Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 1 : Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$.

Exercice 2 : Étudier le signe de $\cos(3x) + \cos(5x)$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\cos\left(\arctan x\right).$$

Correction : $\cos\left(\arctan x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \arctan x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : La fonction arc tangente : définition, monotonie, continuité, dérivabilité et formule de la dérivée, parité, limites, tangente à l'origine.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\tan(\arcsin x).$$

Correction : $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{+\sqrt{1-x^2}}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Démonstration de $\cos(a+b) = \ldots$ et $\sin(a+b) = \ldots$.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\cos\left(\arctan x\right).$$

Correction : $\cos\left(\arctan x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \arctan x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j}$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Exercice 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

Établir les relations suivantes :

1. $\tan(t) = \operatorname{sh}(x)$
2. $\dfrac{1}{\cos(t)} = \operatorname{ch}(x)$
3. $\sin(t) = \operatorname{th}(x)$

Correction :

1. Remarquons d'abord que, par construction, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, t est donc dans le domaine de définition de la fonction $\tan$.

   En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ on obtient directement $\tan(t) = \tan\left(\arctan(\operatorname{sh}(x))\right) = \operatorname{sh}(x)$.
2. Ensuite, $\dfrac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t) = 1 + \tan^2\left(\arctan(\operatorname{sh}(x))\right) = 1 + \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$.

   Or la fonction ch ne prend que des valeurs positives, et $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(t) > 0$.

   Ainsi $\dfrac{1}{\cos(t)} = \operatorname{ch}(x)$.
3. Enfin, $\sin(t) = \tan(t) \cdot \cos(t) = \operatorname{sh}(x) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Carré d'une somme : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$.

Exercice 1 : Calculer $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$.

Exercice 2 : Étudier le signe de $\cos(x) - \cos(3x)$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\sin(\arctan x).$$

Correction : $\dfrac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)} = \tan(\arctan x)$.

Par conséquent, $\sin(\arctan x) = x\cos(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right)$.

Correction : $\forall\, x \in [-1,1], \quad \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right) = \dfrac{1+\cos(\arccos(x))}{2} = \dfrac{1+x}{2}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Démonstration de $\cos(a+b) = \ldots$ et $\sin(a+b) = \ldots$.

Exercice 1 : À l'aide d'un changement d'indices, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \cos\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\tan\left(2\arctan(x)\right)$.

Correction : $\tan\left(2\arctan(x)\right) = \dfrac{2\tan\arctan(x)}{1-\tan^2\arctan(x)} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Sommes et Produits - Fonctions circulaires

Question de cours : Formules de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini, expression de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de t.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Exercice 2 : Étude complète de $f : x \longmapsto (\cos(x) + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3 : Montrer que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} = \arctan\dfrac{2}{3}$.

Correction : $\tan\left(\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

Or $0 < \arctan\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ donc $0 < \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$.