

Les Nombres Complexes II

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 10



① Racines n -ièmes d'un nombre complexe

② Ensembles de points

③ Transformations du plan

(Hors-Programme)





La résolution d'équations polynomiales par radicaux a motivé une part importante de la recherche mathématique, jusqu'à ce que Niels Abel^[1] prouve l'impossibilité de résoudre l'équation général du 5-ième degré par radicaux.

Peu de temps après, Évariste Galois^[2] élucide complètement le problème, dans un mémoire rédigé peu avant sa mort prématurée en 1832, et dans une lettre rédigée à la hâte à un ami, la veille du duel qui devait lui être fatal (il avait alors 20 ans). Dans ce mémoire, on y trouve en particulier les balbutiements de la théorie des groupes.

[1]. Niels Henrik Abel (**1802-1829**) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

[2]. Évariste Galois est un mathématicien français, né le 25 octobre **1811** à Bourg-Égalité (aujourd'hui Bourg-la-Reine) et mort le 31 mai **1832** à Paris. On a donné son nom à une branche des mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notion de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants.





Carl Friedrich Gauss montre que les racines de $X^n - 1$ (donc les racines n -ièmes de l'unité), peuvent s'exprimer par radicaux si n est premier.

Il va plus loin, en montrant que si n est un entier premier de la forme $2^{2^k} + 1$, alors les solutions peuvent s'exprimer sous forme de radicaux carrés. Ce résultat amène la constructibilité à la règle et au compas du pentagone (déjà connu depuis bien longtemps), de l'eptadécagone, *i.e.* le polygone à 17 côtés (Gauss en donne une construction) puis des polygones à 257 et 65537 côtés. On ne connaît pas, à ce jour, d'autres nombres premiers de la forme $2^{2^k} + 1$ appelés nombres de Fermat. On ne sait pas s'il y en a d'autres.



Pierre-Laurent Wantzel montre la réciproque en 1837 : les seuls polygones constructibles sont les polygones dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, ou des nombres ayant comme uniques facteurs (qui doivent être simples) ces nombres premiers ou 2 (en multiplicité quelconque). Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

- Racines carrées d'un nombre complexe
- Racines n -ièmes de l'unité
- Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2 Ensembles de points

3 Transformations du plan

(Hors-Programme)



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 1 (Racine carré) :

On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 1 (Racine carrée) :

On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

Exemples 1 :

- 0 admet 0 comme unique racine carrée complexe. C'est le seul à n'en avoir qu'une.
- -1 admet deux racines carrées complexes : i et $-i$ qui sont les racines du polynôme $X^2 + 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$, racines de $X^2 - \alpha$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ alors ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{-\alpha}$, racines de $X^2 + \beta$ où $\beta = -\alpha \geq 0$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

ATTENTION

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il est strictement interdit d'écrire \sqrt{a} .

Par exemple, pour -1 , on aurait alors :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1 !!!$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème I :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Exemples 2 :

- Les racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- Les racines carrées de $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4i$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

🕒 On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $z = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4i$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

- 1 On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $z = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
- 2 Les racines carrées sont alors évidentes à trouver :

$$u_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad u_2 = -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4i$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

④ On pose $u = a + ib$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4i$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

① On pose $u = a + ib$.

$$\textcircled{2} z = u^2 \Leftrightarrow 1 - i\sqrt{3} = a^2 - b^2 + 2iab \text{ et } 2 = |u|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 2ab = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2} \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} \right).$$

Comme $y < 0$, a et b doivent être de signe contraire et on ne garde que celles-ci :

$$u_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \quad \text{et} \quad u = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right).$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 1 :

Déterminer les racines carrées de $-1 + i$ par deux méthodes.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr.}\mathbb{C})$$

On appelle encore **discriminant** de l'équation (Tr.ℂ), noté Δ , le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est **une** racine carrée de Δ .

- Si $\Delta = 0$, (Tr.ℂ) possède une unique solution, dite double : $z = -\frac{b}{2a}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr.C})$$

On appelle encore **discriminant** de l'équation (Tr.C), noté Δ , le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est **une** racine carrée de Δ .

- Si $\Delta = 0$, (Tr.C) possède une unique solution, dite double : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, (Tr.C) possède deux solutions : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 4 $((1 + i)z^2 + (3 + i)z + (-6 + 4i) = 0)$:

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4(1 + i)(-6 + 4i) = 48 + 14i.$$

On cherche $\delta = a + ib$ tels que :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \\ 2ab = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 49 \\ b^2 = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -7 \\ b = -1 \end{cases} \text{ car } ab > 0$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemple 4 ((1 + i)z² + (3 + i)z + (-6 + 4i) = 0) :

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4(1 + i)(-6 + 4i) = 48 + 14i.$$

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$$z_1 = \frac{-(3 + i) - (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{-5 - i}{1 + i} = -3 + 2i, \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-(3 + i) + (7 + i)}{2(1 + i)} = \frac{4}{2(1 + i)} = 1 - i.$$

ATTENTION

Les deux racines **ne** sont absolument **pas** conjuguées.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

① $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

❶ $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$

❷ $z^4 + 1 = 0.$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. \mathbb{C}) si, et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right.$$


I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les racines de (Tr. \mathbb{C}) si, et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right.$

Exemple 5 (Système non linéaire) :

Pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, on introduit donc l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ dont x et y sont les solutions.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 3 :

Trouver deux nombres complexes de somme i et de produit 2 .



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Définition 2 (Racines n -ièmes) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle **racine n -ième** de z tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = z.$$

- On appelle **racine n -ième de l'unité** tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ leur ensemble.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
- L'ensemble \mathbb{U}_n possède une structure de **groupe multiplicatif commutatif** très importante.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
- L'ensemble \mathbb{U}_n possède une structure de **groupe multiplicatif commutatif** très importante.
- Toute racine de l'unité est de module 1 *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\mathcal{U}_1 = \{1\}$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\mathcal{U}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\mathcal{U}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$$

$$\mathcal{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = j^2 = -1 - j$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Autrement dit,

$$\mathcal{U}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$$

$$\mathcal{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$$

$$\mathcal{U}_4 = \{1, -1, i, \bar{i}\}$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Théorème 4 (Caractérisation des racines de l'unité) :

$$\mathcal{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

En particulier, \mathcal{U}_n est constitué de n éléments deux à deux distincts.



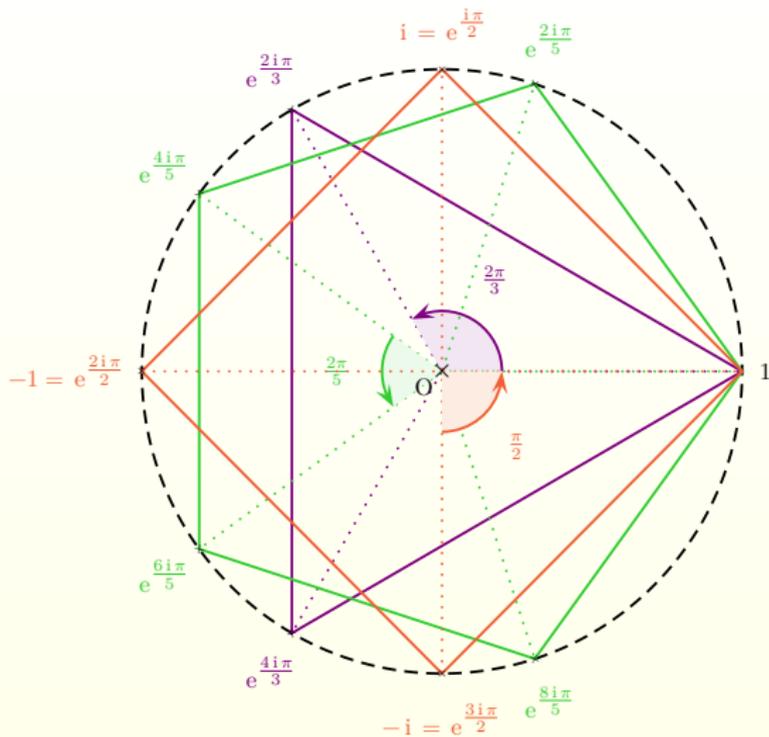


Figure 1 – Polygones réguliers à 3, 4 et 5 sommets.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exercice 4 :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

① $z^3 = -i.$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Exercice 4 :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

① $z^3 = -i.$

② $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1.$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geq 2$ un entier.

Alors :

- Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geq 2$ un entier.

Alors :

- ❶ Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.
- ❷ $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathcal{U}_n \setminus \{1\}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2. Racines n -ièmes de l'unité

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geq 2$ un entier.

Alors :

- ❶ Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{U}_n = \{\omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$.
- ❷ $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathcal{U}_n \setminus \{1\}$.
- ❸ La somme des racines n -ièmes de l'unité est égale à 0 : $\sum_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega = 0$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 Z admet exactement n racines n -ièmes.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 Z admet exactement n racines n -ièmes.
- 2 Plus précisément, si z_0 est une racine n -ième de Z alors les racines n -ièmes de Z sont les

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 Z admet exactement n racines n -ièmes.
- 2 Plus précisément, si z_0 est une racine n -ième de Z alors les racines n -ièmes de Z sont les

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Remarques :

- Pour trouver toutes les racines n -ièmes d'un nombre complexe Z , il suffit donc d'en exhiber une, dite primitive, notée z_0 , et de la multiplier par toutes les racines n -ièmes de l'unité.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 Z admet exactement n racines n -ièmes.
- 2 Plus précisément, si z_0 est une racine n -ième de Z alors les racines n -ièmes de Z sont les

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Remarques :

- Pour trouver toutes les racines n -ièmes d'un nombre complexe Z , il suffit donc d'en exhiber une, dite primitive, notée z_0 , et de la multiplier par toutes les racines n -ièmes de l'unité.
- Géométriquement, toutes les racines n -ièmes sont donc obtenues à partir du point d'affixe z_0 par $n-1$ rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Exercice 5 :

- ① Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.



I. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Exercice 5 :

- 1 Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- 2 En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.



II. Ensembles de points

1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2 **Ensembles de points**

- Affixe d'un vecteur
- À partir du module
- À partir de l'argument
- Alignement, orthogonalité, angles

3 Transformations du plan

(Hors-Programme)



II. Ensembles de points

Définition 3 (Ensemble de points) :

Il s'agit de déterminer un ensemble (\mathcal{E}) de points M du plan complexe dont les affixes z vérifient une certaine propriété.



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Rappel :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Rappel :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Proposition (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[M_1M_2]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$.



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Rappel :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Proposition (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[M_1M_2]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

En particulier, si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, on retrouve la relation familière :

$$\overrightarrow{AB}(z_{\overline{AB}}) = (z_B - z_A) = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$



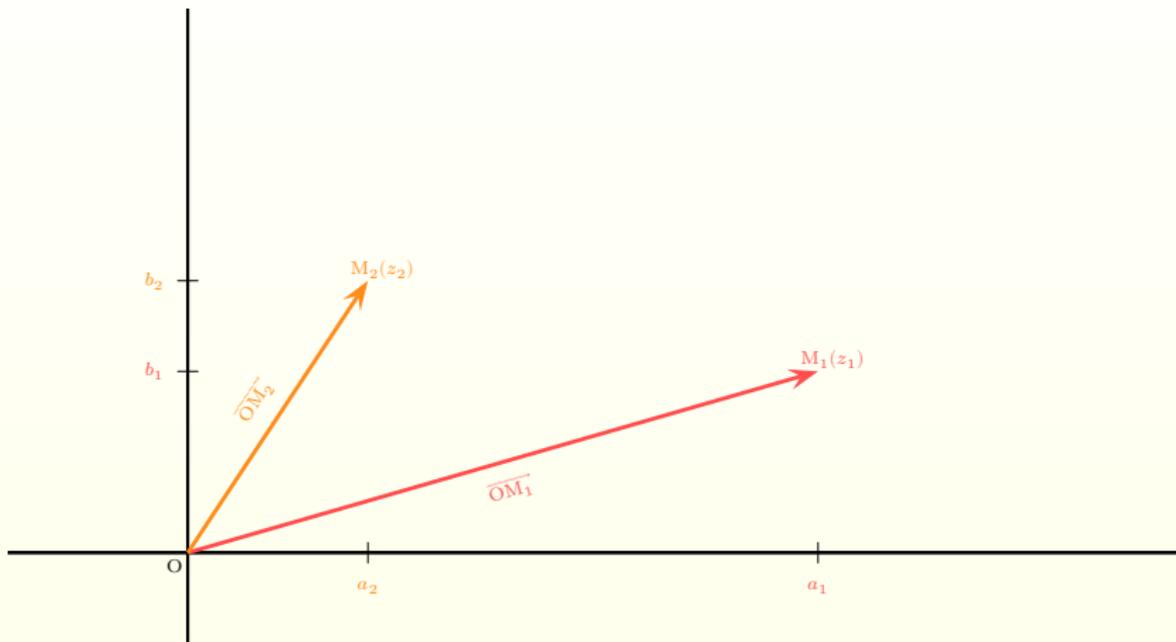


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.



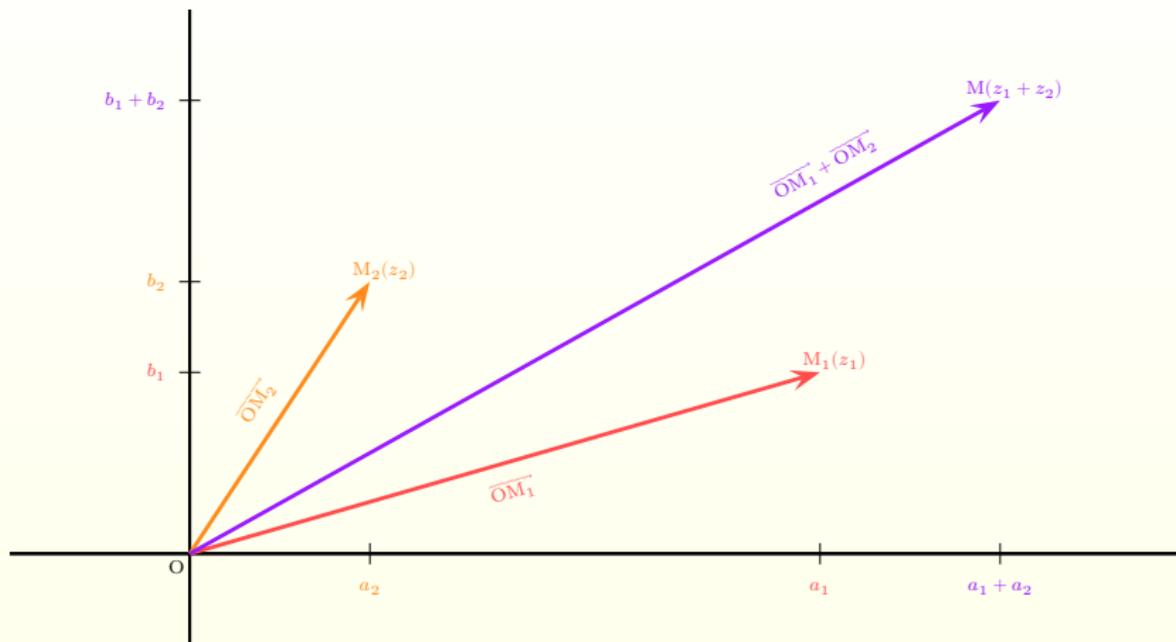


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.



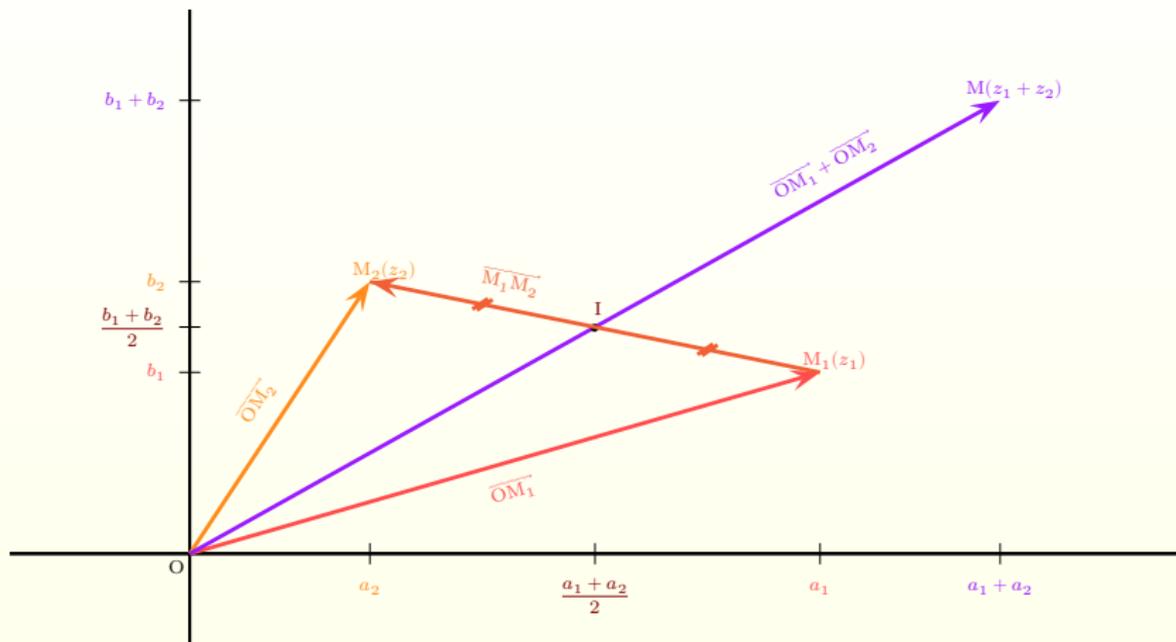


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\frac{3-2i}{2}$, $\frac{1}{3} - i$ et $-3 - i$.

- 1 Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\frac{3-2i}{2}$, $\frac{1}{3} - i$ et $-3 - i$.

- 1 Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].
- 2 Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.



II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\frac{3-2i}{2}$, $\frac{1}{3} - i$ et $-3 - i$.

- 1 Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
- 2 Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
- 3 Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur \overline{BC} .



II. Ensembles de points

2. À partir du module

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $A(z_A)$ et $B_2(z_B)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B .

■ $\|\overrightarrow{OA}\| = |z_A|$.

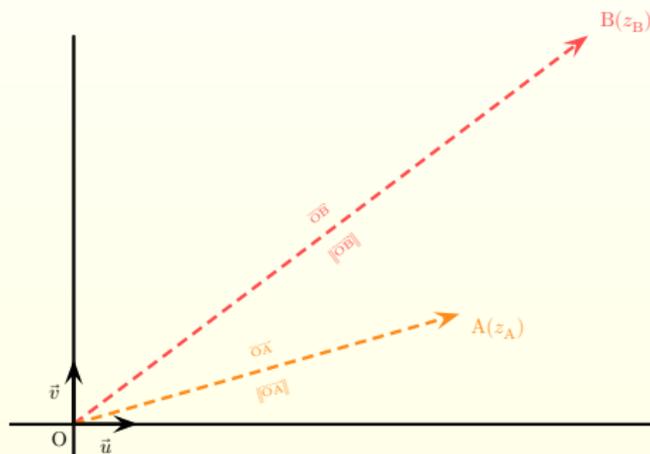


Figure 3 – Inégalité triangulaire.



II. Ensembles de points

2. À partir du module

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $A(z_A)$ et $B_2(z_B)$ deux points du plan complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$) d'affixe respective z_A et z_B .

$$\blacksquare \|\vec{OA}\| = |z_A|.$$

$$\blacksquare \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|.$$

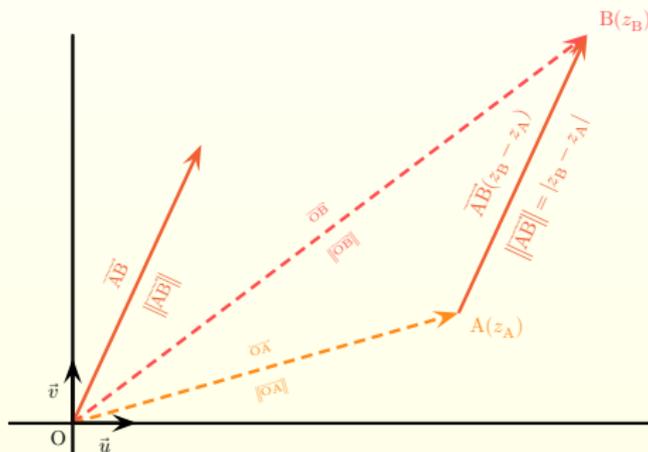


Figure 3 – Inégalité triangulaire.



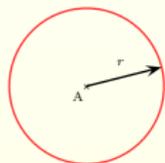
II. Ensembles de points

2. À partir du module

Corollaire 1 (Lignes de niveau dans \mathbb{C}) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .



Cercle

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans \mathbb{C} .



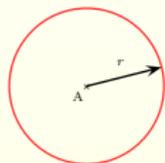
II. Ensembles de points

2. À partir du module

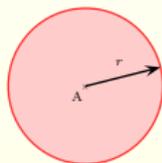
Corollaire I (Lignes de niveau dans \mathbb{C}) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

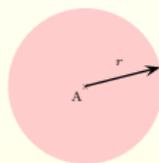
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| < r$ (resp. $|z - z_A| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r .



Cercle



Disque fermé



Disque ouvert

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans \mathbb{C} .



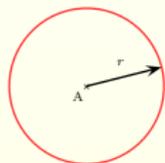
II. Ensembles de points

2. À partir du module

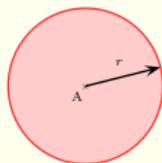
Corollaire I (Lignes de niveau dans \mathbb{C}) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

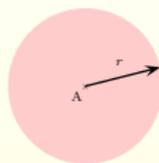
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| < r$ (resp. $|z - z_A| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r .
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



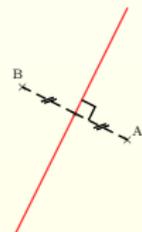
Cercle



Disque fermé



Disque ouvert



Médiatrice

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans \mathbb{C} .



II. Ensembles de points

2. À partir du module

Exercice 1 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

① $|z - i| = 5$



II. Ensembles de points

2. À partir du module

Exercice 1 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

① $|z - i| = 5$

② $|z - 1 + i| = |z - i|$



II. Ensembles de points

2. À partir du module

Exercice 1 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

❶ $|z - i| = 5$

❷ $|z - 1 + i| = |z - i|$

❸ $|z - i| < |z + 2|$



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B .

$$\bullet (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi].$$

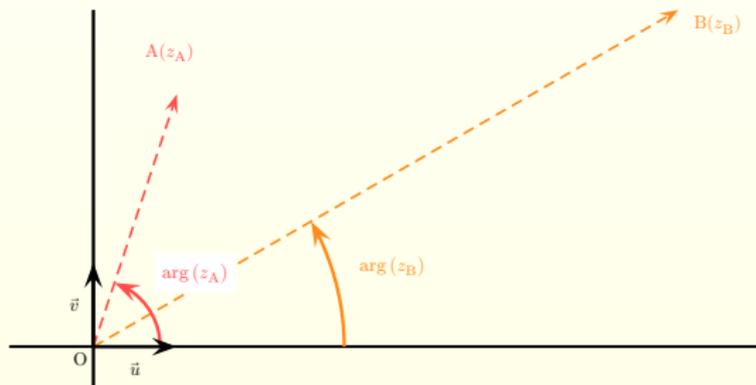


Figure 5 – Angle de deux vecteurs



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$) d'affixe respective z_A et z_B .

❶ $(\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi]$.

❷ $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$.

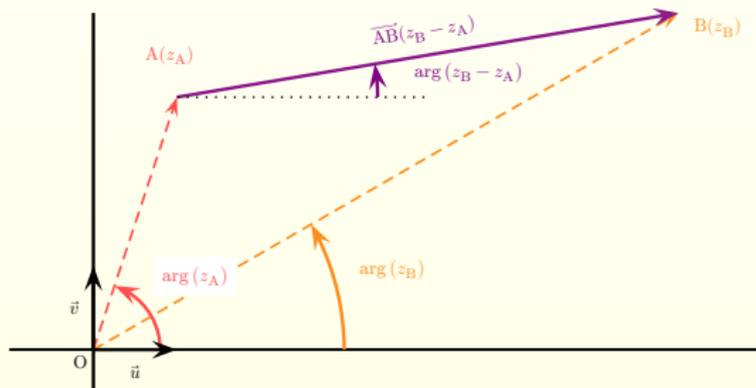


Figure 5 – Angle de deux vecteurs



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$) d'affixe respective z_A et z_B .

$$\textcircled{1} (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi]. \quad \textcircled{2} (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$\textcircled{3} (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) [2\pi].$$

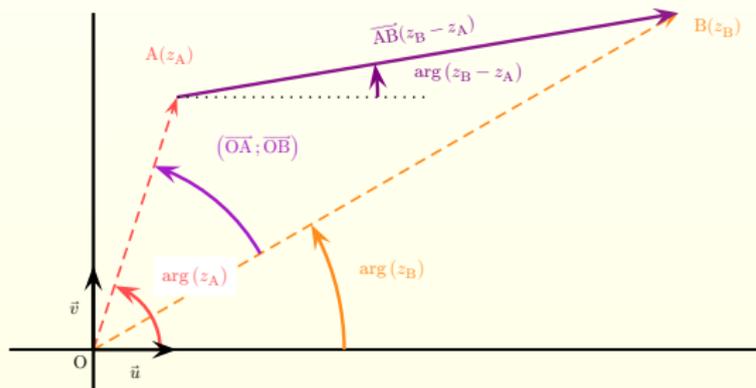


Figure 5 – Angle de deux vecteurs



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exemple 1 :

On donne $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur \overline{AB} , la longueur AB et l'angle $(\vec{u}; \overline{AB})$?

■ $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$. Donc $\overline{AB}(-3; -3)$.



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exemple 1 :

On donne $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur \overline{AB} , la longueur AB et l'angle $(\vec{u}; \overline{AB})$?

- $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$. Donc $\overline{AB}(-3; -3)$.
- $AB = |z_B - z_A| = |-3 - 3i| = 3\sqrt{2}$.



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exemple 7 :

On donne $A(2 + i)$ et $B(-1 - 2i)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur \overline{AB} , la longueur AB et l'angle $(\vec{u}; \overline{AB})$?

- $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$. Donc $\overline{AB}(-3; -3)$.
- $AB = |z_B - z_A| = |-3 - 3i| = 3\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $z_{\overline{AB}}$. On a :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

$$\text{Donc } (\vec{u}; \overline{AB}) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$$



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Corollaire 2 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D .

Alors :
$$(\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$

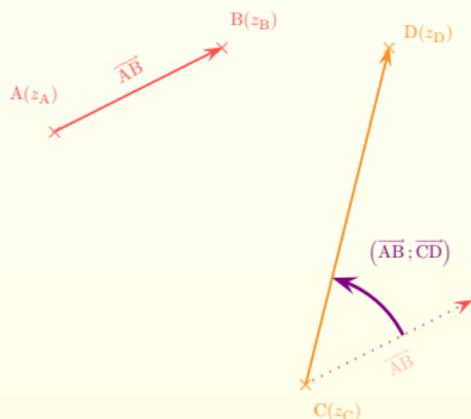


Figure 6 – Angle formé par 4 points.



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

$$\textcircled{1} \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

$$\textcircled{1} \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\textcircled{2} \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$$



II. Ensembles de points

3. À partir de l'argument

Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π .

$$\textcircled{1} \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\textcircled{2} \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \\ |z| = 2. \end{cases}$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Lemme I (Produit scalaire et déterminant) :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$

Remarques :

- Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnaît le **produit scalaire** des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Lemme I (Produit scalaire et déterminant) :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$

Remarques :

- Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnaît le **produit scalaire** des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$

- La deuxième expression s'appelle le **déterminant** des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Lemme I (Produit scalaire et déterminant) :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + ib$ et $z_v = a' + ib'$.

$$\blacksquare \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'.$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b.$$

Théorème 10 (Colinéarité et orthogonalité de vecteurs) :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

$$\blacksquare \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si, et seulement si } \operatorname{Re}(z_v \overline{z_u}) = 0.$$

$$\blacksquare \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si, et seulement si } \operatorname{Im}(z_v \overline{z_u}) = 0.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

On en déduit une caractérisation plus commode :

Corollaire 3 :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

$(\vec{u} \text{ non nul})$ $(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls})$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Corollaire 4 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D .

$$A, B \text{ et } C \text{ sont distincts et alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Corollaire 4 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D .

$$\begin{array}{l} \text{A, B et C sont} \\ \text{distincts et alignés} \end{array} \iff \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont} \\ \text{colinéaires non nuls} \end{array} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$
$$\begin{array}{l} (AB) // (CD) \end{array} \iff \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont} \\ \text{colinéaires non nuls} \end{array} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Corollaire 4 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D .

$$\begin{array}{llll} \text{A, B et C sont} & \iff & \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont} & \iff & \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \\ \text{distincts et alignés} & & \text{colinéaires non nuls} & & \\ \\ (\text{AB}) // (\text{CD}) & \iff & \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont} & \iff & \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \\ & & \text{colinéaires non nuls} & & \\ \\ (\text{AB}) \perp (\text{CD}) & \iff & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 & \iff & \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}. \end{array}$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Remarque : En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si

$$\operatorname{Im}((z_C - z_A)(\overline{z_B - z_A})) = 0 \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

théorème (10) *corollaire (4)*

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_C - z_A = k(z_B - z_A).$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Remarque : En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}((z_C - z_A)(\overline{z_B - z_A})) = 0 &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \\ &\text{théorème (10)} \qquad \qquad \qquad \text{corollaire (4)} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_C - z_A = k(z_B - z_A). \end{aligned}$$

La première assertion signifie donc simplement que deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires si, et seulement si leur affixe $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$ sont proportionnelles dans \mathbb{R} .



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz soient alignés.



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

ABC est isocèle en $A \iff AB = AC$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$ABC \text{ est isocèle en } A \iff AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$$

ou

$$\Leftrightarrow AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$$

ou

$$\Leftrightarrow AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi].$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$$

ou

$$\Leftrightarrow AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

ou

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$$

ou

$$\Leftrightarrow AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

ou

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi].$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

ABC est rectangle en A



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right.$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff \begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle en A} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AC}} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(\overline{\text{AB}}; \overline{\text{AC}}) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

ABC est rectangle isocèle en A



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

ABC est rectangle isocèle en A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $AB = AC$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle isocèle en A} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } AB = AC \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i. \end{aligned}$$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i , z et iz forment un triangle équilatéral.



1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

2 Ensembles de points

3 **Transformations du plan**

(Hors-Programme)

- Représentation complexe
- Translation
- Homothétie
- Rotation
- Symétrie axiale



1. Représentation complexe

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M'.$$

- Lorsque \mathcal{F} est bijective, on dit que \mathcal{F} est une **transformation du plan**.



1. Représentation complexe

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M'.$$

- Lorsque \mathcal{F} est bijective, on dit que \mathcal{F} est une **transformation du plan**.
- Lorsque \mathcal{F} est une transformation du plan, la fonction

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z'$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(M) = M'$ est appelée **représentation** ou **représentation complexe** de \mathcal{F} .



1. Représentation complexe

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M'.$$

- Lorsque \mathcal{F} est bijective, on dit que \mathcal{F} est une **transformation du plan**.
- Lorsque \mathcal{F} est une transformation du plan, la fonction

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z'$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(M) = M'$ est appelée **représentation** ou **représentation complexe** de \mathcal{F} .

On l'écrit souvent $z' = f(z)$ au lieu de $z \mapsto f(z)$.



1. Représentation complexe

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M'.$$

- Lorsque \mathcal{F} est bijective, on dit que \mathcal{F} est une **transformation du plan**.
- Lorsque \mathcal{F} est une transformation du plan, la fonction

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z'$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(M) = M'$ est appelée **représentation** ou **représentation complexe** de \mathcal{F} .

Exemple 8 :

la symétrie axiale d'axe (Ox) est une transformation du plan.

Son écriture complexe est : $z \mapsto \bar{z}$.

1. Représentation complexe

Exercice II :

- 1 Donner l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O .



1. Représentation complexe

Exercice II :

- 1 Donner l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O .
- 2 Donner l'écriture complexe de la symétrie axiale d'axe (Oy) .



2. Translation

Définition 5 :

Soit \vec{u} un vecteur du plan.

On appelle **translation de vecteur \vec{u}** , notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$



2. Translation

Définition 5 :

Soit \vec{u} un vecteur du plan.

On appelle **translation de vecteur \vec{u}** , notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

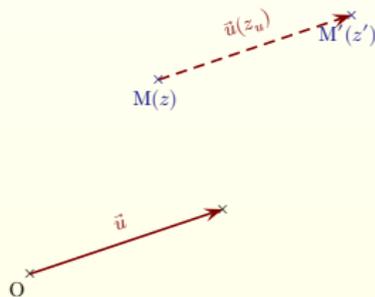


Figure 7 – Translation de vecteur \vec{u} .



2. Translation

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u} est :

$$z' = z + a$$



2. Translation

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u} est :

$$z' = z + a$$

Remarque : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$



3. Homothétie

Définition \hookrightarrow :

Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle **homothétie de centre Ω et de rapport k** , notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}.$$



3. Homothétie

Définition 6 :

Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle **homothétie de centre Ω et de rapport k** , notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}.$$

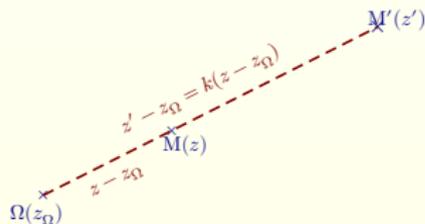


Figure 8 – Homothétie de centre Ω et de rapport r .



3. Homothétie

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$



3. Homothétie

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k .



3. Homothétie

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k .

Remarque : $h_{\Omega, k}^{-1} = h_{\Omega, \frac{1}{k}}$



4. Rotation

Définition 1 :

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** , notée $r_{\Omega, \theta}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$



4. Rotation

Définition 1 :

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** , notée $r_{\Omega, \theta}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

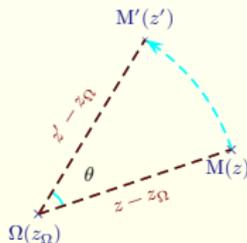


Figure 9 – Rotation de centre Ω et d'angle θ .



4. Rotation

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$



4. Rotation

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ , $z \mapsto e^{i\pi}z$ celle de la symétrie de centre O.



4. Rotation

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ , $z \mapsto e^{i\pi}z$ celle de la symétrie de centre O.

Remarque : $r_{\Omega,\theta}^{-1} = r_{\Omega,-\theta}$.



5. Symétrie axiale

Définition 8 :

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan.

On appelle **symétrie d'axe (\mathcal{D})** , notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que (\mathcal{D}) soit la médiatrice du segment $[MM']$.



5. Symétrie axiale

Définition 8 :

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan.

On appelle **symétrie d'axe (\mathcal{D})** , notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de \mathcal{P} qui, à tout point M associe le point M' tel que (\mathcal{D}) soit la médiatrice du segment $[MM']$.

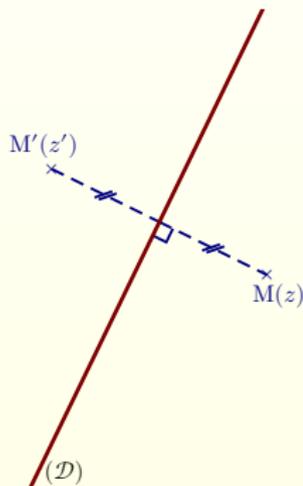


Figure 10 – Symétrie d'axe (\mathcal{D}) .



5. Symétrie axiale

Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit (\mathcal{D}) une droite passant par le point A d'affixe z_A , et de vecteur directeur unitaire \vec{u} , d'affixe $z_{\vec{u}}$.

L'écriture complexe de symétrie orthogonale d'axe (\mathcal{D}) est :

$$z' - z_A = z_{\vec{u}}^2 (\bar{z} - \bar{z}_A).$$



5. Symétrie axiale

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.



5. Symétrie axiale

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.

Les homothéties : $z' = k(z - \omega) + \omega$.



5. Symétrie axiale

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.

Les homothéties : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Les rotations : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.



5. Symétrie axiale

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$:

Les translations : $z' = z + a$.

Les homothéties : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Les rotations : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Les symétries : $z' = z_{\bar{u}}^2(\bar{z} - \bar{z}_A) + z_A$.



5. Symétrie axiale

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de \mathbb{C}) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

- ❶ Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

5. Symétrie axiale

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de \mathbb{C}) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

- ❶ Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
 - ❶ Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.



5. Symétrie axiale

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de \mathbb{C}) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

- ❶ Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
 - ❶ Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
 - ❷ Si $a = re^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.



5. Symétrie axiale

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de \mathbb{C}) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

❶ Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

- ❶ Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
- ❷ Si $a = re^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.

On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω , de rapport r et d'angle θ .

5. Symétrie axiale

Réciproquement, on montre qu'une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de \mathbb{C}) :

Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

① Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

① Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

② Si $a = re^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.

On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω , de rapport r et d'angle θ .

② Soit $\varphi : z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a = re^{i\theta} \neq 0$ et $u = e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Alors φ est la représentation de la composée d'une symétrie d'axe (\mathcal{D}) de vecteur directeur \vec{u} et passant par A , d'une translation de vecteur $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (un glissement le long de la droite (\mathcal{D})) et d'une homothétie de centre O et de rapport r .

5. Symétrie axiale

Exercice 12 :

Caractériser la transformation associée à la fonction

$$f : z \mapsto 2iz + 1.$$



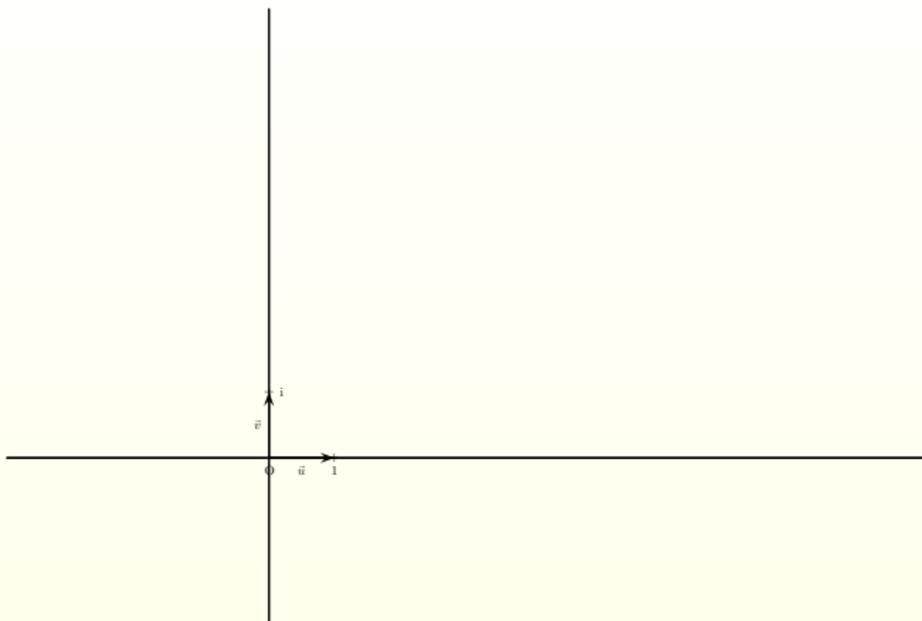


Figure 11 – Le plan complexe



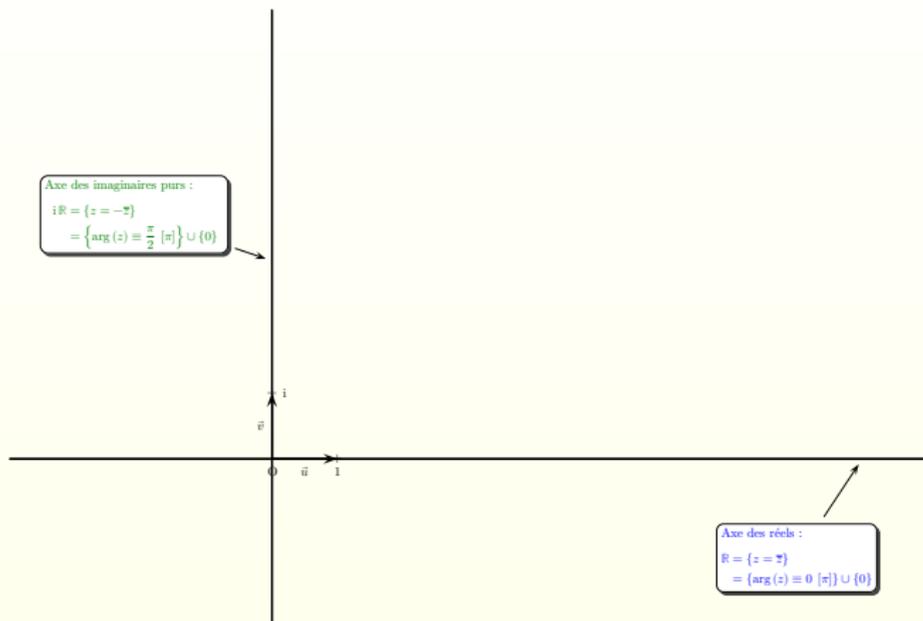


Figure 11 – Le plan complexe



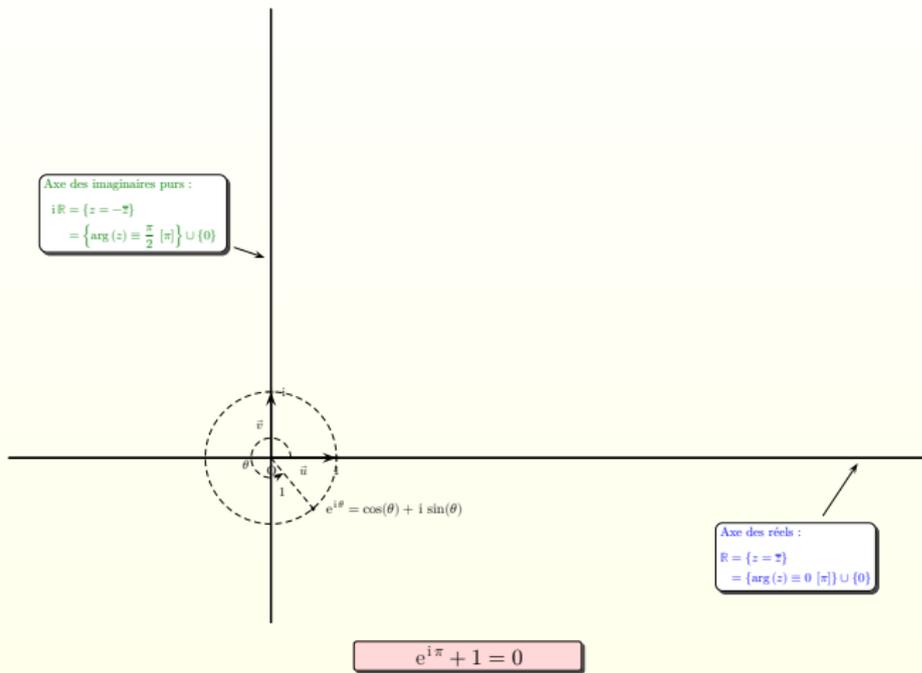


Figure 11 – Le plan complexe



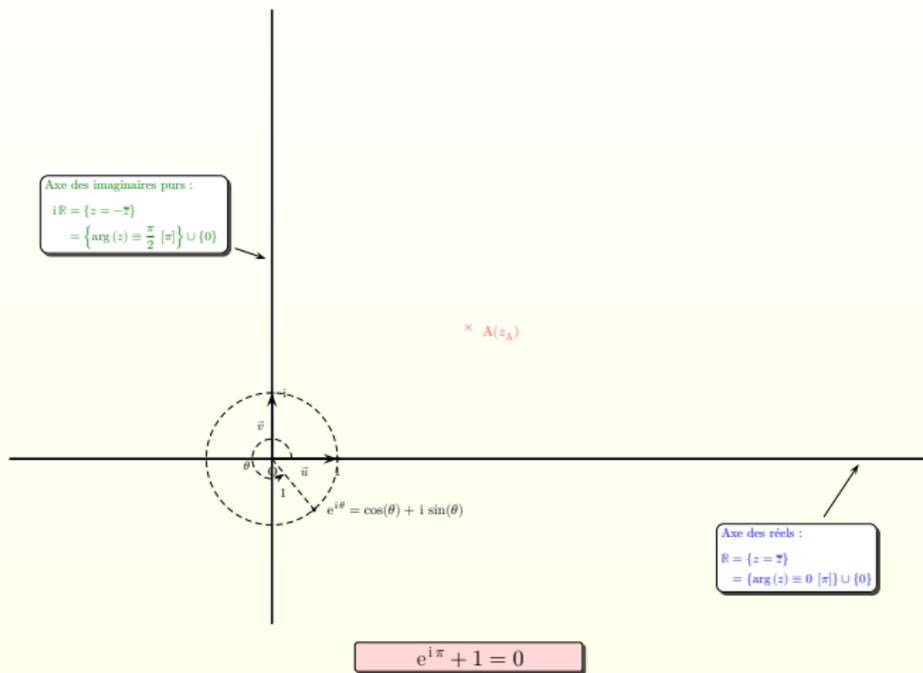


Figure 11 – Le plan complexe



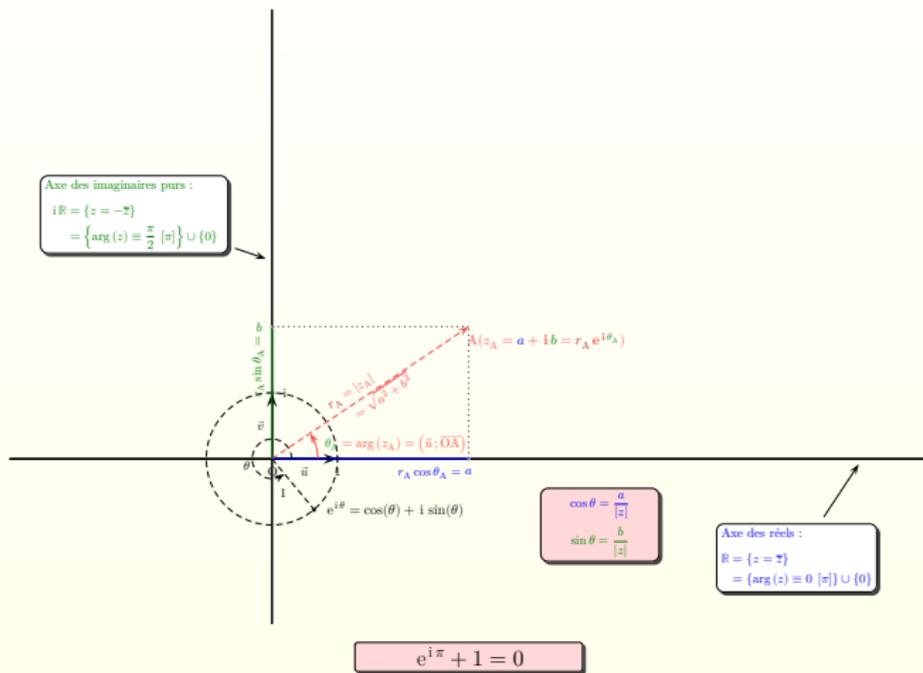


Figure 11 – Le plan complexe



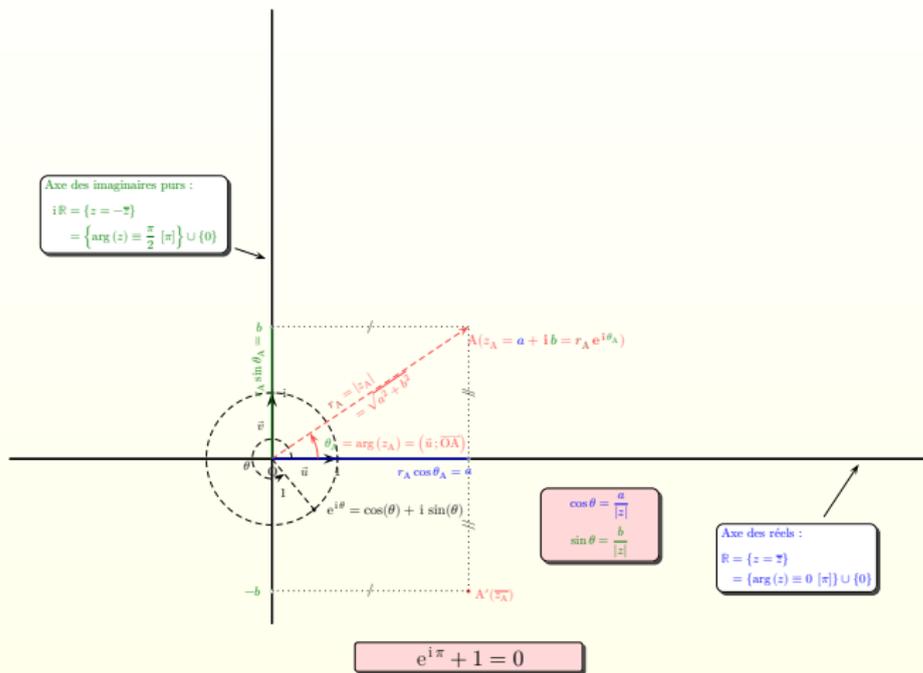


Figure 11 – Le plan complexe



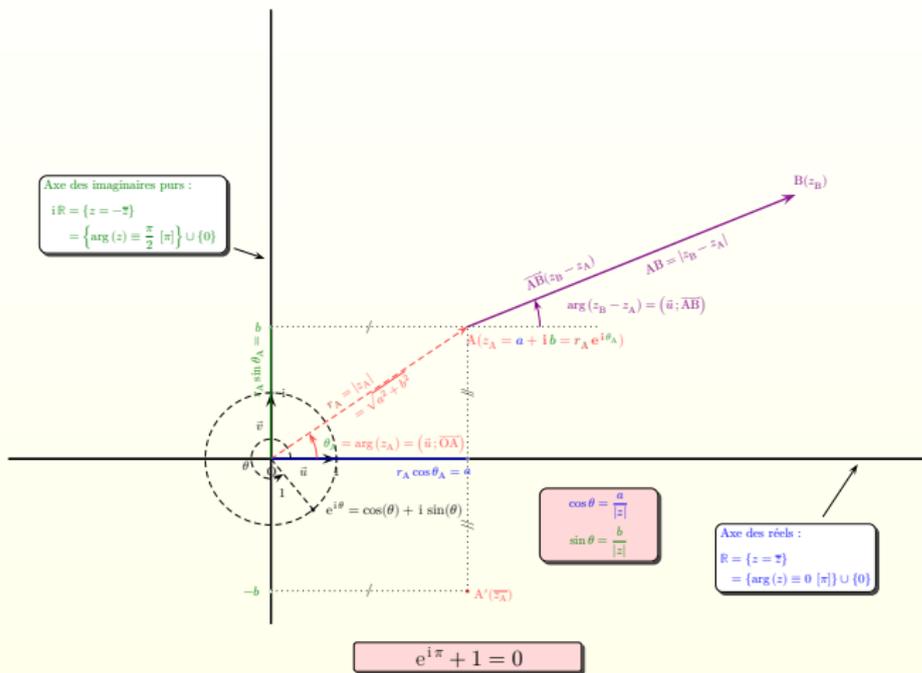


Figure 11 – Le plan complexe



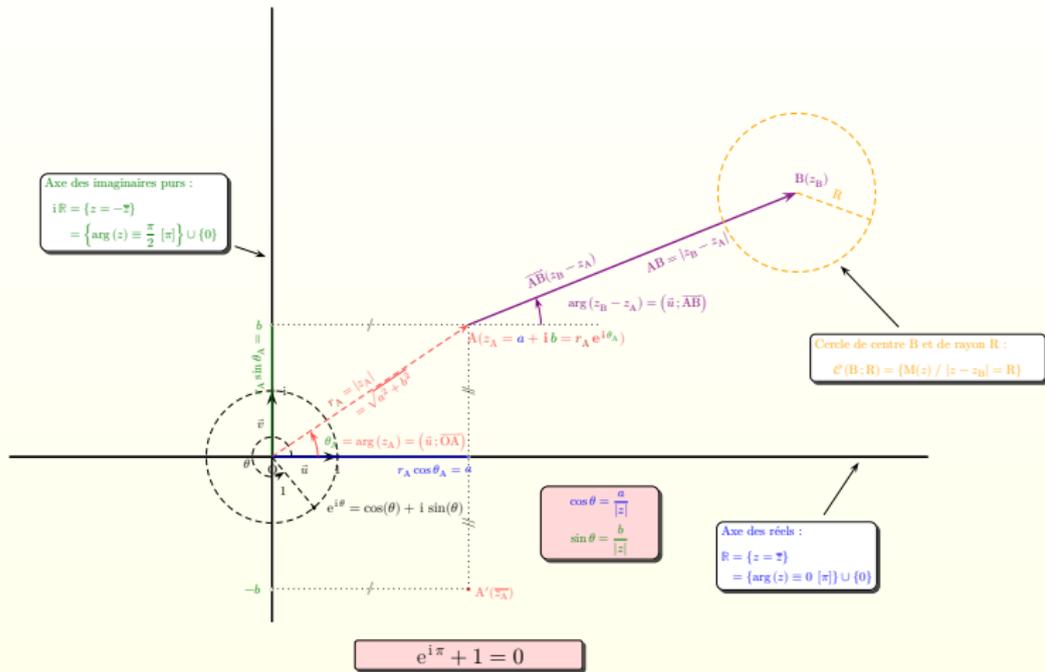


Figure 11 – Le plan complexe



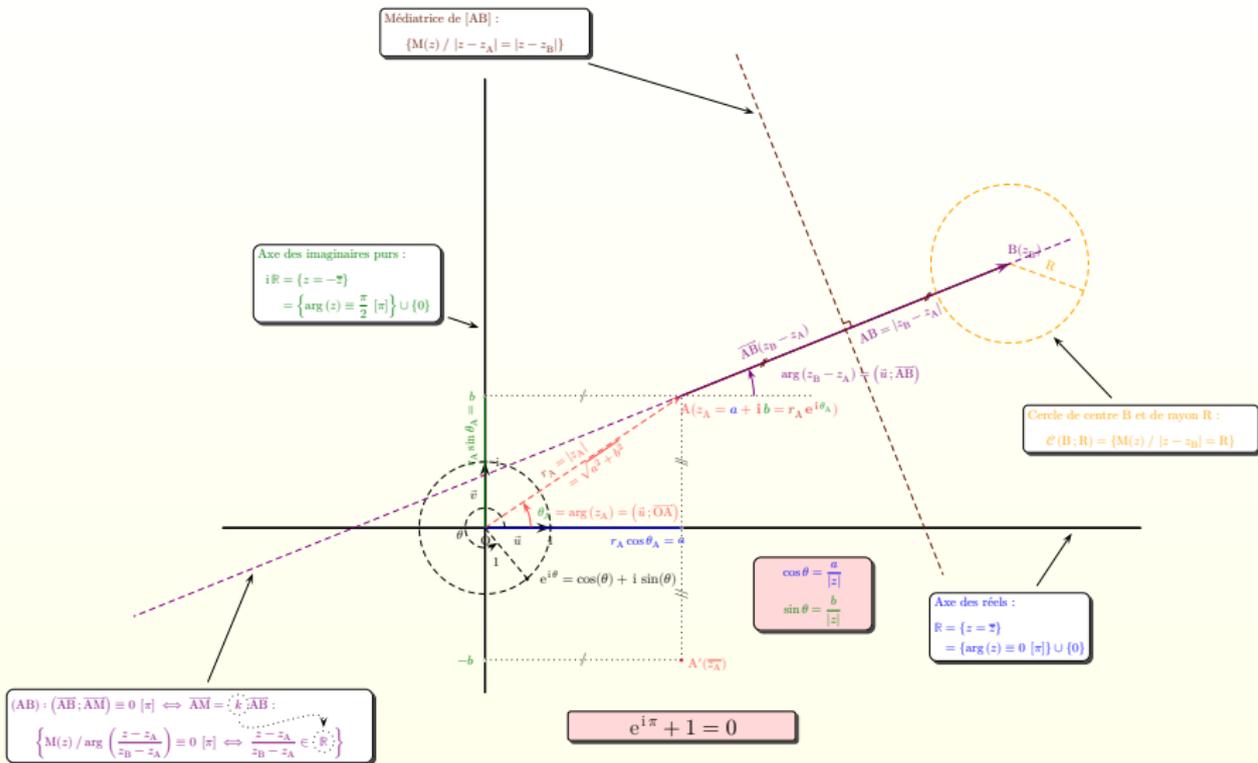


Figure 11 – Le plan complexe



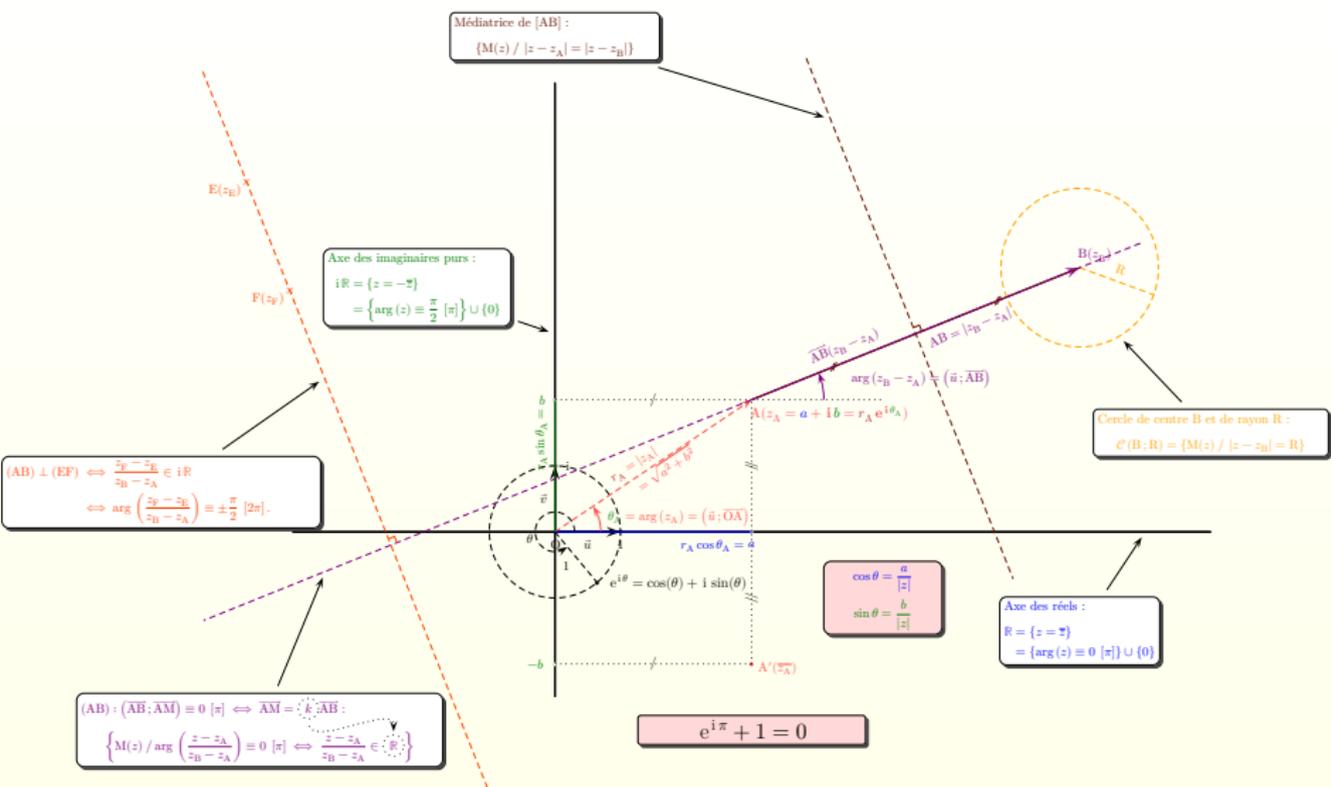


Figure 11 – Le plan complexe



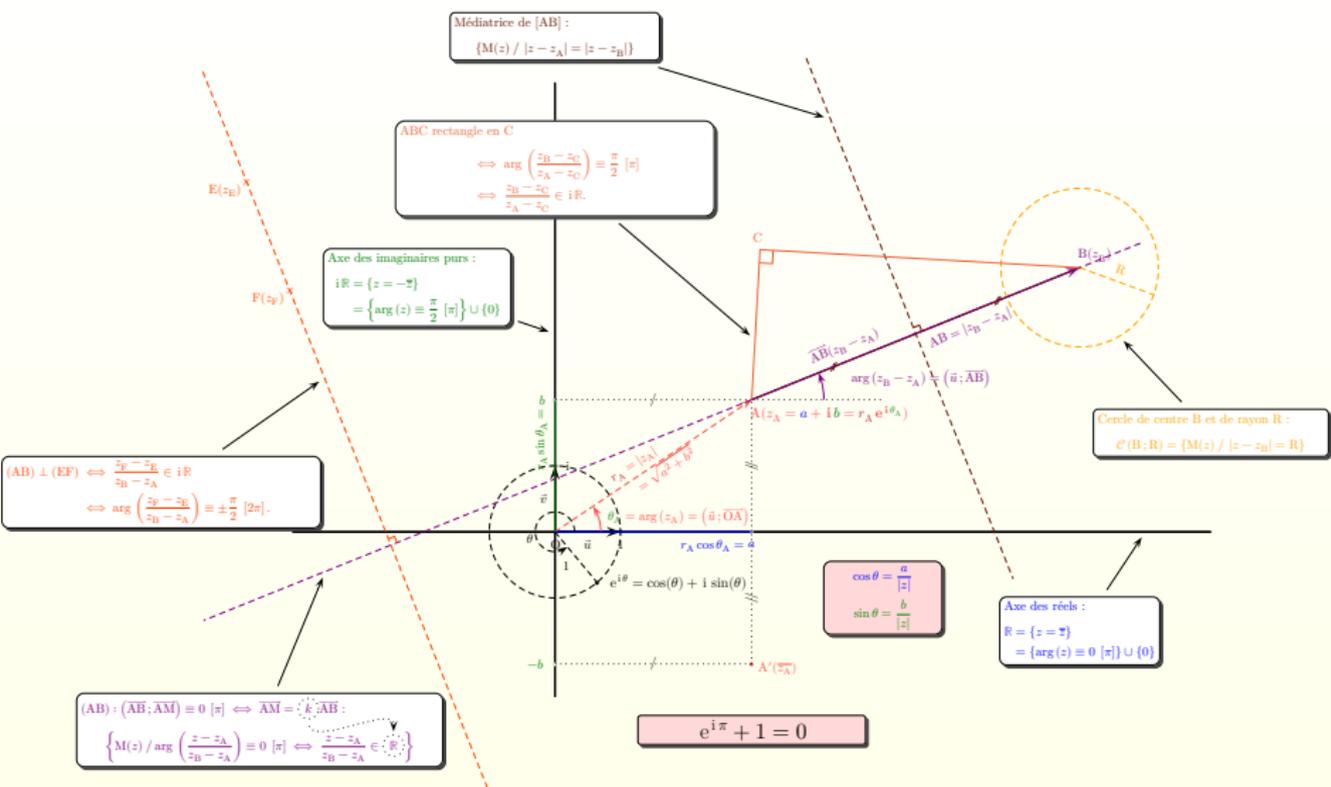


Figure 11 – Le plan complexe



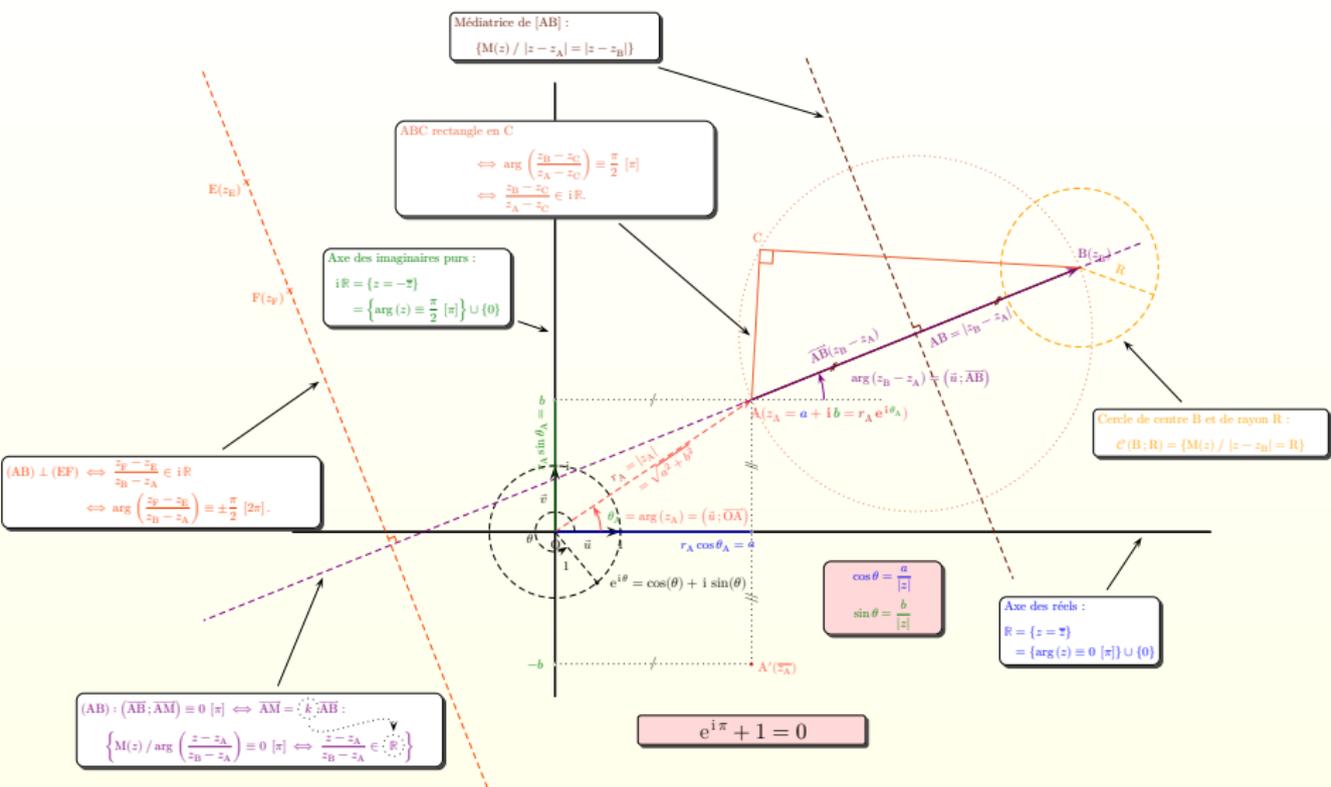


Figure 11 – Le plan complexe



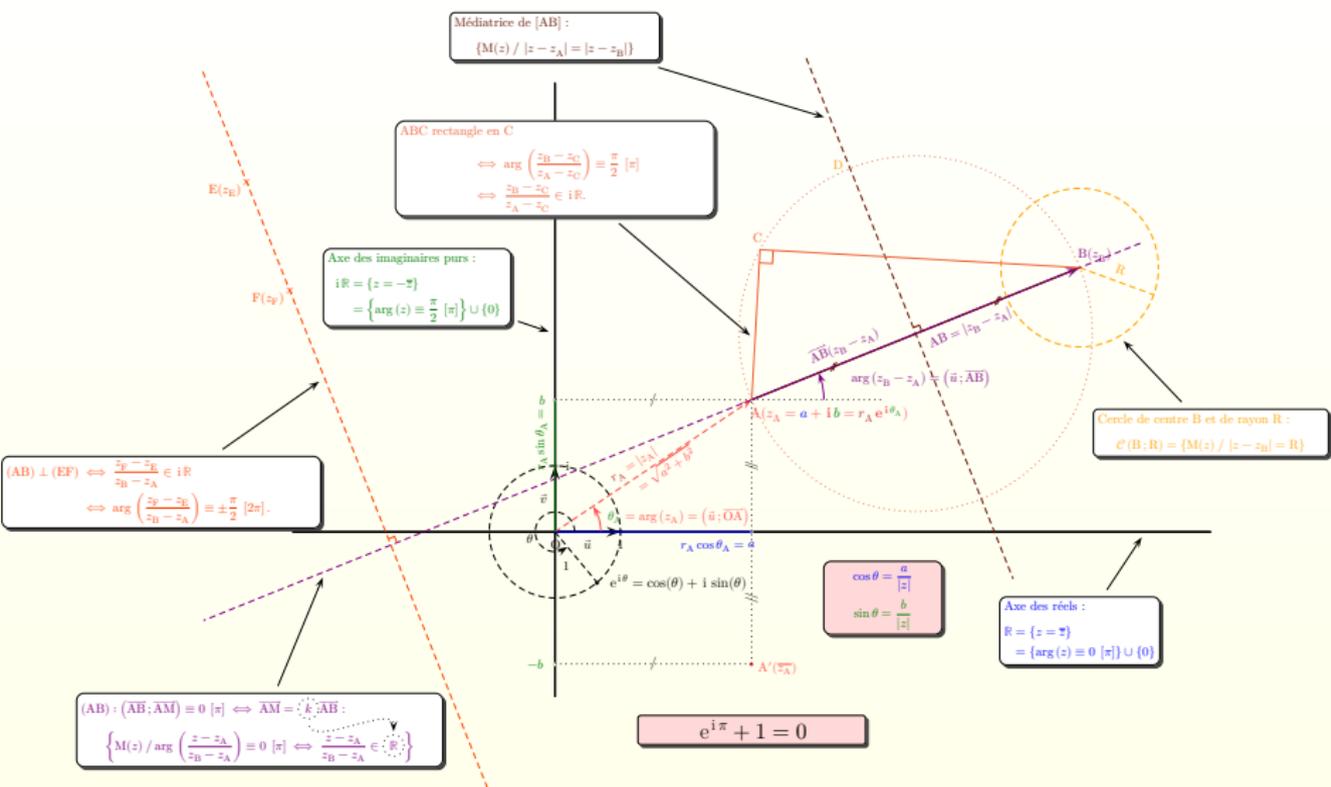


Figure 11 – Le plan complexe



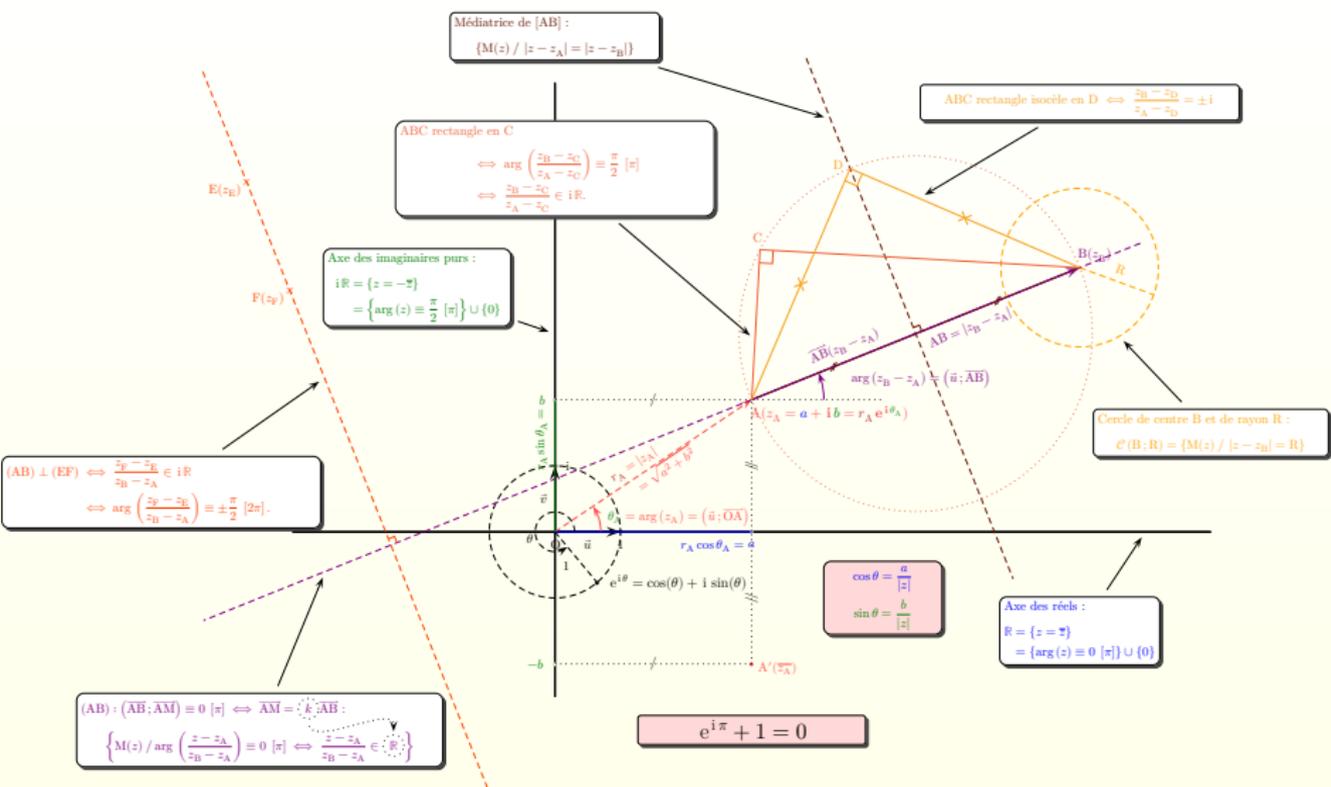


Figure 11 – Le plan complexe



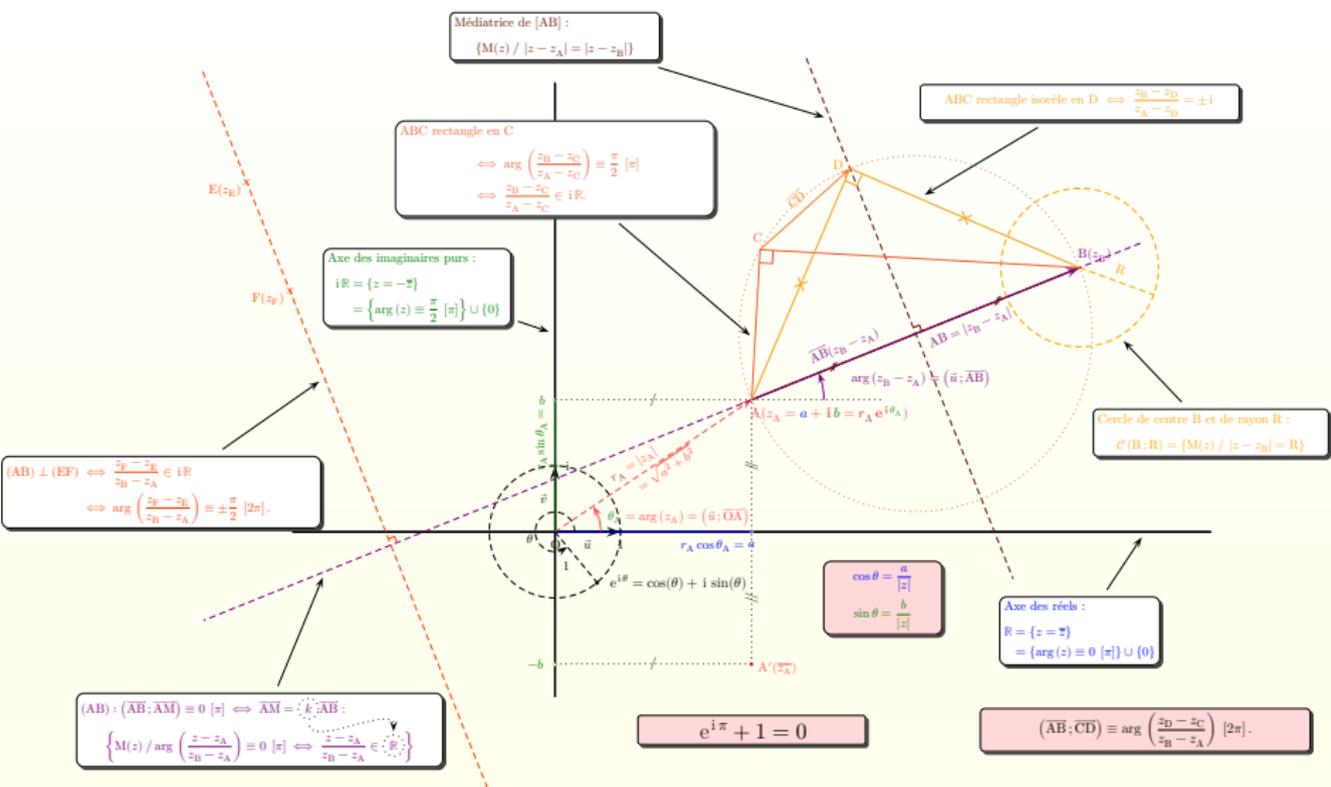


Figure 11 – Le plan complexe

