Un peu de trigonométrique circulaire

Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité puis de calculer la dérivée de $h\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$.

1. *Préliminaires.*

   Soit $x \neq 1$. On a :

$$\frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \iff x \in [-1\,;1[\quad \text{et} \quad \frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1\,;1[\,.$$

2. (a) Soit $x \neq 1$. Alors $f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0$ *i.e.* $x \in [-1\,;1[$ d'après la question précédente.

   Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = [-1\,;1[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to 1} 1+x = 2 > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} 1-x = 0^+$, d'après les théorèmes sur les quotients et les composées de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} \sqrt{u} = +\infty$.

   La courbe de f admet donc une asymptote d'équation $x = 1$.

   Commentaires : *Ne pensez pas que vous demander systématiquement une interprétation graphique est une lubie de prof de maths. Ça vous permet surtout de donner du sens à ce que vous faites et montrer au correcteur que vous n'êtes pas là pour ne faire que des calculs.*

   (c) La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur de n'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et à valeurs strictement positives si, et seulement si $x \in]-1\,;1[$

   Par composition avec la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\ ]-1\,;1[,\ f'(x) = \frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

   Commentaires : *Il est tout à fait inutile de simplifier la dérivée plus avant sachant qu'on a ici clairement le signe de celle-ci.*

   (d) D'après la question précédente, $\forall\, x \in]-1\,;1[$, $f'(x) > 0$.

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	-1		1
$f'(x)$	||	$+$	||
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

   (e) Soit $x \in\ ]-1\,;1[$. Calculons le taux d'accroissement de f en -1 :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{1-x}}.$$

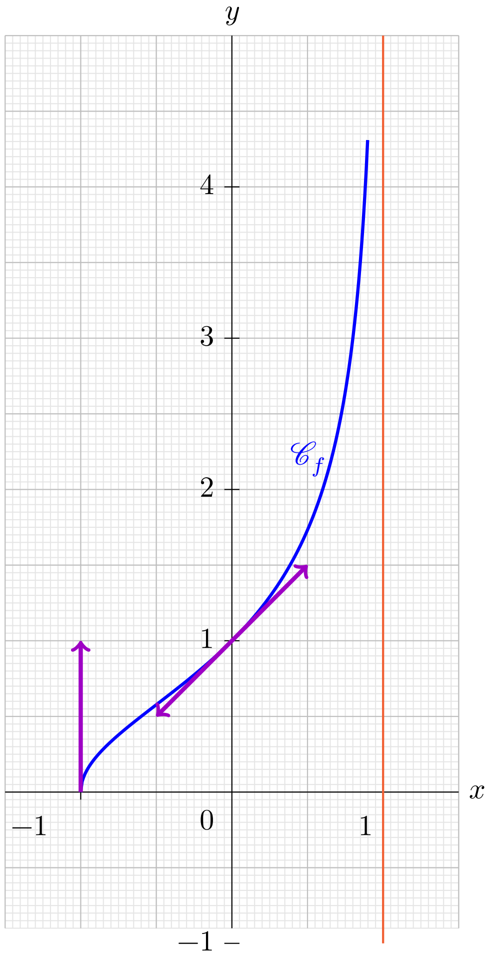
Or, $\sqrt{x+1} \underset{x \to -1_+}{\longrightarrow} 0_+$ et $\sqrt{1-x} \underset{x \to -1_+}{\longrightarrow} \sqrt{2}$ donc par produit puis passage à l'inverse, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty.$$

Ceci montre que f n'est pas dérivable en -1 et que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse -1.

Commentaires : *Même remarque que précédemment et que ça devienne un automatisme pour vous : une limite pas « normale », quelle interprétation j'en fais ?*

(f) Au point d'abscisse -1, la courbe présente une tangente verticale. On s'aide aussi de $f(0) = 1$ avec $f'(0) = 1$ qui donne la pente de la tangente en 0.



3. (a) Par définition de h, on remarque que $h = f \circ \sin$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x) \text{ existe} &\iff f(\sin(x)) \text{ existe} \\ &\iff \sin(x) \in \mathcal{D}_f \\ &\iff -1 \leqslant \sin(x) < 1 \\ &\iff \sin(x) \neq 1 \\ &\iff x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]. \end{aligned}$$

Ainsi, le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; \frac{5\pi}{2} + 2k\pi\right[$.

(c) Le domaine $\mathcal{D}_h$ est stable par les translations $x \longmapsto x \pm 2\pi$, et si $x \in \mathcal{D}_h$, par 2π périodicité de sin, $h(x + 2\pi) = h(x)$.

Ainsi, h est 2π-périodique, donc il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π inclus dans $\mathcal{D}_h$: l'intervalle $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ convient.

Toute la courbe s'obtiendra par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

(d) Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} \sin(x) = 1^-$, d'après la partie 1 et les théorèmes sur les limites de composées, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} h(x) = \lim_{\substack{u\to1\\u<1}} f(u) = +\infty.$$

De même, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\frac{3\pi}{2}\\x>\frac{3\pi}{2}}} \sin(x) = 1^-$ entraîne aussi $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\frac{3\pi}{2}\\x>\frac{3\pi}{2}}} h(x) = +\infty$.

La courbe de h admet donc des asymptotes d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Commentaires : *La connaissance de la limite ne $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures vous donne, par 2π-périodicité, celle en $-\dfrac{3}{2}$ par valeurs inférieures mais pour obtenir celle par valeurs supérieures, c'est la symétrie d'axe $x = -\dfrac{\pi}{2}$ qu'il faudrait invoquer (et démontrer).*

(e) La fonction sin est dérivable sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans $]-1\,;1[$ qui est le domaine de dérivabilité de f.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $h = f \circ \sin$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\ x \in \left]-\frac{3\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ h'(x) &= \sin'(x)\, f'(\sin(x))\\ &= \cos(x)\,\frac{1}{(1-\sin(x))^2}\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\\ &= \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}.\end{aligned}$$

(f) Comme pour f en -1, regardons le taux d'accroissement de h en $-\dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\tau_{h,-\frac{\pi}{2}}(k) = \frac{h\left(-\frac{\pi}{2}+k\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{k} &= \frac{\sqrt{\dfrac{1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+k\right)}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}+k\right)}}}{k} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos(k)}{1+\cos(k)}}}{k}\\ &= \frac{\sqrt{\dfrac{2\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)}}}{k} = \frac{\sqrt{\tan^2\left(\frac{k}{2}\right)}}{k}\end{aligned}$$

Alors, suivant le signe de k on a :

i. Si $k > 0$ alors $\tau_{h,-\frac{\pi}{2}}(k) = \dfrac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{k} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{\frac{k}{2}} \xrightarrow[\substack{k\to0\\k>0}]{} \dfrac{1}{2}$.

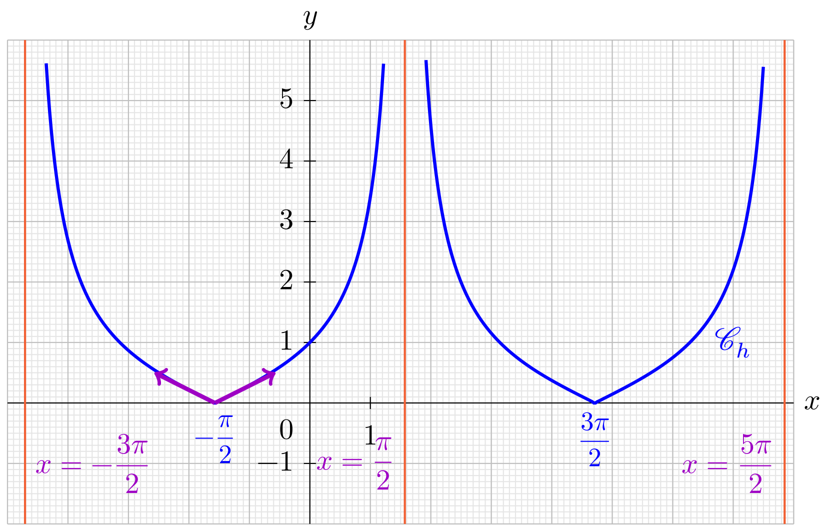
ii. Si $k < 0$ alors $\tau_{h,-\frac{\pi}{2}}(k) = \dfrac{-\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{k} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\tan\left(\frac{k}{2}\right)}{\frac{k}{2}} \xrightarrow[\substack{k\to0\\k>0}]{} -\dfrac{1}{2}$.

La fonction h n'est donc pas dérivable en $-\dfrac{\pi}{2}$ mais sa courbe y admet deux demi-tangentes de pente $\pm\dfrac{1}{2}$.

(g) $\forall\, x \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$. On en déduit le tableau de variation de h :

x	$-\dfrac{3\pi}{2}$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$
$h'(x)$	||	$-$	||	$+$	||
h	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

(h)



Commentaires : *En regardant bien l'expression de f, on aurait aussi pu se dire qu'on était à deux doigts de pouvoir utiliser nos formules trigonométriques.*

On pose alors $ct : x \longmapsto h\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1. *ct est définie sur le translaté de $\mathcal{D}_h$ de vecteur $-\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$ soit*
$$\mathcal{D}_{ct} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]0 + 2k\pi\,;2\pi + 2k\pi\right[= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\left]-\pi + 2k\pi\,;2k\pi\right[\cup \left]2k\pi\,;\pi + 2k\pi\right]\Big).$$
2. *Sur $\mathcal{D}_{ct}$,*
$$g(x) = h\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right))}} = \sqrt{\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right))}} = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x))}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|}.$$
3. *Fonction paire et 2π-périodique sur un ensemble symétrique par rapport à l'origine et invariant par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ que l'on pourra étudier sur $]0\,;\pi[$ et compléter la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées puis translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.*

   Sur $]0\,;\pi[$, on aura d'ailleurs $ct(x) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ dont l'étude est facile : continuité, stricte décroissance par composition, asymptote en 0, prolongement par continuité en π, dérivabilité, demi-tangente en π.
4. *La courbe de h sera alors obtenue à partir de celle de ct par une translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$.*