Un peu de trigonométrique circulaire

Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité puis de calculer la dérivée de

$$h\colon x \longmapsto \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

1. *Préliminaires.*

   Résoudre les inéquations $\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.

2. Soit $f\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ? On le notera $\mathcal{D}_f$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

   (c) Démontrer soigneusement que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ puis calculer sa dérivée.

   (d) En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}_f$.

   (e) Étudier la dérivabilité de f en -1 (*via* un taux d'accroissement). Qu'en déduit-on graphiquement ?

   (f) Tracer le plus soigneusement possible la courbe représentative de f sur $\mathcal{D}_f$.

3. *Étude de la fonction h*
   (a) Exprimer h en fonction de f.

   (b) En déduire le domaine de définition de h, que l'on notera $\mathcal{D}_h$.

   (c) On décide d'étudier h sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Expliquer pourquoi cela suffit et comment on obtiendra toute la courbe sur $\mathcal{D}_h$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3\pi}{2}\\ x>\frac{3\pi}{2}}} h(x)$.

   (e) Démontrer que h est dérivable sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer alors h'.

   (f) Que dire de la dérivabilité de h en $-\dfrac{\pi}{2}$?

   (g) Dresser le tableau de variation complet de h sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (h) Tracer le plus soigneusement possible la courbe représentative de h sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right[$.