Remédiation – Nombres complexes

1. Rappeler la formule du binôme de Newton dans un cadre général.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \arcsin^3(x)$.

   Justifier la dérivabilité de g sur un intervalle à préciser puis calculer $g'(x)$ sur celui-ci.

   Les fonctions $u \longmapsto \arcsin(u)$ et $u \longmapsto u^3$ sont respectivement dérivables sur $]-1\,;1[$ et $\mathbb{R}$ donc g, composée de ces dernières, l'est également sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\quad g'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^2(x).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $13z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.

   $z_{12} = \dfrac{\sqrt{3} \pm 7\,\mathrm{i}}{26}$.

4. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie

$$|z - 1 + \mathrm{i}\,| = |z + 2|\,.$$

   $|z - 1 + \mathrm{i}\,|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$ et $|z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2$ donc

$$\begin{aligned} |z - 1 + \mathrm{i}\,| = |z+2| &\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + y^2 \\ &\iff -2x + 2y + 2 = 2x + 4 \\ &\iff 2x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

   C'est la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Remédiation - Nombres complexes

Remédiation - Nombres complexes

1. Rappeler la relation fondamentale liant les fonctions cosinus et sinus.

   $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \arccos^3(x)$.

   Justifier la dérivabilité de g sur un intervalle à préciser puis calculer $g'(x)$ sur celui-ci.

   Les fonctions $u \longmapsto \arccos(u)$ et $u \longmapsto u^3$ sont respectivement dérivables sur $]-1\,;1[$ et $\mathbb{R}$ donc g, composée de ces dernières, l'est également sur $]-1\,;1[$ et on a :

   $$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ \ g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\arccos^2(x).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $11z^2 - z\sqrt{8} + 1 = 0$.

   $z_{12} = \dfrac{\sqrt{2} \pm 3\,\mathrm{i}}{11}.$

4. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie

   $$|z - 1 + \mathrm{i}\,| = 2.$$

   $|z - 1 + \mathrm{i}\,|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$ donc

   $$|z - 1 + \mathrm{i}\,| = 2 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

   C'est le cercle de centre $\Omega\,(1\,;-1)$ et de rayon 2.