

Primitives et calculs d'intégrales

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 9



- 1 Primitives
- 2 Intégrales
- 3 Techniques élémentaires de calculs d'intégrales
- 4 Primitives de fonctions rationnelles
- 5 Techniques à connaître



*Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus.
Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.*

*Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste
dans sa solitude. Le cosinus répond :*

- « Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »
Et le sinus de répondre :



*Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus.
Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.*

*Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste
dans sa solitude. Le cosinus répond :*

- « Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »
Et le sinus de répondre :
- « Eh bien, intègre-toi ! »



*Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus.
Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.*

*Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste
dans sa solitude. Le cosinus répond :*

- « Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »
Et le sinus de répondre :
- « Eh bien, intègre-toi ! »

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I et J sont des intervalles.



I. Primitives

1 Primitives

- Primitives d'une fonction de la variable réelle
- Primitives des fonctions de référence

2 Intégrales

3 Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

4 Primitives de fonctions rationnelles

5 Techniques à connaître



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Définition 1 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que $F : I \mapsto \mathbb{K}$ est une **primitive de f sur I** , notée $\int^x f(t) dt$, si F est dérivable sur I et de dérivée égale à f :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Définition I :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que $F : I \mapsto \mathbb{K}$ est une **primitive de f sur I** , notée $\int^x f(t) dt$, si F est dérivable sur I et de dérivée égale à f :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Notations : Le symbole $\int^x f(t) dt$, introduit par Leibniz, désigne une primitive quelconque de f .

Elle est donc définie à une constante additive près.

On ne parle donc pas de LA primitive, mais DES primitives de f .



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples I :

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples I :

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.
Donc F est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples I :

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.
Donc F est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples I :

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.
Donc F est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\omega} e^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples I :

■ $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2$ sont des primitives de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

■ La fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc F est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

■ Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.

■ Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\omega} e^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.

■ La fonction S définie par $S(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $S'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Donc S est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $]1; +\infty[$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

ATTENTION

Il existe des fonctions n'admettant pas de primitives comme $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exercice I :

Montrer qu'une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$ est

$$F : x \mapsto \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Proposition I (Unicité et linéarité) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors elles sont égales sur I à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \quad F_1(x) = F_2(x) + c.$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Proposition I (Unicité et linéarité) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors elles sont égales sur I à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \quad F_1(x) = F_2(x) + c.$$

- Si f admet une primitive F sur I , alors elle en admet une infinité. En notant $\mathcal{P}_f$ l'ensemble de ses primitives sur I , on a :

$$\mathcal{P}_f = \{F + c / c \in \mathbb{K}\}.$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Proposition I (Unicité et linéarité) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors elles sont égales sur I à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \quad F_1(x) = F_2(x) + c.$$

- Si f admet une primitive F sur I , alors elle en admet une infinité. En notant $\mathcal{P}_f$ l'ensemble de ses primitives sur I , on a :

$$\mathcal{P}_f = \{F + c / c \in \mathbb{K}\}.$$

- Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{K}$.

Si f admet une primitive F sur I , alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur b en a .



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Remarques :

- Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Remarques :

- Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».
- La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.

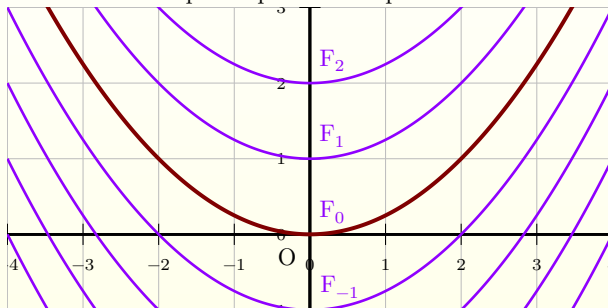


Figure 1 – Primitives de $x \mapsto \frac{x}{2}$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Remarques :

- Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».
- La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.
- Sans condition de valeur en un point, on ne peut donc pas parler de la primitive de f , mais d'UNE primitive de f . En revanche, on peut parler de LA primitive de f prenant une valeur donnée en un point donné.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Remarques :

- Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».
- La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.
- Sans condition de valeur en un point, on ne peut donc pas parler de la primitive de f , mais d'UNE primitive de f . En revanche, on peut parler de LA primitive de f prenant une valeur donnée en un point donné.
- En notant F une primitive de f sur I , la fonction $F_b : x \mapsto F(x) - F(a) + b$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F_b(a) = b$. Les physiciens parlent de **conditions initiales**.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples 2 :

- Les primitives de $x \mapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + Cte.$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples 2 :

- Les primitives de $x \mapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + Cte.$
- La fonction $\ln$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Proposition 2 (Linéarité) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{K}$, $g : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g sur I alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I .

On dit que la primitivation est une opération **linéaire** ou encore **compatible** avec les combinaisons linéaires.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Proposition 2 (Linéarité) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{K}$, $g : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g sur I alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I .

On dit que la primitivation est une opération **linéaire** ou encore **compatible** avec les combinaisons linéaires.

ATTENTION

Pas plus que pour la dérivée, sauf cas particuliers, une primitive d'un produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de fonctions ne s'obtient pas par produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de primitives.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples 3 :

- $f : x \mapsto 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$.

Donc, $x \mapsto x^3 + \frac{1}{7} \sin(7x)$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exemples 3 :

- $f : x \mapsto 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$.

Donc, $x \mapsto x^3 + \frac{1}{7} \sin(7x)$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- Cas des fonctions polynomiales :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ admet pour primitive } x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Corollaire I (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) :

Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

f admet une primitive sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ aussi sur I .



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Corollaire I (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) :

Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

f admet une primitive sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ aussi sur I .

Dans ce cas, si $F_1, F_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ sont à valeurs réelles, alors $F_1 + iF_2$ est une primitive de f si, et seulement si F_1 et F_2 sont, respectivement, des primitives de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Autrement dit, sur I :

$$\operatorname{Re} \left(\int^x f(t) dt \right) = \int^x \operatorname{Re} (f(t)) dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int^x f(t) dt \right) = \int^x \operatorname{Im} (f(t)) dt.$$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Corollaire I (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) :

Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

f admet une primitive sur I si, et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ aussi sur I .

Dans ce cas, si $F_1, F_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ sont à valeurs réelles, alors $F_1 + i F_2$ est une primitive de f si, et seulement si F_1 et F_2 sont, respectivement, des primitives de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Autrement dit, sur I :

$$\operatorname{Re} \left(\int^x f(t) dt \right) = \int^x \operatorname{Re} (f(t)) dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int^x f(t) dt \right) = \int^x \operatorname{Im} (f(t)) dt.$$

Exemple 4 :

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i \frac{x^2}{2}$.

I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

❶ $x \mapsto x^2 + i \cos(x).$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

❶ $x \mapsto x^2 + i \cos(x).$ ❷ $x \mapsto e^{-ix}$



I. Primitives

1. Primitives d'une fonction de la variable réelle

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

❶ $x \mapsto x^2 + i \cos(x).$

❷ $x \mapsto e^{-ix}$

❸ $x \mapsto e^x \cos(x)$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

- Fonctions polynomiales et rationnelles :

$f(x)$	$F(x)$	I
0	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
λ	λx	
x	$\frac{1}{2}x^2$	
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty ; 0[\text{ ou }] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{t-\alpha} dt = \ln |x-\alpha| = \begin{cases} \ln(x-\alpha) & \text{si } [.;x] \subset]\alpha; +\infty[\\ \ln(\alpha-x) & \text{si } [.;x] \subset]-\infty; \alpha[. \end{cases}$$

I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x - \alpha}$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{t - \alpha} dt = \ln |x - \alpha| = \begin{cases} \ln(x - \alpha) & \text{si } [.; x] \subset]\alpha; +\infty[\\ \ln(\alpha - x) & \text{si } [.; x] \subset]-\infty; \alpha[. \end{cases}$$

ATTENTION

$$\int^x \frac{1}{t - i} dt = \int^x \frac{t + i}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + i \arctan(x).$$

I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x - \alpha}$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{t - \alpha} dt = \ln |x - \alpha| = \begin{cases} \ln(x - \alpha) & \text{si } [.; x] \subset]\alpha; +\infty[\\ \ln(\alpha - x) & \text{si } [.; x] \subset]-\infty; \alpha[. \end{cases}$$

ATTENTION

$$\int^x \frac{1}{t - i} dt = \int^x \frac{t + i}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + i \arctan(x).$$

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^k}$, $k > 1$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α , on a :

$$\int^x \frac{1}{(t - \alpha)^k} dt = -\frac{1}{k - 1} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}}.$$

I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Remarque : Pour les polynômes x^n ou les fonctions rationnelles $\frac{1}{x^n}$, une seule formule suffit à condition que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$:

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$
		$\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Remarque : Pour les polynômes x^n ou les fonctions rationnelles $\frac{1}{x^n}$, une seule formule suffit à condition que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$:

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$
		$\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$

Exemple 6 :

Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^8} = x^{-8}$ est $F(x) = -\frac{1}{7x^7}$.



■ Fonctions usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	I
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$



■ Fonctions circulaires :

$f(x)$	$F(x)$	I
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1; 1[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$] -a; a[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	



■ Fonctions hyperboliques :

$f(x)$	$F(x)$	I
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$]1; +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$] -1; 1[$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$	$] -a; a[$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Remarques :

- Ces tableaux ne donnent qu'UNE primitive de la fonction f . Pour obtenir toutes les primitives de f , il suffit de rajouter une constante c à F .



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Remarques :

- Ces tableaux ne donnent qu'UNE primitive de la fonction f . Pour obtenir toutes les primitives de f , il suffit de rajouter une constante c à F .
- Il est tout à fait hors-programme de vous dire que les fonctions définies par $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{1-x^2}$ sont, respectivement, les dérivées des fonctions réciproques de sh, ch et th notées argsh, argch et argth. C'est dommage ! Cela aurait mis un peu plus d'homogénéité dans les formules de primitives.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Méthode I :

D'une manière générale, pour trouver une primitive F d'une fonction f , on revisite son tableau des fonctions dérivées à l'envers et on conjecture la forme de la fonction F puis on complète avec des coefficients multiplicateurs afin de simplifier ceux qui apparaîtraient en dérivant la fonction F .



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Proposition 3 :

Soient $u : I \mapsto J$ et $F : J \mapsto \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

$F \circ u$ est une primitive de $u' \times (F' \circ u)$ sur I .



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Proposition 3 :

Soient $u : I \mapsto J$ et $F : J \mapsto \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

$F \circ u$ est une primitive de $u' \times (F' \circ u)$ sur I .

Corollaire 2 :

Pour a, b deux réels avec $a \neq 0$ tels que $ax + b \in J$ pour tout $x \in I$, si F est primitive de f sur J , alors $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$ sur I .



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 1 :

- Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 1 :

- Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax + b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 1 :

- Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax + b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 1 :

- Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax + b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax + b}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \ln |ax + b|$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0$: $\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$u' u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]-1; 1[$
$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\ln(u + \sqrt{u^2-1})$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]1; +\infty[$
$\frac{u'}{1-u^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$	$\forall x \in I \quad u(x) \in]-1; 1[$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin(u)$	
$u' \sin u$	$-\cos(u)$	
$\frac{u'}{u^2 + 1}$	$\arctan(u)$	
$\frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$	$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$	



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 8 :

- $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 8 :

- $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto -3 e^{-3x-1}$ est du type $u' e^u$ de primitive e^u .

Donc, $x \mapsto e^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 8 :

- $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u' u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto -3 e^{-3x-1}$ est du type $u' e^u$ de primitive e^u .

Donc, $x \mapsto e^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$ est du type $\frac{u'}{u}$ de primitive $\ln|u|$.

Donc, $x \mapsto \ln|x^2 - x - 2|$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exemples 8 :

- $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^5$ est du type $u' u^5$ de primitive $\frac{u^6}{6}$.

Donc, $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto -3 e^{-3x-1}$ est du type $u' e^u$ de primitive e^u .

Donc, $x \mapsto e^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

- $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$ est du type $\frac{u'}{u}$ de primitive $\ln|u|$.

Donc, $x \mapsto \ln|x^2 - x - 2|$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

- $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$.

Donc, $x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

- Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile ^[1]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos u, e^u$!

ATTENTION

[2]. Par exemple, la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

ATTENTION

- Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile ^[1]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos u, e^u$!

- Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (cf. le paragraphe (V)).

[2]. Par exemple, la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

ATTENTION

- Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile ^[1]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos u, e^u$!

- Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (cf. le paragraphe (V)).
- Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale ^[2].

[2]. Par exemple, la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

ATTENTION

- Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile^[1]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos u, e^u$!

- Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (cf. le paragraphe (V)).
- Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale^[2].
- Contrairement à la dérivation qui est toujours techniquement possible, la recherche de primitives s'avère donc parfois impossible !...

[2]. Par exemple, la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

$$\textcircled{1} \int e^{4t+3} dt$$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int^x e^{4t+3} dt$

❷ $\int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int^x e^{4t+3} dt$

❷ $\int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$

❸ $\int^x (3t - 1)(3t^2 - 2t + 3)^3 dt$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int^x e^{4t+3} dt$

❷ $\int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$

❸ $\int^x (3t - 1)(3t^2 - 2t + 3)^3 dt$

❹ $\int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$ sur $]1; +\infty[$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int^x e^{4t+3} dt$

❷ $\int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$

❸ $\int^x (3t - 1)(3t^2 - 2t + 3)^3 dt$

❹ $\int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$ sur $]1; +\infty[$

❺ $\int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt$ sur $] -3; +\infty[$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

$$\textcircled{1} \int^x e^{4t+3} dt$$

$$\textcircled{2} \int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\textcircled{3} \int^x (3t - 1)(3t^2 - 2t + 3)^3 dt$$

$$\textcircled{4} \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\textcircled{5} \int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$\textcircled{6} \int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \text{ sur }]0; \pi[$$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

$$\textcircled{1} \int^x e^{4t+3} dt$$

$$\textcircled{2} \int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\textcircled{3} \int^x (3t - 1)(3t^2 - 2t + 3)^3 dt$$

$$\textcircled{4} \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\textcircled{5} \int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$\textcircled{6} \int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \text{ sur }]0; \pi[$$

$$\textcircled{7} \int^x \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} dt \text{ sur }]0; +\infty[$$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

$$\textcircled{1} \int^x e^{4t+3} dt$$

$$\textcircled{2} \int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\textcircled{3} \int^x (3t-1)(3t^2-2t+3)^3 dt$$

$$\textcircled{4} \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\textcircled{5} \int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$\textcircled{6} \int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \text{ sur }]0; \pi[$$

$$\textcircled{7} \int^x \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} dt \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\textcircled{8} \int^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$$



I. Primitives

2. Primitives des fonctions de référence

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes :

$$\textcircled{1} \int^x e^{4t+3} dt$$

$$\textcircled{2} \int^x \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\textcircled{3} \int^x (3t-1)(3t^2-2t+3)^3 dt$$

$$\textcircled{4} \int^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\textcircled{5} \int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3} dt \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$\textcircled{6} \int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt \text{ sur }]0; \pi[$$

$$\textcircled{7} \int^x \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} dt \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\textcircled{8} \int^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$$

$$\textcircled{9} \int^x \frac{1}{1+i+t} dt$$



II. Intégrales

1 Primitives

2 Intégrales

- Notions d'intégrales
- Lien avec les primitives

3 Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

4 Primitives de fonctions rationnelles

5 Techniques à connaître



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

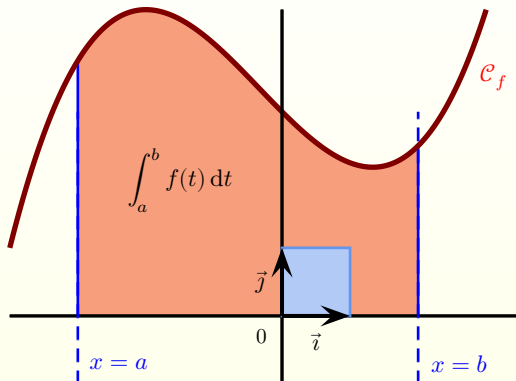


Figure 1 – $\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire algébrique du domaine **orangé** en unité d'**aire**.



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

L'idée est de subdiviser $[a; b]$ suivant des bases de plus en plus fines

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

et de faire la somme des aires des rectangles obtenus avec des valeurs de f sur cette subdivision : c'est la méthode des rectangles qui conduit à l'approximation où $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(t_k).$$

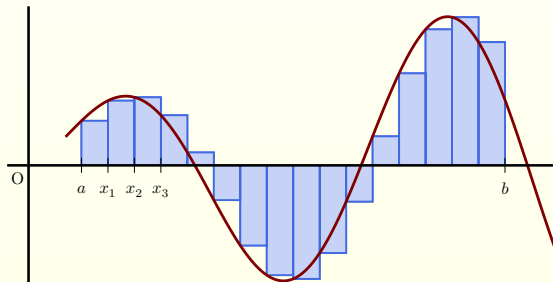


Figure 2 – Méthode des rectangles (à gauche).



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

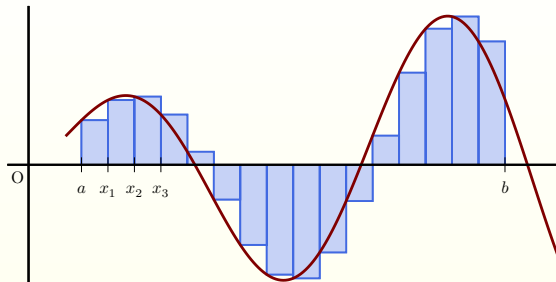


Figure 2 – Méthode des rectangles (à gauche).

On montre ensuite que, sous l'hypothèse f continue sur $[a; b]$, $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une limite indépendante de la subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ et

les $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. C'est cette limite qu'on pose comme étant $\int_a^b f(t) dt$:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f).$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{Méthode des rectangles à gauche})$$

(1)



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{Méthode des rectangles à gauche}) \quad (1)$$

Exemples 9 :

Soit f une fonction constante sur $[a; b]$ égale à $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = \lambda(b-a).$$

Dans le cas où $a \leq b$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on retrouve l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ .



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{Méthode des rectangles à gauche}) \quad (1)$$

Exemples 9 :

Soit f une fonction constante sur $[a; b]$ égale à $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = \lambda(b-a).$$

Dans le cas où $a \leq b$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on retrouve l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ .

L'expression dans le second membre de (1) porte le nom de **somme de Riemann** et permet, notamment, de prolonger la notion d'intégrale aux fonctions de la valeur réelle à valeurs complexes.



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Définition 2 :

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

■ si $a \leq b$, on définit
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Définition 2 :

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

- si $a \leq b$, on définit
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$
- si $b \leq a$ on pose
$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Définition 2 :

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

- si $a \leq b$, on définit $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$.
- si $b \leq a$ on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

En particulier, cette définition entraîne :

$$\forall a \in I, \int_a^a f(t) dt = 0.$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Vocabulaire :

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ ».



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Vocabulaire :

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ ».
- a et b s'appellent les **bornes d'intégration**.



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Vocabulaire :

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ ».
- a et b s'appellent les **bornes d'intégration**.
- La fonction à intégrer s'appelle l'**intégrande**.



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Vocabulaire :

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ ».
- a et b s'appellent les **bornes d'intégration**.
- La fonction à intégrer s'appelle l'**intégrande**.
- Le t dans « dt » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(z) dz = \dots$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Théorème 4 :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt.$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Théorème 4 :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$

Relation de Chasles : $\forall c \in I, \quad \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Théorème 4 :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a, b \in I$.

Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$

Relation de Chasles : $\forall c \in I, \quad \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$

Inégalité triangulaire : si $a \leq b, \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

À l'aide de la relation de Chasles, on démontre facilement que :

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^a f(t) \, dt = \int_a^a f(t) \, dt = 0 \implies \int_b^a f(t) \, dt = - \int_a^b f(t) \, dt$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

À l'aide de la relation de Chasles, on démontre facilement que :

$$\textcircled{1} \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0 \implies \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

$\textcircled{2}$ Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{C})$ et $a \in I$.

$$\begin{aligned} \text{Si } F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ alors } \forall x, y \in I, F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^y f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^y f(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$



II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

Exercice 4 :

À l'aide de l'inégalité triangulaire, pour tout x réel, montrer que $|\sin(x)| \leq |x|$.



Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Stricte positivité : Si $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0 \text{ sur } [a; b].$$

Si f est à valeurs strictement positives sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$ alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.



Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Stricte positivité : Si $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0 \text{ sur } [a; b].$$

Si f est à valeurs strictement positives sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$ alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Croissance : Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a; b]$ alors : $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

En particulier, si $m \leq f(t) \leq M$ pour tout $t \in [a; b]$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

II. Intégrales

1. Notions d'intégrales

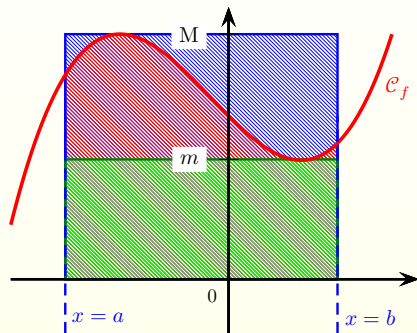


Figure 3 – D'un point de vue graphique, l'aire $\int_a^b f(t) dt$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ne peut donc faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Ce qui suit montre le lien de réciprocity entre la dérivation et l'intégration de fonctions, et fournit un moyen effectif de calculer une intégrale à l'aide de primitives, et réciproquement.

Théorème 6 (Fondamental) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in I$.

❶ $F_a : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Ce qui suit montre le lien de réciprocity entre la dérivation et l'intégration de fonctions, et fournit un moyen effectif de calculer une intégrale à l'aide de primitives, et réciproquement.

Théorème 6 (Fondamental) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in I$.

- ❶ $F_a : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$$

- ❷ Pour toute primitive F de f sur I : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, noté $\left[F(t)\right]_a^b$.

En particulier, la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F .



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

ATTENTION

Quand on calcule une primitive $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ d'une fonction continue f , le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive.

La notation des intégrales sans borne inférieure nous permet de faire du calcul À CONSTANCE ADDITIVE PRÈS. Le symbole d'égalité $=$ qui y figure n'est pas un vrai symbole d'égalité, c'est plutôt un symbole de congruence $\equiv$ modulo l'ensemble des fonctions constantes.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exemples 10 :

$$\blacksquare \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

En particulier, reprenez que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exemples 10 :

$$\blacksquare \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

En particulier, reprenez que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

- Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exemples 10 :

■ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1}.$

En particulier, reprenez que, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

- Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,

• $\int_0^\pi \cos(t) \sin^3(t) dt = \left[\frac{1}{4} \sin^4(t) \right]_0^\pi = 0.$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exemples 10 :

$$\blacksquare \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

En particulier, reprenez que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

- Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,

- $\int_0^\pi \cos(t) \sin^3(t) dt = \left[\frac{1}{4} \sin^4(t) \right]_0^\pi = 0.$
- $\int_0^1 t e^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{t^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exercice 5 :

Déterminer $\int e^{-t} \sin(t) dt$.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

À l'instar de la démonstration précédente, la croissance de l'intégrale est une propriété puissante dont nous nous servirons beaucoup en fin d'année. À ce stade, elle nous permet, par exemple, de redémontrer élégamment nos petites inégalités classiques de convexité.

Exemple II :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Corollaire 3 :

Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I .



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Corollaire 3 :

Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I .

Autrement dit, soit f une fonction continue sur un intervalle I , la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I pour tout $a \in I$. C'est LA primitive de f sur I qui s'annule en a .

$$\forall x \in I, \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exercice 6 :

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : J \mapsto \mathbb{R}$ continue et $a, b : I \mapsto J$ dérivables.

- ❶ Montrer que $H : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exercice 6 :

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : J \mapsto \mathbb{R}$ continue et $a, b : I \mapsto J$ dérivables.

- ❶ Montrer que $H : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.
- ❷ Étudier la fonction définie par $x \mapsto \int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t) dt$
(définition, dérivabilité, variations).



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Exemple 12 :

$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en zéro.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- 1 On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.

❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- ❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
- ❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ❸ C'est tout !...



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- ❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
- ❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ❸ C'est tout !...



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- ❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
- ❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ❸ C'est tout !...

Exercice 1 :

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

❶ $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t} dt$



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- ❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
- ❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ❸ C'est tout !...

Exercice 1 :

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

❶ $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t} dt$

❷ $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$

II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Méthode 2 :

Soit $\int_a^b f(t) dt$ une intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ à calculer.

- ❶ On cherche une primitive F de f sur $[a; b]$.
- ❷ On écrit et calcule : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ❸ C'est tout !...

Exercice 1 :

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

❶ $\int_{-1}^0 \frac{1}{1-t} dt$

❷ $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$

❸ $\int_0^\pi e^{\cos(t)} \sin(t) dt$

II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :

Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : A \mapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A .



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :

Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : A \mapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A .

On note $\mathcal{C}^1(A; B)$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :

Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : A \mapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A .

On note $\mathcal{C}^1(A; B)$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

Il est clair que $\mathcal{C}^1(A; B)$ est stable par somme, produit. Stable par quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On transposera également les propriétés de stabilité par composition.



II. Intégrales

2. Lien avec les primitives

Définition 3 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :

Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : A \mapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A .

On note $\mathcal{C}^1(A; B)$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

Il est clair que $\mathcal{C}^1(A; B)$ est stable par somme, produit. Stable par quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On transposera également les propriétés de stabilité par composition.

Corollaire 4 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{C})$.

Alors, pour tous réels $a, b \in I$,
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1 Primitives

2 Intégrales

3 **Techniques élémentaires de calculs d'intégrales**

- Intégration par parties
- Changement de variable

4 Primitives de fonctions rationnelles

5 Techniques à connaître



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

ATTENTION

En accord avec le théorème (6), avant toute manipulation d'intégrale ou de primitive, on s'assurera de l'existence de l'objet en précisant bien que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration *i.e.* on commencera toujours par écrire :

La fonction ... est continue^[3] sur l'intervalle ... et on a ...

[3]. ou de classe $\mathcal{C}^1$ pour une intégration par parties.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Proposition 7 (Intégration par parties) :

Soient u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

En terme de primitives, on écrira simplement :

$$\int^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Exercice 8 :

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

❶ $x \mapsto \ln(x).$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Exercice 8 :

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

❶ $x \mapsto \ln(x).$

❷ $x \mapsto \arctan(x).$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Exercice 8 :

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

❶ $x \mapsto \ln(x).$

❷ $x \mapsto \arctan(x).$

❸ $x \mapsto \arcsin(x).$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

ATTENTION

Bien vérifier que tous les facteurs du produit sont bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Une rédaction correcte commencera toujours en le précisant même rapidement :

« Les fonction $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, on effectue une IPP et on a... »

La seule difficulté avec les IPP est de choisir qui sera u et qui sera v' !



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Méthode 3 :

La méthode « A.L.P.E.S » donc consiste à toujours dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier avec :

A - pour arctan, arcsin,
arccos, ...

L - pour Logarithmes

P - pour Polynômes

E - pour Exponentielles

S - pour sin, cos, tan,
sh, ch, ...



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Exemples B :

Si on veut intégrer $x \sin(x)$, on va dériver le polynôme et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille **P** des polynômes vient avant la famille **S** des fonctions trigonométriques :

$$\int^x t \sin(t) dt = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t)) dt = -x \cos(x) + \sin(x).$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

1. Intégration par parties

Exemples B :

Si on veut intégrer $x \sin(x)$, on va dériver le polynôme et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille **P** des polynômes vient avant la famille **S** des fonctions trigonométriques :

$$\int^x t \sin(t) dt = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t)) dt = -x \cos(x) + \sin(x).$$

De même, pour intégrer $2x \arctan(x)$, on va commencer par dériver l'**A**rctan et intégrer le polynôme **P** :

$$\int^x 2t \arctan(t) dt = (1+x^2) \arctan(x) - \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = (1+x^2) \arctan(x) - x.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Parfois les primitives usuelles et l'intégration par parties ne suffisent pas à calculer l'intégrale.

On va réécrire l'intégrale différemment en « changeant la variable » de manière à faire apparaître, si possible, une fonction plus facile à primitiver.

Proposition 8 (Changement de variable) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et $\varphi : [a; b] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ à valeurs dans I . Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 4 :

En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

- 1 On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 4 :

En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

- ❶ On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
- ❷ On dérive les deux membres de l'expression : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $dx = \varphi'(t) dt$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 4 :

En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

- ❶ On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
- ❷ On dérive les deux membres de l'expression : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $dx = \varphi'(t) dt$.
- ❸ On multiplie les deux membres par $f(x)$ écrit pour obtenir $f(x) dx = f(\varphi(t)) dt$ que l'on remplace dans l'intégrale.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 4 :

En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

- ❶ On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
- ❷ On dérive les deux membres de l'expression : $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $dx = \varphi'(t) dt$.
- ❸ On multiplie les deux membres par $f(x)$ écrit pour obtenir $f(x) dx = f(\varphi(t)) dt$ que l'on remplace dans l'intégrale.
- ❹ On remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

ATTENTION

Lors d'un changement de variable réalisé sur une copie, on ne garde qu'une variable dans chaque intégrale écrite : pour chaque symbole $\int$ écrit, une seule variable doit apparaitre, et non un mélange entre l'ancienne et la nouvelle :

~~$\int^x f(\varphi(t)) dx$~~ si on a posé $x = \varphi(t)$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 14 :

Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

- On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 14 :

Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

❶ On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.

❷ $dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 14 :

Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

❶ On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.

❷ $dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$.

❸ $\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \frac{x^2}{x + 1} \frac{dx}{x} = \frac{x}{x + 1} dx$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 14 :

Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

- ❶ On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.
- ❷ $dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$.
- ❸ $\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \frac{x^2}{x + 1} \frac{dx}{x} = \frac{x}{x + 1} dx$.
- ❹ Lorsque t parcourt $[0; 1]$, x parcourt $[1; e]$ dans ce sens.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 14 :

Calculons $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$.

❶ On pose $x = e^t$. La fonction $t \mapsto e^t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[1; e]$.

❷ $dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$.

❸ $\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \frac{x^2}{x + 1} \frac{dx}{x} = \frac{x}{x + 1} dx$.

❹ Lorsque t parcourt $[0; 1]$, x parcourt $[1; e]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \int_1^e \frac{x}{x + 1} dx = \int_1^e 1 - \frac{1}{x + 1} dx = \left[x - \ln|x + 1| \right]_1^e = e - \ln(e + 1) - 1 + \ln 2.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 15 :

Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

- ④ On pose $x = \sin(u) \iff u = \arcsin(x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 15 :

Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

- ❶ On pose $x = \sin(u) \iff u = \arcsin(x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- ❷ $dx = \cos(u) du$.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 15 :

Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

- ❶ On pose $x = \sin(u) \iff u = \arcsin(x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

❷ $dx = \cos(u) du$.

❸ $\sqrt{1-x^2} dx = \cos^2(u) du$.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 15 :

Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

- ❶ On pose $x = \sin(u) \iff u = \arcsin(x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

❷ $dx = \cos(u) du$.

❸ $\sqrt{1-x^2} dx = \cos^2(u) du$.

- ❹ Lorsque x parcourt $[0; 1]$, $u = \arcsin(x)$ parcourt $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 5 :

Pour déterminer une primitive $x \mapsto \int^x f(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable :

- 1 On réalise un changement de variable dans la primitive de f de la forme

$$t = \varphi(u).$$

Le changement de variable pour les primitives s'écrit avec la notation

intégrale sans borne inférieure
$$\int^x f(t) dt = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Remarque : On n'oubliera pas de revenir à la variable initiale.

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Méthode 5 :

Pour déterminer une primitive $x \mapsto \int^x f(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable :

- 1 On réalise un changement de variable dans la primitive de f de la forme

$$t = \varphi(u).$$

Le changement de variable pour les primitives s'écrit avec la notation

intégrale sans borne inférieure
$$\int^x f(t) dt = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

- 2 On trouve une primitive F de $f(\varphi(u))\varphi'(u)$:

$$\int^x f(t) dt = [F(u)]^{\varphi^{-1}(x)} = F\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Remarque : On n'oubliera pas de revenir à la variable initiale.

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 16 :

Cherchons une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 16 :

Cherchons une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons $u = t + \sqrt{t^2 + 1}$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 16 :

Cherchons une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons $u = t + \sqrt{t^2 + 1}$.

Comme $1+x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$du = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \frac{u}{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \frac{du}{u} = dt.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemple 16 :

Cherchons une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons $u = t + \sqrt{t^2 + 1}$.

Comme $1+x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$du = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \frac{u}{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \frac{du}{u} = dt.$$

$$\text{D'où, } \int^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int^{\varphi(x)} \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{ sur } \mathbb{R}.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

$$① \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

$$\textcircled{1} \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt$$

$$\textcircled{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6 - t^2}} dt$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

$$\textcircled{1} \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3 + e^{-t}} dt$$

$$\textcircled{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6 - t^2}} dt$$

$$\textcircled{3} \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t - t^2}} dt$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Proposition 9 (Changement de variable affine) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in I$ pour tout $t \in [a; b]$, alors
$$\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) \, dt.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Proposition 9 (Changement de variable affine) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in I$ pour tout $t \in [a; b]$, alors $\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$.

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soit $a > 0$.

❶ Si $f : [-a; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Proposition 9 (Changement de variable affine) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in I$ pour tout $t \in [a; b]$, alors $\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$.

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soit $a > 0$.

- ❶ Si $f : [-a; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- ❷ Si $f : [-a; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Proposition 9 (Changement de variable affine) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in I$ pour tout $t \in [a; b]$, alors
$$\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x) dx = \alpha \int_a^b f(\alpha t + \beta) dt.$$

Corollaire 5 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :

Soit $a > 0$.

❶ Si $f : [-a; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors
$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

❷ Si $f : [-a; a] \mapsto \mathbb{C}$ est continue et impaire alors
$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

❸ Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, continue et T -périodique ($T > 0$) alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice 10 :

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C})$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)t) dt.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemples 17 :

$$\blacksquare \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } a > 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx \text{ et } \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemples 17 :

$$\blacksquare \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } a > 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx \text{ et } \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0.$$

$$\blacksquare \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) dt = 0.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemples 18 :

Primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

❶ On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $dx = b dt$ et on a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{b} \arctan(t) = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exemples 18 :

Primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

- ❶ On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $dx = b dt$ et on a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{b} \arctan(t) = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

- ❷ On effectue le changement de variables $x = bt$, d'où $dx = b dt$ et on a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right).$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice II :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\textcircled{1} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice II :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\textcircled{1} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

$$\textcircled{2} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^6}}{x}.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

Exercice II :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$\textcircled{1} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

$$\textcircled{2} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^6}}{x}.$$

$$\textcircled{3} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}.$$



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

À retenir (En pratique) :

Pour calculer une intégrale sur un segment I , il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \mapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \mapsto f(u(x))$.



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

À retenir (En pratique) :

Pour calculer une intégrale sur un segment I , il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \mapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \mapsto f(u(x))$.

Par intégration par parties : On remplace le calcul d'une primitive par le calcul d'une autre plus simple après avoir bien vérifié et stipulé que les intégrandes concernées étaient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .



III. Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

2. Changement de variable

À retenir (En pratique) :

Pour calculer une intégrale sur un segment I , il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \mapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \mapsto f(u(x))$.

Par intégration par parties : On remplace le calcul d'une primitive par le calcul d'une autre plus simple après avoir bien vérifié et stipulé que les intégrandes concernées étaient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Par changement de variable : φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , on pose $t = \varphi(u)$, et donc $dt = \varphi'(u) du$, et on a :

$$\int_a^x \varphi'(u)f(\varphi(u)) du = \int^{\varphi(x)} f(t) dt \text{ avec } t = \varphi(u).$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1 Primitives

2 Intégrales

3 Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

4 Primitives de fonctions rationnelles

- Généralités sur la décomposition en éléments simples
- Intégration des éléments simples

5 Techniques à connaître



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\frac{1}{x - a},$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\frac{1}{x - a},$

- $\frac{1}{(x - a)^k}, \quad k > 1.$

On parlera d'**éléments simples de première espèce**.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

$$\bullet \frac{1}{x-a}, \qquad \bullet \frac{1}{(x-a)^k}, \quad k > 1.$$

On parlera d'**éléments simples de première espèce**. Et de termes de la forme :

$$\bullet \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\frac{1}{x-a},$
- $\frac{1}{(x-a)^k}, \quad k > 1.$
- $\frac{1}{ax^2+bx+c},$
- $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c},$

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\frac{1}{x-a},$

- $\frac{1}{(x-a)^k}, \quad k > 1.$

- $\frac{1}{ax^2 + bx + c},$

- $\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^k},$

- $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c},$

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

Considérant une fonction rationnelle sous sa forme générale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fonction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\frac{1}{x-a},$

- $\frac{1}{(x-a)^k}, \quad k > 1.$

- $\frac{1}{ax^2+bx+c},$

- $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k},$

- $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c},$

- $\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^k},$

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

On parlera d'**éléments simples de deuxième espèce**.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$.

Exemple 19 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-2}$:

- On commence par factoriser le dénominateur afin d'identifier les pôles et leur multiplicité :

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}.$$

IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$.

Exemple 19 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-2}$:

- On itère le raisonnement précédent à tous les pôles simples. Ici, en multipliant par $x - 2$ et en évaluant en $x = 2$.

On trouve $b = \frac{7}{3}$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$.

Exemple 19 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-2}$:

- **Conclusion :** $f(x) = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$ et toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ est de la forme :

$$x \mapsto -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{7}{3} \ln|x-2| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x-2)^7}{x+1} \right|.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Remarque : Ce procédé de décomposition lorsque la fraction possède des pôles simples réels se généralise.

Méthode 6 :

Soient $r_1, \dots, r_n$ des réels deux à deux distincts et un intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$.

Alors, toute primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(x - r_1) \dots (x - r_n)}$ sur I est de la forme

$x \mapsto \sum_{k=1}^n A_k \ln |x - r_k| + \text{Cte}$ où $A_1, \dots, A_n$ sont les coefficients de la décomposition en éléments simples de f .



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x - a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 :

La décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x - a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 :

La décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

En multipliant par $(x-1)^2$, on obtient :

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b(x-1) + \frac{c(x-1)^2}{x-2}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient $a = \frac{2}{3}$ facilement mais on perd l'occasion de déterminer b à cause de la présence du facteur $x - 1$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x - a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 :

Remarque : En attendant de disposer de moyens plus efficaces, on pourra toujours évaluer la fraction en $x = 0$ par exemple et identifier b après avoir trouvé le coefficient c .

On trouve successivement $c = -\frac{1}{9}$, d'où :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} - \frac{1}{9(x+2)}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x - a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 :

Remarque : En attendant de disposer de moyens plus efficaces, on pourra toujours évaluer la fraction en $x = 0$ par exemple et identifier b après avoir trouvé le coefficient c .

On trouve successivement $c = -\frac{1}{9}$, d'où :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} - \frac{1}{9(x+2)}.$$

$$\text{Puis, } f(0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - b - \frac{1}{18} \iff b = \frac{1}{9}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n , le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x - a)^n$ et en identifiant pour $x = a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 :

Conclusion :
$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable.
- On peut également obtenir une équation en regardant la limite quand x tend vers $\pm\infty$, en multipliant au besoin par x ou x^2 pour faire apparaître des limites non nulles.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$:

- On commence par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut aller plus loin.

- La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}. \quad (3)$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$:

- On commence par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut aller plus loin.

- La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}. \quad (3)$$

- En multipliant par $x + 1$, on trouve rapidement $a = \frac{1}{3}$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$:

- Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = \frac{1}{3} + c \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

Décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}$:

- Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = \frac{1}{3} + c \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$.

Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3(x+1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 + \frac{2}{3}x}{x^2 - x + 1} \\ 0 &= \frac{1}{3} + b \\ b &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

- Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = \frac{1}{3} + c \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$.

Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3(x+1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2 + \frac{2}{3}x}{x^2 - x + 1} \\ 0 &= \frac{1}{3} + b \\ b &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- **Conclusion :** $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2 - x + 1)}.$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

Remarque : Rien empêche de faire un petit tour dans $\mathbb{C}$ et de poser α et $\bar{\alpha}$ les racines complexes $x^2 - x + 1 = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$.

L'égalité (3) s'écrit alors :

$$\frac{1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx+c}{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}.$$

On multiplie alors les deux membres de l'équation par $x - \alpha$ avant d'évaluer en $x = \alpha$.
On trouve alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-\bar{\alpha})} &= \frac{b\alpha+c}{(\alpha-\bar{\alpha})} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha+1} = b\alpha+c \\ &\Leftrightarrow 1 = (b\alpha+c)(\alpha+1) \Leftrightarrow 1 = b\alpha^2 + (b+c)\alpha + c\end{aligned}$$

Or, $\alpha^2 = \alpha - 1$,

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 1 &= b(\alpha - 1) + (b+c)\alpha + c \\ \Leftrightarrow 1 &= -b + c + (2b+c)\alpha\end{aligned}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

1. Généralités sur la décomposition en éléments simples

Exemple 21 :

On multiplie alors les deux membres de l'équation par $x - \alpha$ avant d'évaluer en $x = \alpha$.
On trouve alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha - \bar{\alpha})} &= \frac{b\alpha + c}{(\alpha - \bar{\alpha})} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha + 1} = b\alpha + c \\ \Leftrightarrow 1 &= (b\alpha + c)(\alpha + 1) \Leftrightarrow 1 = b\alpha^2 + (b + c)\alpha + c\end{aligned}$$

Or, $\alpha^2 = \alpha - 1$,

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 1 &= b(\alpha - 1) + (b + c)\alpha + c \\ \Leftrightarrow 1 &= -b + c + (2b + c)\alpha\end{aligned}$$

En identifiant « partie réelle » et « imaginaire » en α :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= & -b + c \\ 0 &= & 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= & -\frac{1}{3} \\ c &= & \frac{2}{3}. \end{cases}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Primitive de $\frac{1}{x-\alpha}$ et $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k > 1$: cf. l'exemple (5) .

Toutes les fonctions du type $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ ou $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ se ramènent à ce cas là.

Exercice 12 :

Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur des intervalles appropriés.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (avec $a \neq 0$) : On utilise la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Selon le signe de Δ , trois cas se présentent.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 22 (Cas où $\Delta < 0$) :

$$\int^x \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

On pose $\xi = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ i.e. $d\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$:

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} \int^\xi \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int^\xi \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\xi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 23 (Cas où $\Delta = 0$) :

$$\int^x \frac{dt}{4t^2 + 4t + 1} = \int^x \frac{dt}{(2t + 1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2x + 1}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) :

Calculons $\int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1}$.

④ Factoriser le dénominateur : $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) :

- ❶ Déterminer la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(x-1)(2x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{2x+1}. \quad (3)$$

- ❶ En multipliant les deux membres par $(x-1)$ puis en remplaçant x par 1, on obtient : $\alpha = \frac{1}{3}$.
- ❷ En multipliant les deux membres par $(2x+1)$ puis en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\text{D'où, } \frac{1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2x+1}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) :

④ Utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{2t^2 - t - 1} &= \int^x \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |2x+1| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{2x+1} \right|.\end{aligned}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) :

Remarques : La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2 - x - 1}$ n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$ et en 1.

On travaille donc sur l'un des intervalles $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $]-\frac{1}{2}; 1[$, ou $]1; +\infty[$.

- Sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ ou sur $]1; +\infty[$, on a $\int \frac{dt}{2t^2 - t - 1} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)$.
- Sur $]-\frac{1}{2}; 1[$, on a $\int \frac{dt}{2t^2 - t - 1} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1-x}{2x+1} \right)$.



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Primitive de $\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$ avec $b^2 - 4c < 0$: Comme $x^2 + bx + c$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut envisager une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$. On commence par faire apparaître cette forme et on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + bt + c} dt &= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2t + \beta}{t^2 + bt + c} dt + \int \frac{\beta - \frac{\alpha\beta}{2}}{t^2 + bt + c} dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \ln |x^2 + bx + c| + \frac{\beta - \frac{\alpha\beta}{2}}{\dots} \arctan(\dots).\end{aligned}$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exercice 13 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

$$④ \quad x \mapsto \frac{x^2}{x^3 + 1}.$$



IV. Primitives de fonctions rationnelles

2. Intégration des éléments simples

Exercice 13 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

❶ $x \mapsto \frac{x^2}{x^3 + 1}.$

❷ $x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}.$



V. Techniques à connaître

1 Primitives

2 Intégrales

3 Techniques élémentaires de calculs d'intégrales

4 Primitives de fonctions rationnelles

5 Techniques à connaître

- Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$
- Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$
- Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$
- Primitives de $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$



V. Techniques à connaître

1. Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

On souhaite déterminer des primitives de fonctions du type $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ où $(\alpha; \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Sachant que l'on connaît la primitive

$$\int^x e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{ax}$$

pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, la

méthode générale va être de se ramener celle-ci à l'aide des formules d'Euler.

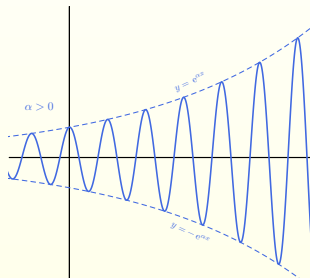
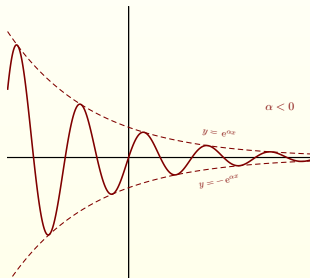


Figure 4 – Signaux pseudo-périodiques avec enveloppe exponentielle. La charge d'un condensateur dans un circuit RLC est de ce type.



V. Techniques à connaître

1. Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

Méthode 1 :

Pour déterminer une primitive faisant intervenir $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$, il sera souvent plus simple de passer par l'intégrale de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.



V. Techniques à connaître

1. Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

Exemple 25 :

$$\begin{aligned}\int^x e^t \cos(t) dt &= \int^x \operatorname{Re} \left(e^{(1+i)t} \right) dt = \operatorname{Re} \left(\int^x e^{(1+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1-i}{2} \right) (\cos(x) + i \sin(x)) \right) e^x\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \int^x e^t \cos(t) dt = \left(\cos(x) + \sin(x) \right) \frac{e^x}{2}.$$



V. Techniques à connaître

1. Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

Exercice 14 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int \cos(t) e^{2t} dt$



V. Techniques à connaître

1. Primitives de $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

Exercice 14 :

Déterminer les primitives suivantes :

❶ $\int^x \cos(t) e^{2t} dt$

❷ $\int^x \cos(2t) e^{-t} dt$



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Pour les primitives du type $\int^x \cos^m(t) \sin^n(t) dt$, $(m; n) \in \mathbb{N}^2$, sauf primitivation directe « à l'œil », on utilise les formules d'Euler et De Moivre pour linéariser puis les primitives de $t \mapsto \cos(at + b)$ et $t \mapsto \sin(at + b)$.

Méthode 8 :

Pour déterminer des primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x) \sin^q(x)$ avec $p, q > 0$, on pensera à linéariser l'expression, l'obtention de primitives se faisant ensuite aisément.



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Pour les primitives du type $\int^x \cos^m(t) \sin^n(t) dt$, $(m; n) \in \mathbb{N}^2$, sauf primitivation directe « à l'œil », on utilise les formules d'Euler et De Moivre pour linéariser puis les primitives de $t \mapsto \cos(at + b)$ et $t \mapsto \sin(at + b)$.

Méthode 8 :

Pour déterminer des primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x) \sin^q(x)$ avec $p, q > 0$, on pensera à linéariser l'expression, l'obtention de primitives se faisant ensuite aisément.

Exercice 15 :

Calculer une primitive de $f : x \mapsto \cos^3(x)$.



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Il y a plus efficace dans certains cas avec des changements de variable :

Méthode 9 :

- si p est impair, on peut poser $u = \cos(x)$.
- si q est impair, on peut poser $u = \sin(x)$.
- p et q sont impairs, on peut poser $u = \sin(x)$ ou $u = \cos(x)$ ou $u = \cos(2x)$.
- si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver.
- si p et q sont de parité différente on pose le changement de variables égal à la fonction trigonométrique à la puissance paire

$$u = \cos(x) \quad \text{si } p \text{ est pair} \quad \text{et} \quad u = \sin(x) \text{ si } q \text{ est pair.}$$

On est alors ramené à primitiver des fonctions polynomiales qu'il faudra évaluer en $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\cos(2x)$.



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Exemples 26 :

$$\textcircled{1} \int \underbrace{\cos(t) \sin^3(t)}_{p \text{ et } q \text{ impairs}} dt = \frac{1}{4} \sin^4(x).$$



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Exemples 26 :

$$\textcircled{1} \int \underbrace{\cos(t) \sin^3(t)}_{p \text{ et } q \text{ impairs}} dt = \frac{1}{4} \sin^4(x).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \underbrace{\cos^3(t) \sin^3(t)}_{p \text{ et } q \text{ impairs}} dt &= \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8} dt \stackrel{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8} \int^{\cos(2x)} \frac{u^2 - 1}{2} du \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} \cos^3(2x) - \cos(2x) \right). \end{aligned}$$



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Exemples 26 :

$$\textcircled{1} \int \underbrace{\cos(t) \sin^3(t)}_{p \text{ et } q \text{ impairs}} dt = \frac{1}{4} \sin^4(x).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \underbrace{\cos^3(t) \sin^3(t)}_{p \text{ et } q \text{ impairs}} dt &= \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8} dt \stackrel{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8} \int^{\cos(2x)} \frac{u^2 - 1}{2} du \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} \cos^3(2x) - \cos(2x) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int \underbrace{\cos^2(t) \sin^3(t)}_{p \text{ pair et } q \text{ impairs}} dt &\stackrel{u=\cos(t)}{=} - \int^{\cos(x)} (u^2 - u^4) du. \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) \end{aligned}$$



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Exemples 26 :

$$\textcircled{4} \int^x \underbrace{\cos^3(t)}_{p \text{ impair et } q \text{ pair}} dt \stackrel{u=\sin(t)}{=} \int^{\sin(x)} (1-u^2) du = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \underbrace{\cos^2(t) \sin^4(t)}_{p \text{ et } q \text{ pairs}} &= \frac{1}{64} (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^4 \\ &= \frac{1}{64} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &= \frac{1}{64} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{64} (e^{6ix} - 2e^{4ix} - e^{2ix} + 4 - e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= \frac{1}{64} (2\cos(6x) - 4\cos(4x) - \cos(2x) + 4) \\ &= \frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) - \frac{1}{64} \cos(2x) + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

D'où, $\int^x \cos^2(t) \sin^4(t) dt = \frac{1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) - \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{1}{16}x.$

V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Exercice 16 :

Déterminer $\int^x \cos^5(t) dt$.



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Méthode 10 :

Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

$$\blacksquare \sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \left[\sin(p+q) + \sin(p-q) \right].$$

$$\blacksquare \cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \left[\cos(p+q) + \cos(p-q) \right].$$

$$\blacksquare \sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} \left[\cos(p-q) - \cos(p+q) \right].$$



V. Techniques à connaître

2. Polynômes trigonométriques : $x \mapsto P(\cos(x); \sin(x))$

Méthode 10 :

Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

$$\blacksquare \sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \left[\sin(p+q) + \sin(p-q) \right].$$

$$\blacksquare \cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \left[\cos(p+q) + \cos(p-q) \right].$$

$$\blacksquare \sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} \left[\cos(p-q) - \cos(p+q) \right].$$

Exemple 27 :

$$\int^x \cos(3t) \cos(4t) dt = \frac{1}{2} \int^x \left(\cos(7t) + \cos(-t) \right) dt = \frac{1}{14} \sin(7x) + \frac{1}{2} \sin(x).$$



V. Techniques à connaître

3. Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Pour les primitives du type $\int^x \frac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))} dt$ où P, Q sont deux fonctions polynomiales à 2 variables, on peut toujours poser $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour se ramener à l'intégrale d'un quotient de fonctions polynômes.

On a alors :

$$dt = \frac{2}{1+u^2} du, \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Cette méthode fonctionne toujours et ramène le problème à celui de l'intégration d'une fonction rationnelle. On peut cependant affiner un peu et user des règles, dites de Bioche :



V. Techniques à connaître

3. Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Méthode II (Règles de Bioche) :

(Hors-Programme)

Dans la suite, f est une expression rationnelle en $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

Ainsi, pour calculer $\int^x f(t) dt$, on forme l'intégrande : $\omega(t) = f(t) dt$.

- si $\omega(-t) = \omega(t)$, un changement de variable judicieux est $u(t) = \cos(t)$;
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, un changement de variable judicieux est $u(t) = \sin(t)$;
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, un changement de variable judicieux est $u(t) = \tan(t)$;
- si deux des trois relations précédentes sont vraies (dans ce cas les trois relations sont vraies), un changement de variable judicieux est $u(t) = \cos(2t)$;
- dans les autres cas, le changement de variable $u(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ s'avère souvent judicieux.

V. Techniques à connaître

3. Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Exemple 28 :

Avec le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{1 - \sin(t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{1 - \frac{2u}{1+u^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2 du}{(1-u)^2} = \left[\frac{2}{1-u} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 + \sqrt{3}.$$



V. Techniques à connaître

3. Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Exercice 17 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

❶ $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$



V. Techniques à connaître

3. Fonctions rationnelles trigonométriques : $x \mapsto \frac{P(\cos(x); \sin(x))}{Q(\cos(x); \sin(x))}$

Exercice 17 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

❶ $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

❷ $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$



V. Techniques à connaître

4. Primitives de $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$

Proposition 10 :

Soient P une fonction polynomiale et α un nombre réel.

Alors $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$ admet une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P .



V. Techniques à connaître

4. Primitives de $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$

Méthode 12 :

Soit n le degré de P . Deux méthodes pour déterminer Q dans la proposition précédente :

- 1 Chercher Q sous la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^n b_k x^k$ avec les coefficients b_k à déterminer. On calcule la dérivée de $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, et on réinjecte dans l'équation de primitivation pour obtenir

$$Q' + \alpha Q = P.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients dans cette égalité polynomiale pour obtenir un système linéaire en $b_0, \dots, b_n$, que l'on résout. (On trouvera toujours une unique solution).



V. Techniques à connaître

4. Primitives de $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$

Méthode 12 :

Soit n le degré de P . Deux méthodes pour déterminer Q dans la proposition précédente :

- 1 Chercher Q sous la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^n b_k x^k$ avec les coefficients b_k à déterminer. On calcule la dérivée de $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, et on réinjecte dans l'équation de primitivation pour obtenir

$$Q' + \alpha Q = P.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients dans cette égalité polynomiale pour obtenir un système linéaire en $b_0, \dots, b_n$, que l'on résout. (On trouvera toujours une unique solution).

- 2 Si le degré de P n'est pas trop grand, on peut aussi effectuer des intégrations par parties successives en dérivant P , puis P' , etc, jusqu'à épuiser le degré du polynôme à intégrer.



V. Techniques à connaître

4. Primitives de $x \mapsto P(x) e^{\alpha x}$

Exemple 29 :

$$\int^x t^2 e^{-t} dt = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x}.$$

