Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : La fonction logarithme népérien : définition, continuité, dérivabilité, monotonie, ...

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5\mathrm{ch}\,(x) - 3\mathrm{sh}\,(x) = 4$.

Correction : $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$.

Exercice 3 : Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Limites locales et asymptotiques remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites)

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto x^x.$$

Exercice 3 : Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$
2. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
2. $\frac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \text{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ et $\sqrt{x^2+1}-x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0.$$

2. Pour $x > 0$,

$$\frac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Exercice 3 : Calculer $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = ...$

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}.\sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Exercice 3 : Calculer $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Limites remarquables de la fonction $\ln$ avec démonstration de la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\text{ch}\,(x) = 2$.

Correction : $\text{ch}\,(x) = 2 \Leftrightarrow x = \pm\text{argch}\,(2) = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$.

Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$.

Correction : Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}\right)$.

Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)$.

Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \dfrac{1}{8}e^{-x}(6e^x + 2e^{-3x}) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\dfrac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Croissances comparées asymptotiques : formules et démonstration.

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3\text{sh}\,(x) - \text{ch}\,(x) = 1$.

Correction : $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

Fonctions de référence, Sommes et Produits

Question de cours : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
3. Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}^+$définit une bijection de $\mathbb{R}^+$sur un intervalle J à déterminer.
4. Déterminer g^{-1}.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+4^k}{5^k}$.