $n^{\text{ème}}$ nombre carré.

C. *À propos des nombres pentagonaux.*

1. Calculer P_4 et P_5 en faisant apparaître les calculs. *Justifier brièvement.*

Correction : Pour passer de P_3 à P_4, on ajoute 3 côtés possédant chacun 4 points (car pentagone dont les côtés possèdent 4 points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3 \times 4 - 2 = 10$ points, d'où

$$P_4 = P_3 + 10 = 22.$$

De même, pour passer de P_4 à P_5, on ajoute 3 côtés possédant chacun 5 points (car pentagone dont les côtés possèdent 5 points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3 \times 5 - 2 = 13$ points, d'où

$$P_5 = P_4 + 13 = 35.$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geqslant 2$. Établir la relation de récurrence :

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

Correction : Reprenons le même raisonnement que ci-dessus. Pour passer de P_{i-1} à P_i, on ajoute 3 côtés possédant chacun i points (car pentagone dont les côtés possèdent i points), mais alors on compte 2 sommets en trop, donc finalement on ajoute $3i-2$ points, d'où

$$P_i = P_{i-1} + 3i - 2.$$

Commentaires : *Autre façon de le voir : on ajoute à P_{i-1} les 3 côtés manquants, possédant chacun $i-1$ points plus 1 point extrême qu'on ne compte pas car il sera pris en compte dans le côté suivant (sauf pour le troisième et dernier côté). Ainsi, on doit ajouter $3(i-1)$ points plus le tout dernier point extrême (qui n'était commun à aucun autre sommet), d'où $P_i = P_{i-1} + 3(i-1) + 1 = \ldots$.*

3. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Correction : Il suffit de remarquer que $P_i - P_{i-1} = 3i - 2$.

Sommes et Fonctions trigonométriques

En sommant les deux membres pour $i=2$ à n, en faisant attention à ne pas écrire P_0 et en reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \geqslant 2,\ \sum_{i=2}^{n}(P_i - P_{i-1}) &= \sum_{i=2}^{n}(3i-2)\\
P_n - P_1 &= 3\sum_{i=1}^{n} i - 3 - \sum_{i=2}^{n} 2\\
P_n &= P_1 + \frac{3n(n+1)}{2} - 2(n-1) - 3\\
&= \frac{3n(n+1) - 4(n-1) - 4}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}\\
&= \frac{n(3n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est encore vraie pour $n=1$ avec $\dfrac{1\times(3\times 1-1)}{2} = 1 = P_1$.

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

D. Bonus : toute trace de recherche est la bienvenue !

Existe-t-il des entiers naturels $\geqslant 2$ qui sont à la fois un nombre triangulaire et un nombre carré ? Même question pour des entiers $\geqslant 2$ étant à la fois un nombre carré et un nombre pentagonal.

Correction :

Entier à la fois nombre triangulaire et nombre carré : On cherche à savoir s'il existe un couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ (avec $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$), tel que $T_n = C_p$.

Autrement dit, on cherche des solutions **entières** de l'équation $\dfrac{n(n+1)}{2} = p^2$.

Cette question s'avère difficile et sort du programme de PTSI...

Néanmoins, on peut quand même s'aider de l'outil informatique pour voir s'il existe *au moins* un couple solution ! en comparant des tables de valeurs des C_n et des T_n.

On trouve les deux premiers couples solutions $(n,p) = (8,6)$ et $(n,p) = (49,35)$.

Plus précisément :

$$T_8 = C_6 = 36 \quad \text{ou encore} \quad T_{49} = C_{35} = 1225.$$

Ainsi, 36 et 1225 sont à la fois des nombres triangulaires et carrés.

Entier à la fois nombre carré et nombre pentagonal : La même méthode pas très fine appliquée à l'équation $\dfrac{n(3n-1)}{2} = p^2$ conduit à un premier couple solution $(n,p) = (81,99)$:

$$P_{81} = C_{99} = 9801.$$

Ainsi, 9801 est à la fois un nombre carré et pentagonal.