

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

**Exercice 1 :** Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

**Exercice 2 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $5\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{sh}(x) = 4$ .**Exercice 3 :** Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Limites locales et asymptotiques remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites)

**Exercice 1 :** Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

**Exercice 2 :** Étudier la fonction définie par :

$$x \mapsto x^x.$$

**Exercice 3 :** Calculer  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j+1}$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Valeur de  $\sum_{k=1}^n k^2$  et démonstration par calcul direct, sans récurrence.

**Exercice 1 :** Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

**Exercice 2 :** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x),$

2.  $\frac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x}.$

**Exercice 3 :** Calculer  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j).$

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Formule de Bernoulli :  $a^n - b^n = \dots$ **Exercice 1 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ .**Exercice 2 :** Étudier la fonction définie par :

$$x \mapsto x e^{\frac{1}{\ln x}}.$$

**Exercice 3 :** Calculer  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Limites remarquables de la fonction  $\ln$  avec démonstration de la limite de  $\frac{\ln(x)}{x}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 1 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ .

**Exercice 2 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}(x) = 2$ .

**Exercice 3 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Simplifier  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit.

**Exercice 1 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$ .**Exercice 2 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$ .**Exercice 3 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Simplifier  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Croissances comparées asymptotiques : formules et démonstration.

**Exercice 1 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ .

**Exercice 2 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $3\text{sh}(x) - \text{ch}(x) = 1$ .

**Exercice 3 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Simplifier  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ .

Nom : .....

Prénom : .....

## Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Formule du binôme de Newton.

**Exercice 1 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1)$ .**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de  $f$  et ses limites aux bornes.
3. Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $\mathbb{R}^+$  définit une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
4. Déterminer  $g^{-1}$ .

**Exercice 3 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Simplifier  $\sum_{k=0}^n \frac{3^k + 4^k}{5^k}$ .