

Les Nombres complexes II

La résolution d'équations polynomiales par radicaux a motivé une part importante de la recherche mathématique, jusqu'à ce que Niels Abel^[1] prouve l'impossibilité de résoudre l'équation général du 5-ième degré par radicaux.

Peu de temps après, Évariste Galois^[2] élucide complètement le problème, dans un mémoire rédigé peu avant sa mort prématurée en 1832, et dans une lettre rédigée à la hâte à un ami, la veille du duel qui devait lui être fatal (il avait alors 20 ans). Dans ce mémoire, on y trouve en particulier les balbutiements de la théorie des groupes.

Carl Friedrich Gauss montre que les racines de $X^n - 1$ (donc les racines n -ièmes de l'unité), peuvent s'exprimer par radicaux si n est premier.

Il va plus loin, en montrant que si n est un entier premier de la forme $2^{2^k} + 1$, alors les solutions peuvent s'exprimer sous forme de radicaux carrés. Ce résultat amène la constructibilité à la règle et au compas du pentagone (déjà connu depuis bien longtemps), de l'eptadécagone, *i.e.* le polygone à 17 côtés (Gauss en donne une construction) puis des polygones à 257 et 65537 côtés. On ne connaît pas, à ce jour, d'autres nombres premiers de la forme $2^{2^k} + 1$ appelés nombres de Fermat. On ne sait pas s'il y en a d'autres.

Pierre-Laurent Wantzel montre la réciproque en 1837 : les seuls polygones constructibles sont les polygones dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, ou des nombres ayant comme uniques facteurs (qui doivent être simples) ces nombres premiers ou 2 (en multiplicité quelconque). Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel.

[1]. Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

[2]. Évariste Galois est un mathématicien français, né le 25 octobre 1811 à Bourg-Égalité (aujourd'hui Bourg-la-Reine) et mort le 31 mai 1832 à Paris. On a donné son nom à une branche des mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notion de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants. Sa « théorie de l'ambiguïté » est toujours féconde au XXI^{ème} siècle. Elle a ainsi permis, par exemple, à Félix Klein d'élaborer en 1877 la théorie des revêtements puis à Alexandre Grothendieck, en 1960, de fusionner théorie de Galois et théorie des revêtements.

CONTENU

I	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	2
I.1	Racines carrées d'un nombre complexe	2
I.2	Racines n -ièmes de l'unité	7
I.3	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	10
II	Ensembles de points	11
II.1	Affixe d'un vecteur	11
II.2	À partir du module	13
II.3	À partir de l'argument	14
II.4	Alignement, orthogonalité, angles	16
III	Transformations du plan (Hors-Programme)	22
III.1	Représentation complexe	22
III.2	Translation	23
III.3	Homothétie	24
III.4	Rotation	25
III.5	Symétrie axiale	26
IV	Résumé de géométrie complexe	30

I/ Racines n -ièmes d'un nombre complexe _____

I.1 Racines carrées d'un nombre complexe _____

Définition 1 (Racine carré) : On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il est strictement interdit d'écrire $\sqrt{a}$.

Par exemple, pour -1 , on aurait alors :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1 !!!$$

Exemples 1 :

- 0 admet 0 comme unique racine carrée complexe. C'est le seul complexe à n'en avoir qu'une.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$, racines de $X^2 - \alpha$.
- -1 admet deux racines carrées complexes : i et $-i$ qui sont les racines du polynôme $X^2 + 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ alors ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{-\alpha}$, racines de $X^2 + \beta$ où $\beta = -\alpha \geq 0$.

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Preuve : Soit z un nombre complexe non nul.

Sous forme exponentielle : Soient $z = r e^{i\theta}$ et $u = s e^{i\varphi}$ sous leur forme exponentielle. On cherche s et φ tels que $u^2 = z$.

$$\begin{aligned} u^2 = z &\Leftrightarrow s^2 e^{2i\varphi} = r e^{i\theta} \Leftrightarrow s^2 = r \text{ et } 2\varphi \equiv \theta [2\pi] \\ &\Leftrightarrow s = \sqrt{r} \text{ et } \varphi \equiv \frac{\theta}{2} [\pi] \quad (r \text{ et } s \text{ sont strictement positifs}) \\ &\Leftrightarrow u = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } u = \sqrt{r} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Sous forme algébrique : Dans la pratique, pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul, on ne procède pas comme dans la preuve précédente car il est souvent difficile de déterminer une valeur exacte de θ . On procèdera de la manière suivante :

On pose, cette fois $z = x + iy$ et on cherche u sous la forme $a + ib$:

$$z = u^2 \Leftrightarrow x + iy = a^2 - b^2 + 2iab \text{ et } |z| = |u|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2ab = y. \end{cases}$$

Par addition et soustraction des deux premières lignes, on obtient le système équivalent :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} + x) = \frac{1}{2} (|z| + \operatorname{Re}(z)) \\ b^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x) = \frac{1}{2} (|z| - \operatorname{Re}(z)) \\ 2ab = y = \operatorname{Im}(z). \end{cases}$$

Comme $|z| \geq \operatorname{Re}(z)$, a^2 et b^2 sont des réels positifs dans les deux cas et on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} \\ b = \pm \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}} \\ 2ab = \operatorname{Im}(z). \end{cases}$$

— Si $\operatorname{Im}(z) > 0$, la troisième équation impose que a et b soient de même signe. Les deux racines de z sont donc :

$$u = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}$$

et

$$u = -\sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} - i \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}.$$

— Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, $z = \operatorname{Re}(z)$ est réel et on retrouve :

$$u = \sqrt{\operatorname{Re}(z)} \text{ et } u = -\sqrt{\operatorname{Re}(z)} \quad (\text{exclusif}) \quad \text{ou} \quad u = i \sqrt{|\operatorname{Re}(z)|} \text{ et } u = -i \sqrt{|\operatorname{Re}(z)|},$$

suivant le signe de $\operatorname{Re}(z)$.

- Si $\text{Im}(z) < 0$, la troisième équation impose que a et b soient de signe opposé. Les deux racines de z sont donc :

$$u = \sqrt{\frac{|z| + \text{Re}(z)}{2}} - i \sqrt{\frac{|z| - \text{Re}(z)}{2}}$$

et

$$u = -\sqrt{\frac{|z| + \text{Re}(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - \text{Re}(z)}{2}}.$$

On obtient bien exactement deux racines OPPOSÉES dans tous les cas où $z \neq 0$.

Exemples 2 :

- Les racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- Les racines carrées de $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4i$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

1. On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $z = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
2. Les racines carrées sont alors évidentes à trouver :

$$u_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad u_2 = -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

1. On pose $u = a + ib$.
2. $z = u^2 \Leftrightarrow 1 - i\sqrt{3} = a^2 - b^2 + 2iab$ et $2 = |u|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2} \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} \right).$$

Comme $y < 0$, a et b doivent être de signe contraire et on ne garde que celles-ci :

$$u_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \quad \text{et} \quad u = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right).$$

Exercice 1 : Déterminer les racines carrées de $-1 + i$ par deux méthodes.

Correction : Les racines carrées de $-1 + i$ sont

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{2} e^{i \frac{3\pi}{8}}.$$

On a dorénavant les moyens de revenir sur les équations du second degré à coefficients complexes cette fois.

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr.}\mathbb{C})$$

On appelle encore *discriminant* de l'équation (Tr.ℂ), noté Δ , le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est **une** racine carrée de Δ .

- Si $\Delta = 0$, (Tr.ℂ) possède une unique solution, dite double : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, (Tr.ℂ) possède deux solutions : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$.

Exemple 4 : $(1 + i)z^2 + (3 + i)z + (-6 + 4i) = 0$.

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4(1 + i)(-6 + 4i) = 48 + 14i.$$

On cherche $\delta = a + ib$ tels que :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \\ 2ab = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 49 \\ b^2 = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -7 \\ b = -1 \end{cases} \text{ car } ab > 0$$

On prend $\delta = 7 + i$.

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$$z_1 = \frac{-(3 + i) - (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{-10 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{-5 - i}{1 + i} = \frac{-(5 + i)(1 - i)}{2} = -3 + 2i, \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-(3 + i) + (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{4}{2(1 + i)} = 1 - i.$$

ATTENTION

Les deux racines **ne** sont absolument **pas** conjuguées.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

2. $z^4 + 1 = 0$.

Correction :

1. $\Delta = -8i$ puis $\mathcal{S} = \{1; -1 + 2i\}$.

2. $z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i) = \left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \overline{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}, \overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} \right\}$.

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines de (Tr.}\mathbb{C}\text{) si, et seulement si } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Remarque : On verra que les relation entre les coefficients d'un polynôme et ses racines se généralisent à tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et donneront lieu à une foule d'exercices fructueux.

Preuve : z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. $\mathbb{C}$) si, et seulement si

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(z - z_1)(z - z_2) \\ &= az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2. \end{aligned}$$

Par identification, z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. $\mathbb{C}$) si, et seulement si z_1 et z_2 vérifient le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 5 (Système non linéaire) :

Pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, on introduit donc l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ dont x et y sont les solutions.

Exercice 3 : Trouver deux nombres complexes de somme i et de produit 2 .

Correction : D'après la **proposition (3)**, les deux nombres cherchés sont solutions de l'équation $z^2 - iz + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = -9 = (3i)^2$.

Les solutions de l'équation et les nombres cherchés sont donc $z_1 = 2i$ et $z_2 = -i$.

I.2 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 2 (Racines n -ièmes) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle *racine n -ième* de z tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = z.$$

- On appelle *racine n -ième de l'unité* tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ leur ensemble.

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
- Nous verrons plus tard que cet ensemble $\mathbb{U}_n$ possède une structure de *groupe multiplicatif commutatif* très importante.
- Toute racine de l'unité est de module 1 *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_1 &= \{1\} \\ \mathbb{U}_2 &= \{1, -1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_3 &= \{1, j, \bar{j}\} \\ \mathbb{U}_4 &= \{1, -1, i, \bar{i}\}\end{aligned}$$

Théorème 4 (Caractérisation des racines de l'unité) :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ est constitué de n éléments deux à deux distincts.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Comme $\omega \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = e^{i\theta}$.

Alors, par la formule de Moivre, $\omega^n = e^{in\theta} = 1$.

Donc, $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Réciproquement tout complexe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = 1$ donc appartient à $\mathbb{U}_n$.

On a donc montré que $\mathbb{U}_n = \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

L'œil attentif aura remarqué que ce n'est pas encore la conclusion de la proposition.

Il est déjà clair que $\left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\} \subseteq \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

En effectuant la division euclidienne de k par n , on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $k = qn + r \iff \frac{k}{n} = q + \frac{r}{n}$.

Donc, $\omega = e^{i(2q\pi + \frac{2r\pi}{n})} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$ où $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et donc $\omega \in \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}$.

En conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\omega_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}.$$

Interprétation géométrique : Pour $n \geq 3$, les points $M_k \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

En effet, comme $\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1$, il est déjà clair que tous les points d'affixe une racine n -ième de l'unité sont sur le cercle trigonométrique.

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, considérons $M_k(z_k)$ un point d'affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, une racine n -ième de l'unité. Alors :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) &= (\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}; \overrightarrow{OM_k}) \\ &= \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \arg\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) \\ &= \arg\left(e^{i\frac{2\pi}{n}(k+1-k)}\right) = e^{i\frac{2\pi}{n}} \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]. \end{aligned}$$

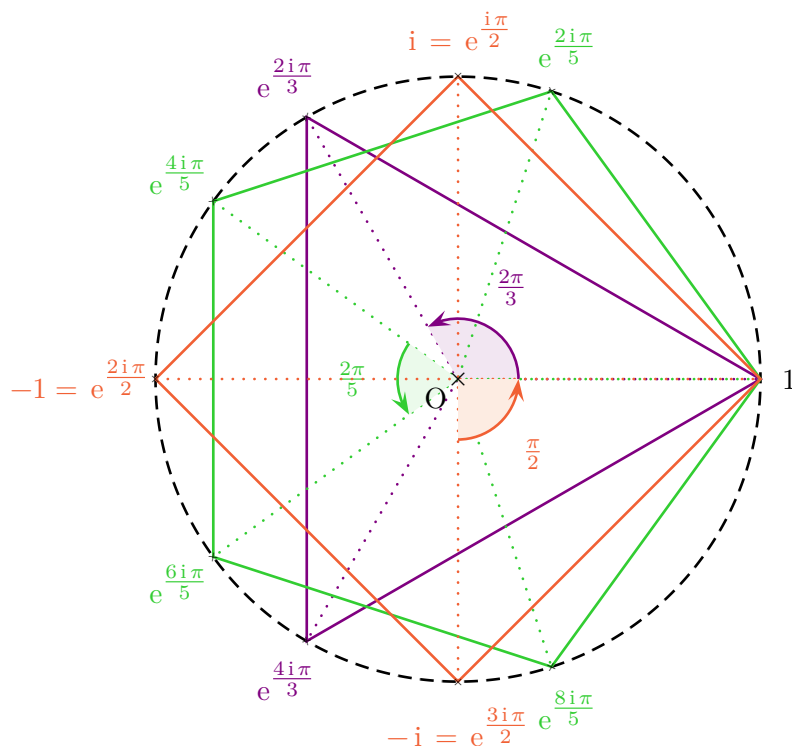


Figure X.1 – Polygones réguliers à 3, 4 et 5 sommets.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -i$.

2. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$.

Correction :

$$\begin{aligned}
 1. \quad z^3 = -i &\Leftrightarrow z^3 = i^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{i} = 1 \text{ ou } \frac{z}{i} = j \text{ ou } \frac{z}{i} = j^2 \\
 &\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = ij \text{ ou } z = ij^2 \\
 &\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = e^{i\pi/3} \text{ ou } z = e^{-i\pi/3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1 &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{U}_4 \\
 &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = 1 \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = i \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = -1 \text{ ou } \frac{z-1}{z+1} = -i \\
 &\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = i.
 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{0, i, -i\}$.

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geq 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.

2. $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
3. La somme des racines n -ièmes de l'unité est égale à 0 : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.

Preuve :

1. $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$
 $= \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$, en posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
2. Il suffit simplement de remarquer que $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}$ constitue la somme des termes d'une progression géométrique :

$$\forall \omega \neq 1, 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0 \iff \omega^n = 1.$$

3. Découle des deux assertions précédentes.

I.3 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n -ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n -ième de Z alors les racines n -ièmes de Z sont les

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Pour trouver toutes les racines n -ièmes d'un nombre complexe Z , il suffit donc d'en exhiber une, dite primitive, notée z_0 , et de la multiplier par toutes les racines n -ièmes de l'unité.

Géométriquement, toutes les racines n -ièmes sont donc obtenues à partir du point d'affixe z_0 par $n-1$ rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Preuve : Soit $Z = r e^{i\theta}$ sous sa forme polaire. On cherche une racine n -ième ω de Z sous la forme $s e^{i\alpha}$.

$$\omega^n = Z \iff s^n e^{in\alpha} = r e^{i\theta} \iff \begin{cases} s^n = r \\ n\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases}$$

Posons $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$. C'est une racine n -ième de Z .

Toute autre racine n -ième z de Z vérifie alors la relation $z^n (= Z) = z_0^n$ i.e. $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ ou encore $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$.

D'après le **théorème (4)**, il existe donc $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $z = z_0 e^{2i\pi\frac{k}{n}}$.

Le nombre Z admet donc exactement n racines n -ièmes.

Exercice 5 :

1. Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction :

1. Comme $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, ses racines cubiques sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $j e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $j^2 e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.
2. D'après les formules d'Euler, $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et on sait que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 j e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} &\iff e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
 &\iff \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &\iff \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

En égalisant parties réelles et parties imaginaires, on obtient finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

II/ Ensembles de points

Définition 3 (Ensemble de points) : Il s'agit de déterminer un ensemble ($\mathcal{E}$) de points M du plan complexe dont les affixes z vérifient une certaine propriété.

II.1 Affixe d'un vecteur

Un peu de géométrie :

Rappel 1 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Proposition 7 (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[M_1 M_2]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

En particulier, si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, on retrouve la relation familière :

$$\overrightarrow{AB}(z_{\overline{AB}}) = (z_B - z_A) = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

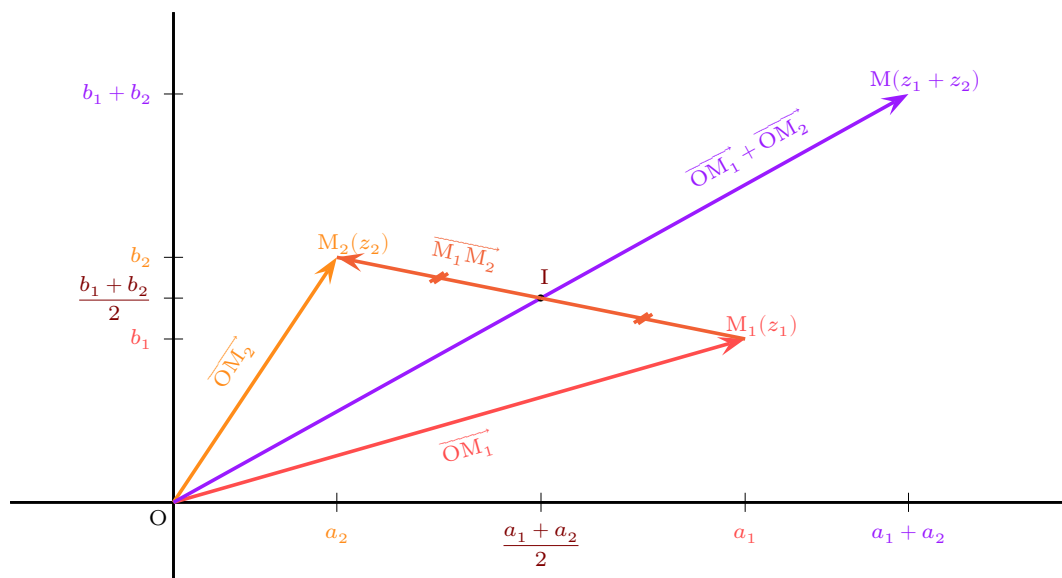


Figure X.2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

Preuve : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$.

Le reste en découle simplement...

Exercice 6 : Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\frac{3-2i}{2}$, $\frac{1}{3} - i$ et $-3 - i$.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

II.2 À partir du module

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B .

$$— \|\vec{OA}\| = |z_A|.$$

$$— \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|.$$

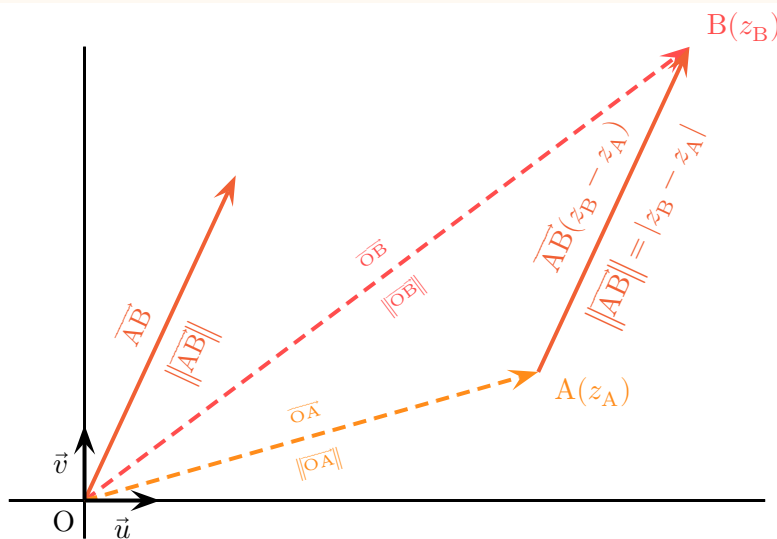
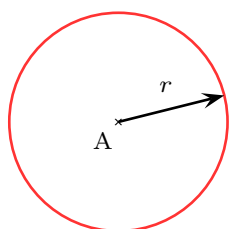


Figure X.3 – Inégalité triangulaire.

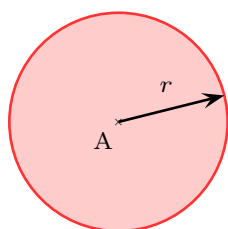
Corollaire 8.1 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

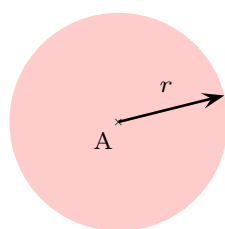
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| < r$ (resp. $|z - z_A| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



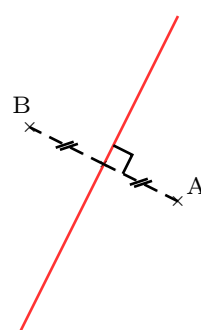
Cercle



Disque fermé



Disque ouvert



Médiatrice

Figure X.4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Remarque : « ouvert » signifiant ne contenant pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Exercice 7 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z - i| = 5$

2. $|z - 1 + i| = |z - i|$

3. $|z - i| < |z + 2|$

II.3 À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$) d'affixe respective z_A et z_B .

$$— (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi].$$

$$— (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$— (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) [2\pi].$$

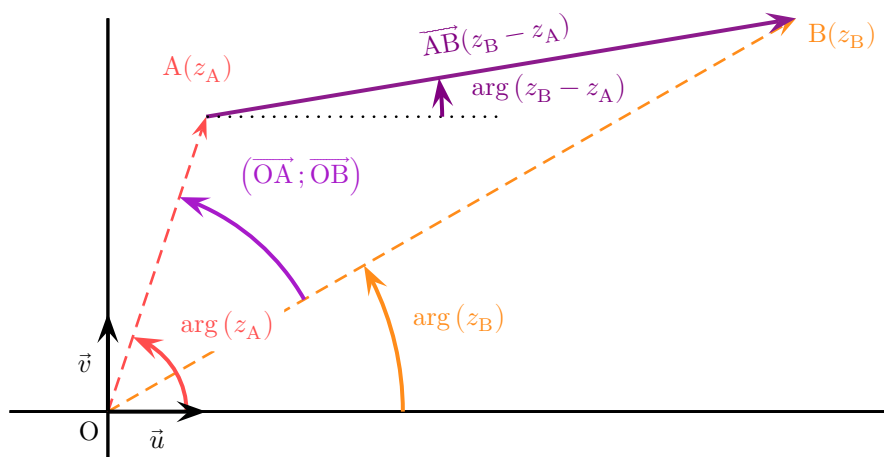


Figure X.5 – Angle de deux vecteurs

Preuve :

— La première assertion est la définition.

— Quant à la deuxième, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ i.e. $z_M = z_B - z_A$. On applique alors les résultats précédents :

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{— Enfin, } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) &\equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \\ &\equiv \arg z_B - \arg z_A \equiv \arg \frac{z_B}{z_A} [2\pi]. \end{aligned}$$

Exemple 7 : On donne $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la longueur AB et l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$?

- $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$. Donc $\overline{AB}(-3; -3)$.
- $AB = |z_B - z_A| = |-3 - 3i| = 3\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $z_{\overline{AB}}$. On a :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\text{Donc } (\vec{u}; \overline{AB}) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Corollaire 9.1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D .

Alors :

$$(\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$

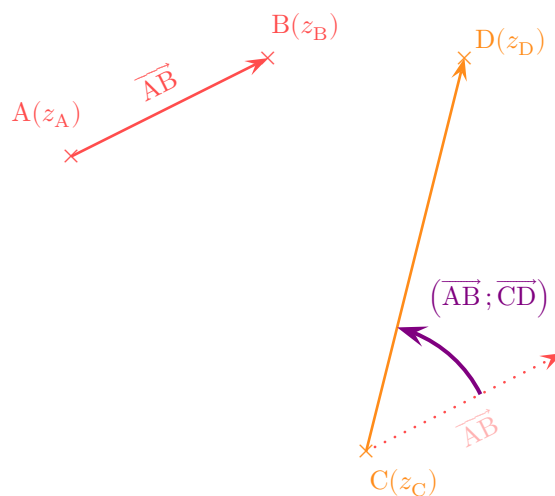


Figure X.6 – Angle formé par 4 points.

Preuve : La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\begin{aligned} (\overline{AB}; \overline{CD}) &\equiv (\vec{u}; \overline{CD}) - (\vec{u}; \overline{AB}) \\ &\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]. \end{aligned}$$

Exercice 8 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

$$1. \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2. \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$3. \begin{cases} \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \\ |z| = 2. \end{cases}$$

II.4 Alignement, orthogonalité, angles

À partir du corollaire (9.1), on peut alors chercher des ensembles de points dont les relations sont basées sur l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ i.e. des problèmes de colinéarité, d'alignement ou d'orthogonalité.

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$— \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$— \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$

Preuve : Il suffit de calculer $z_v \overline{z_u} = (ac + bd) + i(ad - bc)$ pour reconnaître dans les parties réelles et imaginaires les produits scalaires et vectoriels des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques :

— Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnaît le *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$

— La deuxième expression s'appelle le *déterminant* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

De la même manière que le produit scalaire caractérise l'orthogonalité de deux vecteurs, leur déterminant caractérise, lui, leur colinéarité. Il est alors tout de même miraculeux de retrouver dans un petit produit les critères de colinéarité et de d'orthogonalité en une seule expression.

On en déduit aisément,

Théorème 10 (Colinéarité et orthogonalité de vecteurs) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = 0$.

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = 0$.

On en déduit une caractérisation plus commode :

Corollaire 10.1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{u} // \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve : En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v \overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff z_v \overline{z_u} \in i\mathbb{R} \iff \arg(z_v \overline{z_u}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'équivalence perdure si $\vec{v} = \vec{0}$, le vecteur nul étant orthogonal à tous vecteurs du plan et $0 \in i\mathbb{R}$.

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v \overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg(z_v \overline{z_u}) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) + \arg(\overline{z_u}) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) - \arg(z_u) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv 0 [\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, nous pouvons traduire le **théorème (10)** pour un ensemble de points du plan.

Corollaire 10.2 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D .

A, B et C sont distincts et alignés	$\iff$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
$(AB) // (CD)$	$\iff$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
$(AB) \perp (CD)$	$\iff$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$	$\iff$	$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$

Preuve : Il suffit de traduire le **théorème (10)** et le **corollaire (10.1)** attendant :

— Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned} \text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

— Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overline{AB}}$ et $z_{\overline{CD}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{\overline{CD}}}{z_{\overline{AB}}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

— Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overline{AB}}$ est non nul.

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \frac{z_{\overline{CD}}}{z_{\overline{AB}}} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque : En particulier, trois points distincts A , B et C sont alignés si, et seulement si

$$\operatorname{Im}((z_C - z_A)(\overline{z_B - z_A})) = 0 \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_C - z_A = k(z_B - z_A).$$

théorème (10) corollaire (10.2)

La première assertion signifie donc simplement que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si leur affixe $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$ sont proportionnelles dans $\mathbb{R}$.

On retrouve ainsi un résultat déjà vrai pour les coordonnées des vecteurs.

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz soient alignés.

Correction : Les points d'affixes i , z , iz sont alignés si, et seulement si $z = 0$ (deux points) ou exclusif

$$\frac{iz - i}{iz - z} = \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} \in \mathbb{R}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} \in \mathbb{R} &\iff \frac{1}{2}(1 - i)\frac{z - 1}{z} = \frac{1}{2}(1 + i)\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}} \\ &\iff \frac{z - 1}{z} = i \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}} \iff \bar{z}(z - 1) = iz(\bar{z} - 1) \\ &\iff (1 - i)z\bar{z} - \bar{z} + iz = 0 \end{aligned} \tag{X.1}$$

$$\iff \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z\bar{z} - \bar{z} + iz = 0 \tag{X.2}$$

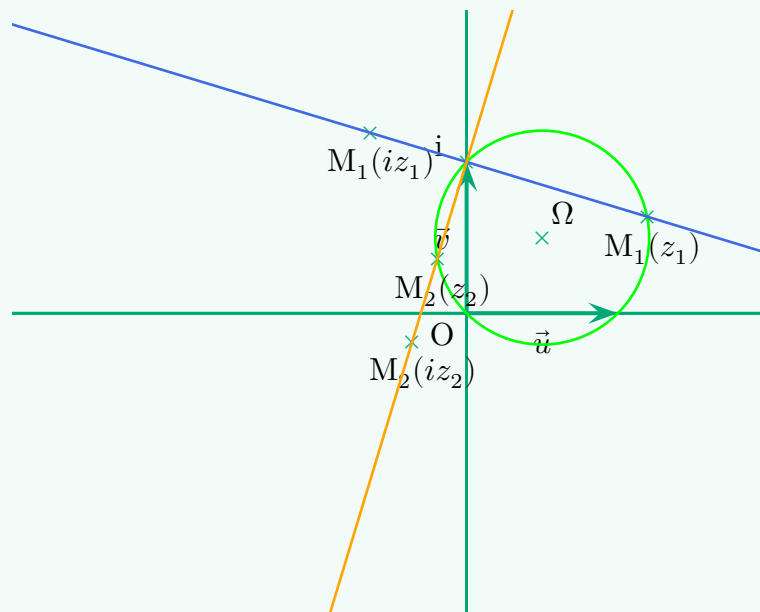
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi)} z = 0 \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} z = 0 \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \overline{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left| z - \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

On vérifie que $\left| 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega \left(\frac{1+i}{2} \right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + iy$ dès la ligne (X.1) et obtenir :

$$\begin{aligned}
(1-i)z\bar{z} - \bar{z} + iz = 0 &\Leftrightarrow (1-i)(x^2 + y^2) - x + iy + ix - y = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-i)(x^2 + y^2) - (1-i)x - (1-i)y = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On retrouve le même cercle de centre $\Omega \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Un exemple classique est un exercice où l'on vous demande la nature d'un certain triangle ABC.

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$ABC \text{ est isocèle en } A \iff AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$

$$\begin{aligned} ABC \text{ est équilatéral} &\iff AB = AC = BC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B| \\ &\iff AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]. \end{aligned}$$

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$$

$$ABC \text{ est rectangle isocèle en } A \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } AB = AC \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i.$$

Preuve : Le triangle étant non dégénéré, les sommets ne sont ni confondus, ni alignés *i.e.* leur affixe sont distinctes.

Seule la dernière assertion présenterait une difficulté.

On sait déjà que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ *i.e.* $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r e^{\pm i \frac{\pi}{2}}.$$

Or, $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

D'où,

$$r = \left| r e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1.$$

Conclusion : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i$.

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz forment un triangle équilatéral.

Correction : Le triangle formé par les points d'affixes i , z , iz est équilatéral si, et seulement si $|z - i| = |iz - z| = |iz - i|$.

Or,

$$\begin{aligned}
 |z - i| = |iz - z| = |iz - i| &\Leftrightarrow |z - i| = |i - 1||z| = |z - 1| \Leftrightarrow |z - i| = \sqrt{2}|z| = |z - 1| \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ \sqrt{2}|z| = |z - 1| \end{cases} \quad (X.3)
 \end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, en posant $A(1)$ et $B(i)$, on a :

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ 2z\bar{z} = (z - 1)\overline{(z - 1)} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ (z + 1)\overline{(z + 1)} - 2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ |z + 1| = \sqrt{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ M(z) \text{ appartient au cercle de centre } C(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \text{Les points } M(z) \text{ sont les deux points d'intersection de la médiatrice} \\
 &\quad \text{de } [AB] \text{ et du cercle de centre } C(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

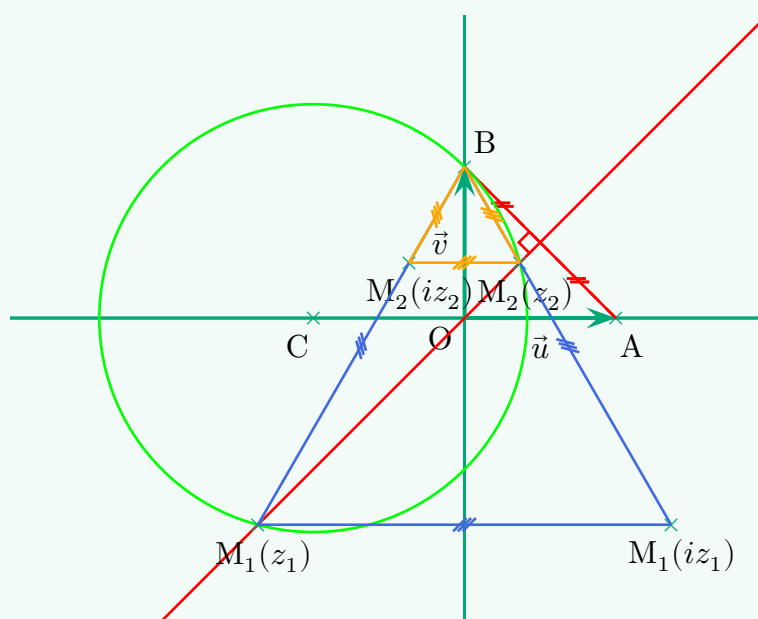
D'un point de vue algébrique, en revenant à (X.3)

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (z - i)\overline{(z - i)} = (z - 1)\overline{(z - 1)} \\ 2z\bar{z} = (z - 1)\overline{(z - 1)} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z - i\bar{z} = 0 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -iz \\ iz^2 + iz - z - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -iz \\ z^2 + (1 + i)z - i = 0 \end{cases} \quad (X.4)
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 + (1 + i)z - i$ de discriminant $\Delta = 6i = (\sqrt{3}(1 + i))^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{On trouve } z_1 &= \frac{-1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i) \text{ et} \\
 z_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})}{2} = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)
 \end{aligned}$$

Les points cherchés sont donc $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.



III/ Transformations du plan

(Hors-Programme)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan.

III.1 Représentation complexe

Définition 4 : On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

$$M \mapsto M'$$

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une *transformation du plan*.
- Lorsque $\mathcal{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z' \end{aligned}$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(M) = M'$ est appelée *représentation* ou *représentation complexe* de $\mathcal{F}$.

On l'écrit souvent $z' = f(z)$ au lieu de $z \mapsto f(z)$.

Exemple 8 : la symétrie axiale d'axe (Ox) est une transformation du plan.

Son écriture complexe est : $z \mapsto \bar{z}$.

Exercice 11 : 1. Donner l'écriture complexe de la symétrie de centre O.
2. Donner l'écriture complexe de la symétrie d'axe (Oy).

III.2 Translation

Définition 5 : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* , notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

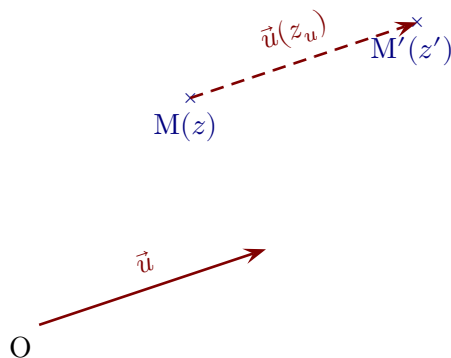


Figure X.7 – Translation de vecteur $\vec{u}$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $t_{\vec{u}}$ est bijective.

Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } t_{\vec{u}} &\iff t_{\vec{u}}(M) = N \\ &\iff \overrightarrow{MN} = \vec{u} \\ &\iff \overrightarrow{NM} = -\vec{u} \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $t_{\vec{u}}$.

Donc $t_{\vec{u}}$ est bien une transformation du plan (=bijective).

Remarque : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$z' = z + a$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{u}}(M) &\iff \overrightarrow{MN} = \vec{u} \\ &\iff z' - z = a \\ &\iff z' = z + a \end{aligned}$$

III.3 Homothétie

Définition 6 : Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* , notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

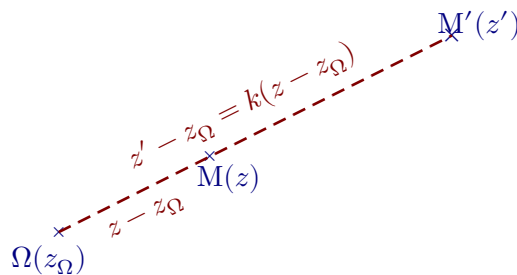


Figure X.8 – Homothétie de centre Ω et de rapport r .

Preuve : Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } h_{\Omega,k} &\iff h_{\Omega,k}(M) = N \\ &\iff \overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k} \overrightarrow{\Omega N} \text{ car } k \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $h_{\Omega,k}$.

Donc $h_{\Omega,k}$ est bien bijective donc une transformation du plan.

Remarque : $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega,k}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned}$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k .

III.4 Rotation

Définition 7 : Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle *rotation de centre Ω et d'angle θ* , notée $r_{\Omega,\theta}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

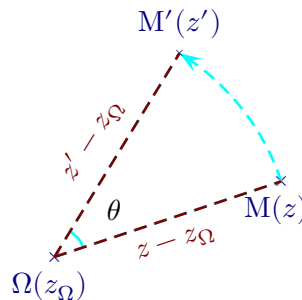


Figure X.9 – Rotation de centre Ω et d'angle θ .

Preuve : Soit $N \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{P}, M \text{ est un antécédent de } N \text{ par } r_{\Omega,\theta} &\iff r_{\Omega,\theta}(M) = N \\ &\iff \begin{cases} \Omega N = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \Omega M = \Omega N \\ (\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que tout point N de $\mathcal{P}$ admet un et un seul antécédent par $r_{\Omega, \theta}$.

Donc $r_{\Omega, \theta}$ est bien une transformation du plan (=bijective).

Remarque : $r_{\Omega, \theta}^{-1} = r_{\Omega, -\theta}$.

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Preuve : Posons $M(z)$ et $M'(z')$.

Supposons que $M \neq \Omega$.

$$\begin{aligned} M' = r_{\Omega, \theta}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ , $z \mapsto e^{i\pi}z$ celle de la symétrie de centre O .

III.5 Symétrie axiale

Définition 8 : Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle *symétrie d'axe* $(\mathcal{D})$, notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M' tel que $(\mathcal{D})$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

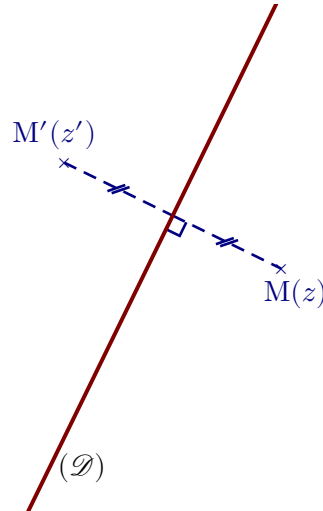


Figure X.10 – Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_A , et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$. L'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est :

$$z' - z_A = z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A).$$

Remarque : $s_{(\mathcal{D})}^{-1} = s_{(\mathcal{D})}$.

Preuve : Notons M le point d'affixe z et $M'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

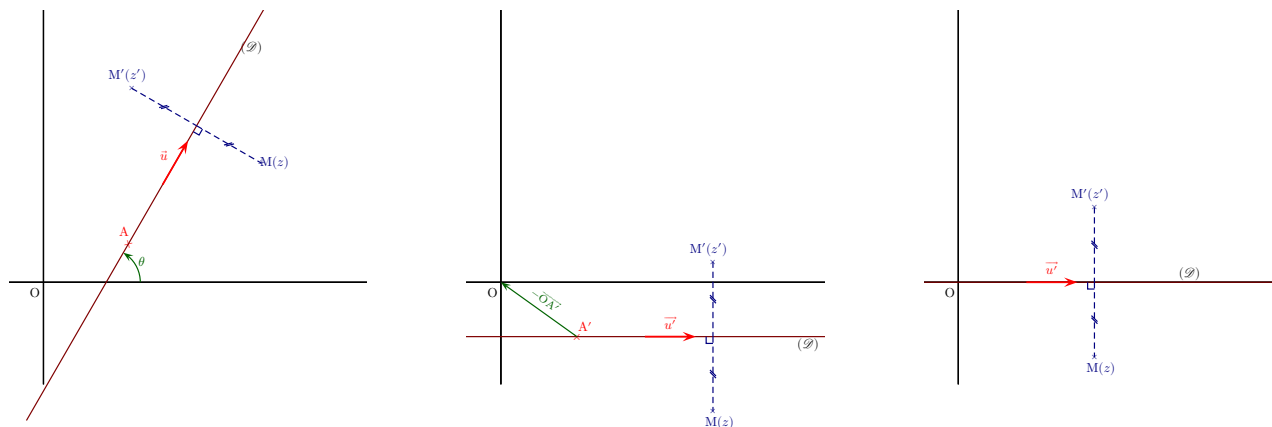
Soit θ l'argument de $z_{\vec{u}}$.

On commence par faire une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ pour nous ramener à une symétrie d'axe parallèle à l'axe des abscisses. Les affixes seront donc multipliées par $\bar{z}_{\vec{u}}$. Le point $A(z_A)$, par exemple, est transformé en $A'(z_{A'})$ ($z_{A'} = \bar{z}_{\vec{u}} z_A$).

Par une translation de vecteur $-\overrightarrow{OA'}$, on transforme cette symétrie en la conjugaison i.e. Symétries et translations étant des isométries, M' est l'image de M par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ si, et seulement si c'est encore le cas pour leur image par la composée de ces deux transformations. Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\vec{u}} (z' - z_A) &= \overline{\bar{z}_{\vec{u}} (z - z_A)} \iff z' - z_A = \frac{1}{\bar{z}_{\vec{u}}} \times z_{\vec{u}} (\bar{z} - \bar{z}_A) \\ &\iff z' - z_A = z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A) \quad \left(\text{car } z_{\vec{u}} \in \mathbb{U} \implies \frac{1}{\bar{z}_{\vec{u}}} = z_{\vec{u}} \right) \\ &\iff z' = z_A + z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A). \end{aligned}$$

Remarque : On a supposé que $\vec{u}$ est unitaire, donc que $z_{\vec{u}}$ est de la forme $e^{i\theta}$. Ainsi, la multiplication par $\bar{z}_{\vec{u}} = \frac{1}{z_{\vec{u}}}$ correspond à une rotation d'angle $-\theta$ qui nous ramène à un axe parallèle à l'axe des abscisses.

Figure X.11 – Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.

Les homothéties : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Les rotations : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Les symétries : $z' = z_{\bar{u}}^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

(a) Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

(b) Si $a = re^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.

On dit que φ est la représentation d'une *similitude* (directe ou indirecte) de centre Ω , de rapport r et d'angle θ .

2. Soit $\varphi : z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a = re^{i\theta} \neq 0$ et $u = e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Alors φ est la représentation de la composée d'une symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A , d'une translation de vecteur $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (un glissement le long de la droite $(\mathcal{D})$) et d'une homothétie de centre O et de rapport r .

Preuve :

1. (a) Si $a = 1$, on reconnaît l'écriture d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
- (b) Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

$\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b \iff \omega = \frac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.

Notons s la transformation complexe associée à φ et $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par s .

$$\begin{aligned} M' = s(M) &\iff z' = az + b \iff_{b=\omega-a\omega} z' - \omega = a(z - \omega) \\ &\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |a||z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \arg(a) [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \Omega M' = r \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

M' est donc l'image de M par composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ et l'homothétie de centre Ω et de rapport r .

2. L'homothétie étant appliquée en dernier, on est ramené à la description de $z \mapsto z' = z_u^2 \bar{z} + \frac{b}{r}$.

On met z' sous la forme $z_u^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A + z_v$ où $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Il suffit alors de comparer les deux expressions, et en exprimant la condition de colinéarité, on obtient une condition sur la partie imaginaire de $z_A \bar{z}_u$, et on peut décider de choisir la partie réelle nulle.

Exercice 12 : Caractériser la transformation associée à la fonction

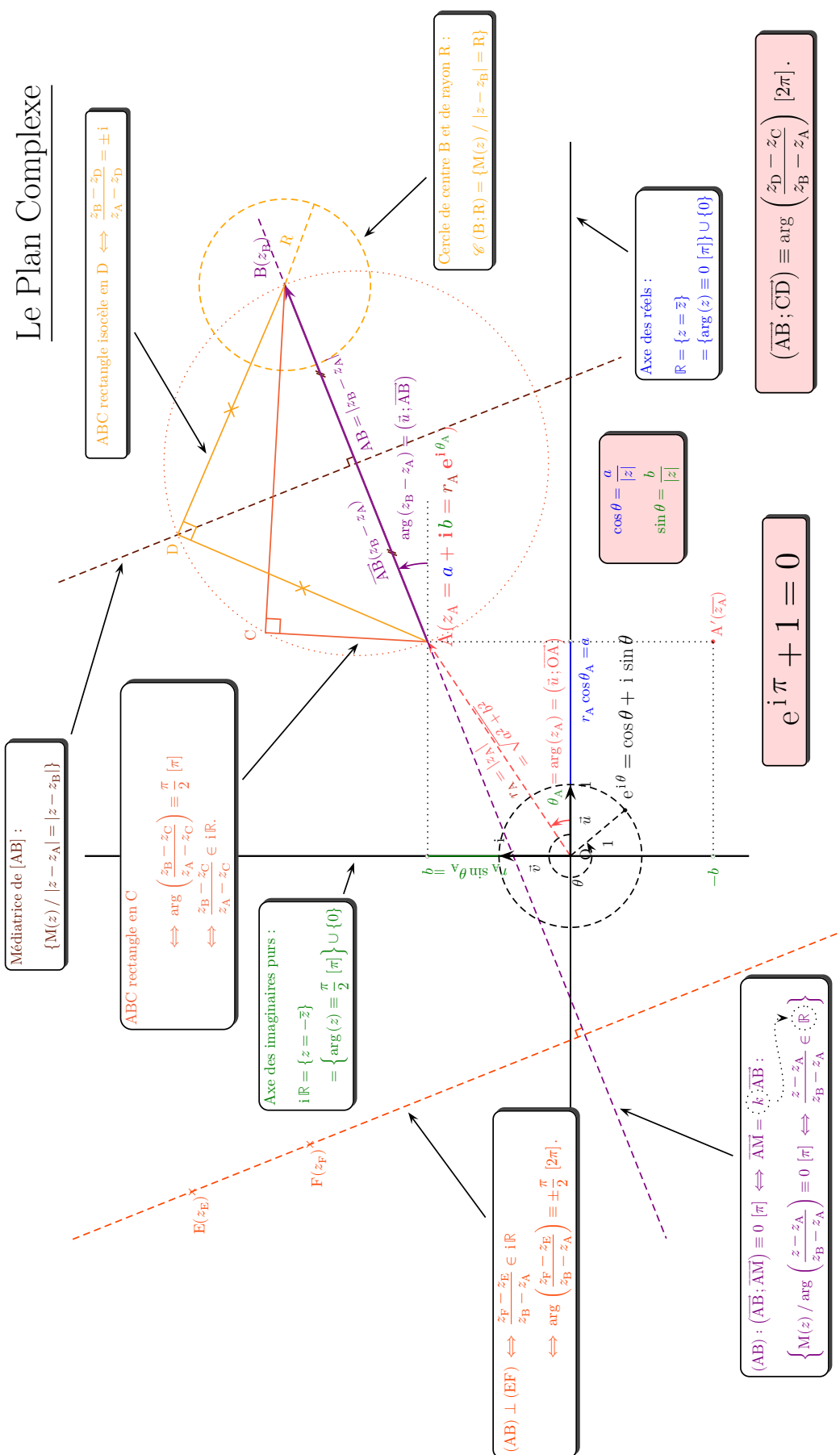
$$f : z \mapsto 2iz + 1.$$

Correction : f est la similitude de centre $\Omega\left(\frac{1+2i}{5}\right)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?

Réponse : parce qu'il n'a jamais d'argument.

IV/ Résumé de géométrie complexe



- Abel, 1
- Affixe
 - d'un vecteur, 11
- Angle
 - de deux vecteurs, 14, 15
- Argument, 14
- Cercle, 13
 - trigonométrique, 8
- Colinéarité, 16
- Discriminant, 5
- Disque, 13
- Déterminant, 16
 - de deux vecteurs, 16
- Écriture complexe
 - d'une homothétie, 25
 - d'une rotation, 26
 - d'une similitude, 28
 - d'une symétrie, 27
 - d'une transformation, 22
 - d'une translation, 24
- Ensemble
 - de points, 11
- Équation
 - dans $\mathbb{C}$, 5
- Fermé
 - de $\mathbb{C}$, 13
- Fonction
 - affine complexe, 28
- Galois, 1
- Gauss, 1
- Grothendieck, 1
- Groupe
 - commutatif, 7
- Homothétie, 24
- Humour, 29
- Milieu
 - Affixe du, 11
- Module
 - Interprétation géométrique du, 13
- Médiatrice, 13, 26
- Nombre
 - complexe, 2, 22
 - de Fermat, 1
- Norme
 - d'un vecteur, 13
- Orthogonalité, 16
- Ouvert
 - de $\mathbb{C}$, 13
- Produit
 - scalaire, 16
- Racine
 - n -ième d'un nombre complexe, 7, 10
 - n -ième de l'unité, 7
 - carrée d'un nombre complexe, 2
- Rotation, 25
- Similitude, 28
- Somme
 - des racines de l'unité, 9
- Symétrie
 - axiale, 26, 27
- Transformation
 - du plan, 22
- Translation, 23
- Triangle, 20
- Vecteur
 - colinéaire, 17
 - orthogonal, 17

