Chapitre

IX Primitives et calculs d'intégrales

Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus. Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.

Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste dans sa solitude. Le cosinus répond :

— *« Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »*

Et le sinus de répondre :

— *« Eh bien, intègre-toi ! »*

CONTENU

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I et J sont des intervalles.

I/ Primitives

I.1 Primitives d'une fonction de la variable réelle

Définition 1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ est une *primitive de f sur* I, notée $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, si F est dérivable sur I et de dérivée égale à f :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Notations : Le symbole $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, introduit par Leibniz [1], désigne une primitive quelconque de f. Elle est définie à une constante additive près.

On ne parle donc pas de LA primitive, mais DES primitives de f.

Exemples 1 :

- $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x+2$ sont des primitives de $x \longmapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Donc F est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Une primitive de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \longmapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\omega x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.
- La fonction S définie par $\mathrm{S}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $\mathrm{S}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

  Donc S est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1\,;+\infty[$.

ATTENTION Il existe des fonctions n'admettant pas de primitives comme $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Exercice 1 : Montrer qu'une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ est $\mathrm{F} : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Proposition 1 (Unicité et linéarité) :
Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction.

[1]. **Gottfried Wilhelm Leibniz**, né à Leipzig le 1er juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

Esprit polymathe, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».

— Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors elles sont égales sur I à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad F_1(x) = F_2(x) + c.$$

— Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité. En notant $\mathscr{P}_f$ l'ensemble de ses primitives sur I, on a :

$$\mathscr{P}_f = \{F + c \,/\, c \in \mathbb{K}\}.$$

— Soient $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathbb{K}$.

Si f admet une primitive F sur I, alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur b en a.

Remarques :

— Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».

— La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.

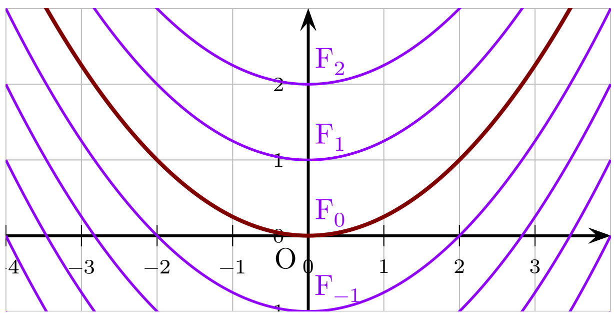

Figure IX.1 – Primitives de $x \longmapsto \dfrac{x}{2}$.

Exemples 2 :

— Les primitives de $x \longmapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^3 + Cte$.

— La fonction ln est l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Proposition 2 (Linéarité) :
Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$, $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g sur I alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I.

ATTENTION

Pas plus que pour la dérivée, sauf cas particuliers, une primitive d'un produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de fonctions ne s'obtient pas par produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de primitives.

Exemples 3 :

— $f : x \longmapsto 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$.

Donc, $x \longmapsto x^3 + \frac{1}{7}\sin(7x)$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— **Cas des fonctions polynomiales :**

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ admet pour primitive } x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Corollaire 2.1 (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) :
Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

$$f \text{ admet une primitive sur I si, et seulement si } \mathrm{Re}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ aussi sur I.}$$

Dans ce cas, si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ sont à valeurs réelles, alors $\mathrm{F}_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{F}_2$ est une primitive de f si, et seulement si F_1 et F_2 sont, respectivement, des primitives de $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

Autrement dit, sur I :

$$\mathrm{Re}\left(\int^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int^x \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int^x \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Exemple 4 : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 1 + \mathrm{i}\,x$ est $x \longmapsto x + \mathrm{i}\,\frac{x^2}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x \longmapsto x^2 + \mathrm{i}\,\cos(x)$.
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$

I.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».
Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I, n est un entier relatif non nul différent de -1. On note F une primitive de f sur I.

— Fonctions polynomiales et rationnelles :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$

Exemples 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$ **:** Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α, on a :

$$\int^x \frac{1}{t-\alpha}\,\mathrm{d}t = \ln|x-\alpha| = \begin{cases} \ln(x-\alpha) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]\alpha\,;+\infty[\\ \ln(\alpha-x) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]-\infty\,;\alpha[\,. \end{cases}.$$

ATTENTION $\int^x \frac{1}{t-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \mathrm{i}\arctan(x).$

Primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k>1$ **:** Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α, on a :

$$\int^x \frac{1}{(t-\alpha)^k}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}.$$

Remarque : Pour les fonctions polynomiales x^n ou les fonctions rationnelles $\dfrac{1}{x^n}$, une seule formule suffit à condition que $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$:

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
x^n	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$
		$\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$

Exemple 6 : Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^8} = x^{-8}$ est $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{7x^7}$.

— Fonctions usuelles :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x [2]	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
a^x, $a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$\mathbb{R}_+^*$

— Fonctions circulaires :

[2]. Bouhouhou !

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a\,;a[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	

— Fonctions hyperboliques :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x)$	
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$]1\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$	$]-a\,;a[$

Méthode 1 (Trouver une primitive) :
D'une manière générale, pour trouver une primitive F d'une fonction f, on revisite son tableau des fonctions dérivées à l'envers et on conjecture la forme de la fonction F puis on complète avec des coefficients multiplicateurs afin de simplifier ceux qui apparaîtraient en dérivant la fonction F.

Proposition 3 :
Soient $u : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ et $\mathrm{F} : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

$$\mathrm{F}\circ u \text{ est une primitive de } u' \times (\mathrm{F}'\circ u) \text{ sur } \mathrm{I}.$$

Corollaire 3.1 :
Pour a, b deux réels avec $a \neq 0$ tels que $ax+b \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, si F est primitive de f sur J, alors $x \longmapsto \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b)$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$ sur I.

Exemples 7 :

— Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \longmapsto \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— Une primitive de $x \longmapsto \sin(ax+b)$ est $x \longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— Une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$ est $x \longmapsto \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

La proposition (3) avec F fonction usuelle et $u : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ s'écrit :

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n<0$: $\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$	$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in \left]-1\,;1\right[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$	$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in \left]1\,;+\infty\right[$
$\dfrac{u'}{1-u^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$	$\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in \left]-1\,;1\right[$

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$\dfrac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u)$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$	

Exemples 8 :

— $x \longmapsto 2x(x^2-1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\dfrac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \longmapsto \dfrac{(x^2-1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— $f : x \longmapsto -3\,\mathrm{e}^{-3x-1}$ est du type $u'\,\mathrm{e}^u$ de primitive e^u.

Donc, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

— $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ de primitive $\ln|u|$.

Donc, $x \longmapsto \ln\left|x^2-x-2\right|$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;2\}$.

— $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$.

Donc, $x \longmapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+4}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\left]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

ATTENTION

— Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile [3]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos(u), \mathrm{e}^u$!

— Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (*cf.* le paragraphe (V)).

— Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale [4].

Exercice 3 : Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{4t+3}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x (3t-1)\left(3t^2-2t+3\right)^3\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ sur $]1\,;+\infty[$
5. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3}\,\mathrm{d}t$ sur $]-3\,;+\infty[$
6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ sur $]0\,;\pi[$
7. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sur $]0\,;+\infty[$
8. $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+i+t}\,\mathrm{d}t$

[4]. Par exemple, la primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

II/ Intégrales

II.1 Notions d'intégrales

Le calcul d'intégrale répond à une question simple : comment définir une aire qui n'est pas celle d'une figure géométrique simple ?

Pour $a \leqslant b$ deux réels, la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a\,;b]$ et à valeurs réelles a été introduite comme « aire algébrique » entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$: on compte l'aire positivement sur un intervalle où $f \geqslant 0$ et négativement sinon.

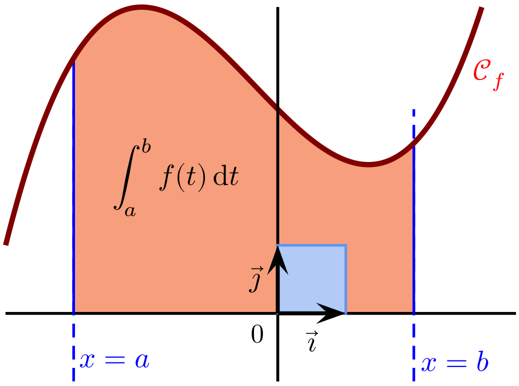

Figure IX.2 – $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique du domaine orangé en unité d'aire.

L'idée est de subdiviser $[a\,;b]$ suivant des bases de plus en plus fines

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

et de faire la somme des aires des rectangles obtenus avec des valeurs de f sur cette subdivision : c'est la méthode des rectangles qui conduit à l'approximation où $t_k \in [x_k\,;x_{k+1}]$:

$$\mathrm{R}_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(t_k)\,.$$

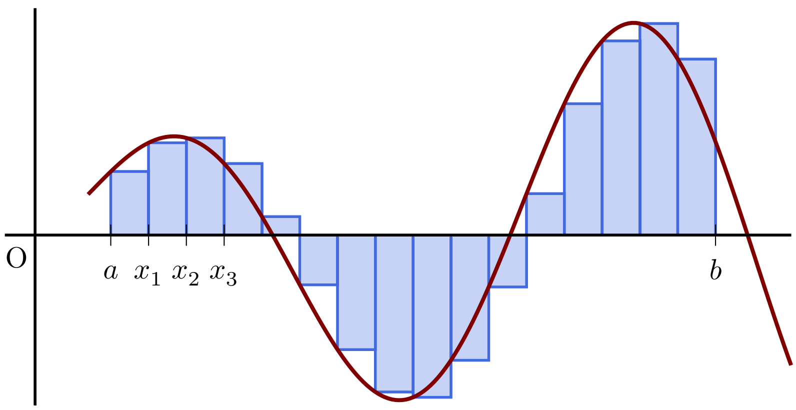

Figure IX.3 – Méthode des rectangles (à gauche).

On montre ensuite que, sous l'hypothèse f continue sur $[a\,;b]$, $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge quand $n\to+\infty$ vers une limite indépendante de la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ et les $t_k\in[x_k;x_{k+1}]$. C'est cette limite qu'on pose comme étant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n(f).$$

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right). \qquad \text{(Méthode des rectangles à gauche)} \qquad \text{(IX.1)}$$

Exemples 9 : Soit f une fonction constante sur $[a\,;b]$ égale à $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda = \lambda(b-a)$.

Dans le cas ou $a\leqslant b$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+$, on retrouve l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ.

L'expression dans le second membre de (IX.1) porte le nom de *somme de Riemann* et permet, notamment, de prolonger la notion d'intégrale aux fonctions de la valeur réelle à valeurs complexes.

Définition 2 : Soient $f\in\mathscr{C}^o(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$ et $a,\ b\in\mathrm{I}$.

— si $a\leqslant b$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,\mathrm{d}t$.

— si $b\leqslant a$ on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier, cette définition entraîne :

$$\boxed{\forall\, a\in\mathrm{I},\ \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Vocabulaire :

— $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit « somme de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».

— a et b s'appellent les *bornes d'intégration*.

— La fonction à intégrer s'appelle l'*intégrande*.

— Le t dans « $\mathrm{d}t$ » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \ldots$$

Théorème 4 :
Soient $f,\, g \in \mathscr{C}^o\left(\mathrm{I}\,;\mathbb{C}\right)$ et $a,\, b \in \mathrm{I}$.

Linéarité : $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\quad \displaystyle\int_a^b \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Relation de Chasles : $\forall\, c \in \mathrm{I},\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalité triangulaire : si $a \leqslant b$, $\quad \displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

À l'aide de la relation de Chasles, on démontre facilement que :

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$
2. Soit $f \in \mathscr{C}^o\left(\mathrm{I}\,;\mathbb{C}\right)$ et $a \in \mathrm{I}$.

$$\text{Si } \mathrm{F} : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ alors } \forall\, x, y \in \mathrm{I},\ \begin{aligned} \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) &= \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{IX.3}$$

Exercice 4 : À l'aide de l'inégalité triangulaire, pour tout x réel, montrer que $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) :
Soient $f, g \in \mathscr{C}^0\left(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}\right)$ et $a,\, b \in \mathrm{I}$.

Positivité : Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$ et $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Stricte positivité : Si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff f = 0 \text{ sur } [a\,;b].$$

Si f est à valeurs strictement positives sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

Croissance : Si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

En particulier, si $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \in [a\,;b]$ alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

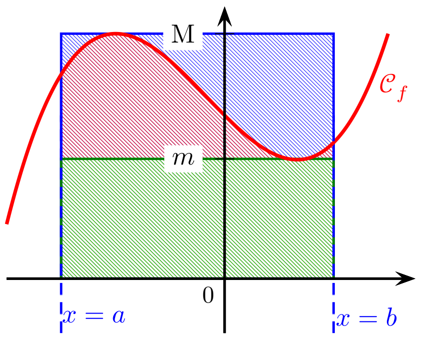

Figure IX.4 – D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ ne peut donc faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle.

Remarque : La croissance de l'intégrale est une simple conséquence de la positivité. Il suffit d'appliquer le premier résultat à la fonction positive $g - f$.

II.2 Lien avec les primitives

Théorème 6 (Fondamental) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in \mathrm{I}$.

(i) $\mathrm{F}_a : \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

(ii) Pour toute primitive F de f sur I : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, noté $\Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$.

En particulier, la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F.

ATTENTION

Quand on calcule une primitive $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue f, le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive.

La notation des intégrales sans borne inférieure nous permet de faire du calcul À CONSTANTE ADDITIVE PRÈS. Le symbole d'égalité $=$ qui y figure n'est pas un vrai symbole d'égalité, c'est plutôt un symbole de congruence $\equiv$ modulo l'ensemble des fonctions constantes.

Exemples 10 :

— $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$.

En particulier, retenez que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

— Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,

- $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin^4(t)\right]_0^\pi = 0.$
- $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 11 : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

Corollaire 6.1 :

Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I.

Autrement dit, soit f une fonction continue sur un intervalle I, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I pour tout $a \in \mathrm{I}$. C'est LA primitive de f sur I qui s'annule en a.

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

Exercice 6 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et $a, b : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ dérivables.

1. Montrer que $\mathrm{H} : x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.
2. Étudier la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$

   (définition, dérivabilité, variations).

Exemple 12 : $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en zéro.

Méthode 2 (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive) :
Soit $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ à calculer.

1. On cherche une primitive F de f sur $[a\,;b]$.
2. On écrit et calcule : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.
3. C'est tout !...

Exercice 7 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Définition 3 (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) : Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A.
On note $\mathscr{C}^1(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Il est clair que $\mathscr{C}^1(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ est stable par somme, produit et quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On transposera également les propriétés de stabilité par composition.

Corollaire 6.2 :
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$.

Alors, pour tous réels $a, b \in \mathrm{I}$, $\quad f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.

III/ Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

ATTENTION

En accord avec le théorème (6), avant toute manipulation d'intégrales ou de primitives, on s'assurera de l'existence de l'objet en précisant bien que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration *i.e.* on commencera toujours par écrire :

La fonction ... est continue [5] *sur l'intervalle ... et on a ...*

[5]. ou de classe $\mathscr{C}^1$ pour une intégration par parties.

III.1 Intégration par parties

Proposition 7 (Intégration par parties) :
Soient u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En terme de primitives, on écrira simplement :

$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Retenez que l'intégration par parties sera particulièrement utile pour :
- intégrer des fonctions dont la primitive n'est pas triviale.
- obtenir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier naturel.

Exercice 8 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \ln(x)$.
2. $x \longmapsto \arctan(x)$.
3. $x \longmapsto \arcsin(x)$.

ATTENTION

Bien vérifier que tous les facteurs du produit sont bien de classe $\mathscr{C}^1$.

Une rédaction correcte commencera toujours en le précisant même rapidement :

« Les fonction $x \longmapsto u(x)$ et $x \longmapsto v(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on effectue une IPP et on a... »

Méthode 3 (Méthode ALPES) :
La méthode « A.L.P.E.S » donc consiste à toujours dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier avec :

A - pour arctan, arcsin, arccos, ...
L - pour Logarithmes
P - pour fonctions Polynomiales
E - pour Exponentielles
S - pour sin, cos, tan, sh , ch , ...

Exemples 13 : Si on veut intégrer $x\sin(x)$, on va dériver la fonction polynomiale et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille **P** des fonctions polynomiales vient avant la famille **S** des fonctions trigonométriques :

$$\int^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t))\,\mathrm{d}t = -x\cos(x) + \sin(x).$$

De même, pour intégrer $2x\arctan(x)$, on va commencer par dériver l'**A**rctan et intégrer la fonction polynomiale **P** :

$$\int^x 2t\arctan(t)\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - x.$$

III.2 Changement de variables

Proposition 8 (Changement de variables) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et $\varphi : [a\,;b] \longmapsto \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans I. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Méthode 4 (Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables) :
En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

1. On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
2. On dérive les deux membres de l'expression : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On multiplie les deux membres par $f(x)$ écrit pour obtenir $f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ que l'on remplace dans l'intégrale.
4. On remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

ATTENTION

Lors d'un changement de variables réalisé sur une copie, on ne garde qu'une variable dans chaque intégrale écrite : pour chaque symbole $\displaystyle\int$ écrit, une seule variable doit apparaitre, et non un mélange entre l'ancienne et la nouvelle : $\cancel{\displaystyle\int^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}x}$ si on a posé $x = \varphi(t)$.

Exemple 14 : Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. On pose $x = \mathrm{e}^t$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[1\,;\mathrm{e}]$.
2. $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \implies \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^2}{x+1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
4. Lorsque t parcourt $[0\,;1]$, x parcourt $[1\,;\mathrm{e}]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[x - \ln|x+1|\Big]_1^{\mathrm{e}} = e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2.$$

Exemple 15 : Calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $x = \sin(u) \iff u = \arcsin(x)$. La fonction $x \longmapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $\mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u$.
3. $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$.
4. Lorsque x parcourt $[0\,;1]$, $u = \arcsin(x)$ parcourt $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 5 (Calculer une primitive à l'aide d'un changement de variables) :
Pour déterminer une primitive $x \longmapsto \displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable :

1. On réalise un changement de variable dans la primitive de f de la forme

$$t = \varphi(u).$$

   Le changement de variable pour les primitives s'écrit avec la notation intégrale sans borne inférieure $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
2. On trouve une primitive F de $f(\varphi(u))\varphi'(u)$:

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(u)]^{\varphi^{-1}(x)} = \mathrm{F}\Big(\varphi^{-1}(x)\Big).$$

Remarque : On n'oubliera pas de revenir à la variable initiale.

Exemple 16 : Cherchons une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons $u = t + \sqrt{t^2+1}$.

Comme $1 + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi : t \longmapsto \varphi(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ y est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathrm{d}u = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{u}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \implies \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

D'où, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \int^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Proposition 9 (Changement de variables affine) :
Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in \mathrm{I}$ pour tout $t \in [a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 9.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :
Soit $a > 0$.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue et impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, continue et T-périodique ($\mathrm{T} > 0$) alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 : Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{C})$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 17 :

— $\forall n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a x^{2n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = 0$.

— $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemples 18 : Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1. On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{b}\arctan(t) = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

2. On effectue le changement de variables $x = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right).$$

Exercice 11 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

À retenir 1 (En pratique) :
Pour calculer une intégrale sur un segment I, il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \longmapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \longmapsto f(u(x))$.

Par intégration par parties : On remplace le calcul d'une primitive par le calcul d'une autre plus simple après avoir bien vérifié et stipulé que les intégrandes concernées étaient de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Par changement de variable : φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on pose $t = \varphi(u)$, et donc $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et on a :

$$\int^x \varphi'(u) f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u = \int^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } t = \varphi(u).$$

IV/ Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\dfrac{1}{x-a}$,
- $\dfrac{1}{(x-a)^k}$, $k > 1$.

On parlera d'*éléments simples de première espèce*. Et de termes de la forme :

- $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$,
- $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$,
- $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$,
- $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$,

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - ac < 0$.

On parlera d'*éléments simples de deuxième espèce*.

IV.1 Généralités sur la décomposition en éléments simples

— Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $\mathrm{X}-a$, on peut multiplier les deux membres par $\mathrm{X}-a$ puis évaluer l'égalité pour $\mathrm{X}=a$.

Exemple 19 : Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-x-2}$:

— On commence par factoriser le dénominateur afin d'identifier les pôles et leur multiplicité :

$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}.$$

— La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}. \tag{IX.4}$$

— Pour $x \neq -1$, on multiplie l'égalité (IX.4) par $x+1$, ce qui donne : $\dfrac{2x+3}{x-2} = a + \dfrac{b(x+1)}{x-2}$. Expression qui peut alors être évaluée en $x=-1$, le pôle ayant disparu.

On trouve alors $-\dfrac{1}{3} = a$.

— On itère le raisonnement précédent à tous les pôles simples. Ici, en multipliant par $x-2$ et en évaluant en $x=2$.

On trouve $b = \dfrac{7}{3}$.

— **Conclusion :** $f(x) = -\dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{7}{3(x-2)}$ et toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ est de la forme :

$$x \longmapsto -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-2)^7}{x+1}\right|.$$

Remarque : Ce procédé de décomposition lorsque la fonction possède des pôles simples réels se généralise.

Méthode 6 (Décomposition dans le cas de pôles simples réels) :
Soient $r_1, \dots, r_n$ des réels deux à deux distincts et un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$.

Alors, toute primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-r_1)\dots(x-r_n)}$ sur I est de la forme $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k \ln|x-r_k| + \mathrm{Cte}$ où $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont les coefficients de la décomposition en éléments simples de f.

— Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n, le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x-a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 : La décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

En multipliant par $(x-1)^2$, on obtient :

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b(x-1) + \frac{c(x-1)^2}{x-2}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient $a = \dfrac{2}{3}$ facilement mais on perd l'occasion de déterminer b à cause de la présence du facteur $x - 1$.

Remarque : En attendant de disposer de moyens plus efficaces, on pourra toujours évaluer la fonction en $x = 0$ par exemple et identifier b après avoir trouvé le coefficient c.

On trouve successivement $c = -\dfrac{1}{9}$, d'où :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} - \frac{1}{9(x+2)}.$$

Puis, $f(0) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} - b - \dfrac{1}{18} \iff b = \dfrac{1}{9}$.

Conclusion : $f(x) = \dfrac{2}{3(x-1)^2} + \dfrac{1}{9(x-1)} - \dfrac{1}{9(x+2)}$.

— S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable.
— On peut également obtenir une équation en regardant la limite quand x tend vers $\pm\infty$, en multipliant au besoin par x ou x^2 pour faire apparaître des limites non nulles.

Exemple 21 : Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$:

— On commence par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut aller plus loin.

— La théorie nous assure alors que :

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}. \tag{IX.5}$$

— En multipliant par $x+1$, on trouve rapidement $a=\dfrac{1}{3}$.

— Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1=\dfrac{1}{3}+c \iff c=\dfrac{2}{3}$.

Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3+1}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3(x+1)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2+\frac{2}{3}x}{x^2-x+1}\\ 0&=\frac{1}{3}+b\\ b&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

— **Conclusion :** $f(x)=\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$.

Remarque : Rien empêche de faire un petit tour dans $\mathbb{C}$ et de poser α et $\overline{\alpha}$ les racines complexes $x^2-x+1=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

L'égalité (IX.5) s'écrit alors :

$$\frac{1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{bx+c}{(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})}. \tag{IX.6}$$

On multiplie alors les deux membres de (IX.6) par $x-\alpha$ avant d'évaluer en $x=\alpha$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-\overline{\alpha})}=\frac{b\alpha+c}{(\alpha-\overline{\alpha})} &\iff \frac{1}{\alpha+1}=b\alpha+c\\ &\iff 1=(b\alpha+c)(\alpha+1) \iff 1=b\alpha^2+(b+c)\alpha+c\end{aligned}$$

Or, $\alpha^2=\alpha-1$,

$$\iff 1=b(\alpha-1)+(b+c)\alpha+c \iff 1=-b+c+(2b+c)\alpha$$

En identifiant « partie réelle » et « imaginaire » en α :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}1&=&-b+c\\ 0&=&2b+c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}b&=&-\frac{1}{3}\\ c&=&\frac{2}{3}.\end{array}\right.$$

IV.2 Intégration des éléments simples

Primitive de $\dfrac{1}{x-\alpha}$ et $\dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k>1$: *cf.* l' exemple (5) .

Toutes les fonctions du type $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ ou $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$ se ramènent à ce cas là.

Exercice 12 : Déterminer les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur des intervalles appropriés.

Primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (avec $a \neq 0$) : On utilise la forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \text{avec } \Delta = b^2-4ac.$$

Selon le signe de Δ, trois cas se présentent :

Exemple 22 (Cas où $\Delta < 0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On pose $\xi = \dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$ *i.e.* $\mathrm{d}\xi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$:

$$= \frac{4}{3}\int^\xi \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int^\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\xi)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exemple 23 (Cas où $\Delta = 0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+1}$$

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) : Calculons $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1}$.

1. Factoriser le dénominateur : $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$.
2. Déterminer la *décomposition en éléments simples* :

$$\frac{1}{(x-1)(2x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{2x+1}. \tag{IX.7}$$

(a) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(x-1)$ puis en remplaçant x par 1, on obtient : $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(2x+1)$ puis en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\text{D'où,}\quad \frac{1}{2x^2-x-1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2x+1}.$$

3. Utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} &= \int^x \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|2x+1| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|.\end{aligned}$$

Remarques : La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2-x-1}$ n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$ et en 1.

On travaille donc sur l'un des intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, ou $]1\,;+\infty[$[.

— Sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ ou sur $]1\,;+\infty[$, on a $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$.

— Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, on a $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{2x+1}\right)$.

Primitive de $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$ avec $b^2-4c<0$: Comme x^2+bx+c ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut envisager une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$. On commence par faire apparaitre cette forme et on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha t+\beta}{t^2+bt+c}\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2t+\beta}{t^2+bt+c}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\beta - \frac{\alpha\beta}{2}}{t^2+bt+c}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha}{2}\ln|x^2+bx+c| + \frac{\dots}{\dots}\arctan(\dots).\end{aligned}$$

Exercice 13 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \longmapsto \frac{x^2}{x^3+1}$.
2. $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$.

V/ Techniques à connaître

V.1 Primitives de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x)$

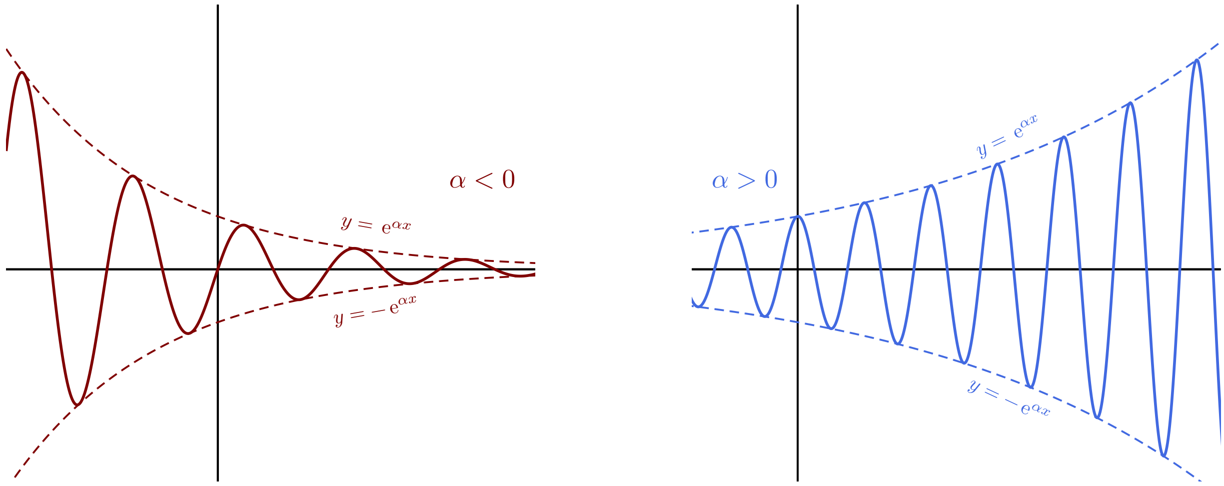

Figure IX.5 – Signaux pseudo-périodiques avec enveloppe exponentielle. La charge d'un condensateur dans un circuit RLC est de ce type.

Méthode 7 (Primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$) :
Pour déterminer une primitive faisant intervenir $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, il sera souvent plus simple de passer par l'intégrale de $x \longmapsto \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}\,b)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.

Exemple 25 :

$$\begin{aligned}\int^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Re}\left(e^{(1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int^x e^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))\right)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Donc, $$\int^x \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\cos(x)+\sin(x)\Big)\,\frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

Exercice 14 : Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

V.2 Polynômes trigonométriques : $x \longmapsto \mathrm{P}\left(\cos(x)\,;\sin(x)\right)$

Méthode 8 (Primitive de $x \longmapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$) :
Pour déterminer des primitives de fonctions de la forme $x \longmapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$ avec p, $q > 0$, on pensera à linéariser l'expression, l'obtention de primitives se faisant ensuite aisément.

Exercice 15 : Calculer une primitive de $f : x \longmapsto \cos^3(x)$.

Il y a plus efficace dans certains cas avec des changements de variables :

Méthode 9 (Primitive de $x \longmapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$) :
- si p est impair, on peut poser $u = \cos(x)$.
- si q est impair, on peut poser $u = \sin(x)$.
- p et q sont impairs, on peut poser $u = \sin(x)$ ou $u = \cos(x)$ ou $u = \cos(2x)$.
- si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver.
- si p et q sont de parité différente on pose le changement de variables égal à la fonction trigonométrique à la puissance paire

$$u = \cos(x) \quad \text{si } p \text{ est pair} \quad \text{et} \quad u = \sin(x) \text{ si } q \text{ est pair.}$$

On est alors ramené à primitiver des fonctions polynomiales qu'il faudra évaluer en $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\cos(2x)$.

Exemples 26 :
1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin^3(t)\,dt = \frac{1}{4}\sin^4(x).$ p et q impairs.
2. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\sin^3(t)\,dt = \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8}\,dt \overset{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8}\int^{\cos(2x)} \frac{u^2-1}{2}\,du$ p et q impairs.
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}\cos^3(2x) - \cos(2x)\right).$$
3. $\displaystyle\int^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt \overset{u=\cos(t)}{=} -\int^{\cos(x)} (u^2-u^4)\,du = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x).$ p pair et q impair.
4. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,dt \overset{u=\sin(t)}{=} \int^{\sin(x)} (1-u^2)\,du = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x).$ p impair et q pair.
5. $$\begin{aligned}\cos^2(t)\sin^4(t) &= \frac{1}{4}\sin^2(2t)\sin^2(t) = \frac{1}{16}(1-\cos(4t))(1-\cos(2t)) \\ &= \frac{1}{16}(1-\cos(2t)-\cos(4t)+\cos(4t)\cos(2t)) \\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos(2t) - \frac{1}{16}\cos(4t) + \frac{1}{32}\cos(6t) + \frac{1}{32}\cos(2t) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos(2t) - \frac{1}{16}\cos(4t) + \frac{1}{32}\cos(6t).\end{aligned}$$

D'où, $\displaystyle\int^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,dt = \frac{1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{1}{16}x.$

Exercice 16 : Déterminer $\int^x \cos^5(t)\,dt$.

Méthode 10 (Primitive de $x \longmapsto \cos(px)\sin(qx)$) :
Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\Big[\sin(p+q)+\sin(p-q)\Big]$.
- $\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}\Big[\cos(p-q)-\sin(p+q)\Big]$.
- $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\Big[\cos(p+q)+\cos(p-q)\Big]$.

Exemple 27 :

$$\int^x \cos(3t)\cos(4t)\,dt = \frac{1}{2}\int^x \Big(\cos(7t)+\cos(-t)\Big)\,dt = \frac{1}{14}\sin(7x)+\frac{1}{2}\sin(x).$$

V.3 fonctions rationnelles trigonométriques : $x \longmapsto \dfrac{P\,(\cos(x)\,;\sin(x))}{Q\,(\cos(x)\,;\sin(x))}$

Pour les primitives du type $\int^x \frac{P(\cos(t),\sin(t))}{Q(\cos(t),\sin(t))}\,dt$ où P, Q sont deux fonctions polynomiales à 2 variables, on peut toujours poser $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour se ramener à l'intégrale d'un quotient de fonctions polynomiales.

On a alors :

$$dt = \frac{2}{1+u^2}\,du, \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Cette méthode fonctionne toujours et ramène le problème à celui de l'intégration d'une fonction rationnelle. On peut cependant affiner un peu et user des règles, dites de Bioche [6] :

Méthode 11 (Règles de Bioche) :

(Hors-Programme)

Dans la suite, f est une expression rationnelle en $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

Ainsi, pour calculer $\int^x f(t)\,dt$, on forme l'intégrande : $\omega(t) = f(t)\,dt$.

- si $\omega(-t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(t)$;
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \sin(t)$;
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \tan(t)$;

- si deux des trois relations précédentes sont vraies (dans ce cas les trois relations sont vraies), un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(2t)$;
- dans les autres cas, le changement de variables $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ s'avère souvent judicieux.

Exemple 28 : Avec le changement de variables $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sin(t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}{1-\dfrac{2u}{1+u^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \left[\frac{2}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1+\sqrt{3}.$$

Exercice 17 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$

V.4 Primitives de $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$

Proposition 10 :
Soient P une fonction polynomiale et α un nombre réel.

Alors $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ admet une primitive de la forme $x \longmapsto \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Méthode 12 (Primitive de $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$) :
Soit n le degré de P. Deux méthodes pour déterminer Q dans la proposition précédente :

1. Chercher Q sous la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ avec les coefficients b_k à déterminer. On calcule la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, et on réinjecte dans l'équation de primitivation pour obtenir
$$\mathrm{Q}' + \alpha \mathrm{Q} = \mathrm{P}.$$
Il suffit alors d'identifier les coefficients dans cette égalité polynomiale pour obtenir un système linéaire en $b_0, \dots, b_n$, que l'on résout. (On trouvera toujours une unique solution).
2. Si le degré de P n'est pas trop grand, on peut aussi effectuer des intégrations par parties successives en dérivant P, puis P′, etc, jusqu'à épuiser le degré de la fonction polynomiale à intégrer.

Exemple 29 : $\displaystyle\int^x t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\left(x^2+2x+2\right)\,\mathrm{e}^{-x}.$

[6]. Ces règles ont été formulées par Charles Bioche lorsqu'il était professeur en mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.