Chapitre

XI Équations différentielles (linéaires)

CONTENU

Remarques liminaires :

1. *Dans tout ce chapitre,* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes.*

   Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ *où* $\mathbb{K}$ *désigne l'un des ensembles* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *suivant la situation.*
2. *L'ensemble* E *considéré au cours de la première section sera supposé stable par combinaisons linéaires* i.e.

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in \mathrm{E}.$$

I/ Équations et opérateurs linéaires

I.1 Linéarité et conséquences

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles stables par combinaisons linéaires.

Un opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est dit *linéaire* si :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{T}(\lambda x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda \mathrm{T}(x) +_{\mathrm{F}} \mathrm{T}(y).$$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathscr{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathscr{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{ \text{Suites convergentes} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
$\vec{\mathscr{P}}$ ou $\vec{\mathscr{E}}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f' + af,\ a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda\,(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'' + af' + bf,\ a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g) + b(\lambda f + g) = \lambda\,(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)$

En particulier, si E est non vide alors $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{T}(x - x) = \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(x) \implies \mathrm{T}(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

Définition 2 : Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

— On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \tag{$\mathcal{E}$}$$

  — $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  — b en est appelé le *second membre*.
  — On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une *solution particulière* et est notée en général y_p.

— On appelle *équation homogène associée* à $(\mathcal{E})$ ou *sans second membre* toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = 0. \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

  — On note $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.

Théorème 1 (Principe de superposition) :
Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

   On dit que $\mathcal{S}_0$ est un *sous-espace vectoriel* de E.
2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\ \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

   On dit que $\mathcal{S}$ est un *sous-espace affine* de E dirigé par $\mathcal{S}_0$.

Toute solution générale d'une équation linéaire est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

ATTENTION

Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Méthode 1 (Résoudre une équation linéaire) :
Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p.
3. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$ où $y_0 \in \mathcal{S}_0$.

Exemple 2 : Posons $\mathrm{E} = \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T l'opérateur différentiel et $b = \cos$.

On considère l'équation linéaire :

$$\mathrm{T}(f) = \cos \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).$$

1. Les solutions de l'équation homogène associée $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\mathcal{S}_0 = \{x \longmapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. La fonction $y_p = \sin$ est une solution particulière.

Il ne reste plus qu'à additionner :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \Big\{x \longmapsto \sin(x) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$

I.2 Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) : Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

— On appelle *équation différentielle linéaire* d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

— On appelle *équation homogène* associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

— On appelle *ordre* d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.

— *Résoudre* ou *intégrer* une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ solutions de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle à préciser.

— On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une *solution particulière*.

Vocabulaire et notations :

— On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».

— On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x, et x ou t sa variable.

— Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est *normalisée* ou *résolue*.

Exemples 3 :

— $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

— $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

— $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.

En effet, $x \longmapsto x$ en est solution mais pas $x \longmapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du théorème (2).

— $2y' - y = e^x$ n'est pas homogène.

Remarques :

— La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.

— On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.

Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

Exemples 4 (Un peu de physique) :

— La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $\text{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\text{RC}u' + u = \text{E}(t).$$

— L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{L}i' + \mathrm{R}i = \mathrm{E}(t).$$

— La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, la vitesse de désintégration $y'(t)$ est proportionnelle à sa concentration dans un rapport de $1/8000$ par an et vérifie donc l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation (datation au carbone 14).

— L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

— L'évolution au cours du temps de θ l'angle formé par un pendule de longueur ℓ et de masse m avec la verticale est donnée par l'équation différentielle **non** linéaire d'ordre 2 :

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0.$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :
$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E_1}$$
2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :
$$\mathrm{e}^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E_2}$$
3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f soit solution.

II/ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre, **résolues** (i.e. le coefficient de y' vaut 1) :

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{EDL_1}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

L'équation homogène associée (EDL_1) s'écrit :

$$y' + a(x)y = 0. \tag{$(\mathrm{EDL}_1)_0$}$$

À retenir 1 : Solution générale de (EDL_1) = Solution particulière de (EDL_1) + Solution générale de l'équation homogène $(\text{EDL}_1)_0$

II.1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :
Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

ATTENTION Il n'y a qu'une solution de $(\text{EDL}_1)_0$ qui s'annule : la fonction nulle.

Exemple 5 : Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 : Considérons $(1 + x^2)y' + y = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

1. L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente.

D'après le théorème (2), la solution générale est donc

$$x \longmapsto 1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan(x)},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 : Considérons $y' + xy = x$.

1. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.

3. Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$x \longmapsto 1 + \lambda \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 :
Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

1. Au brouillon ou à la manière des physiciens,
   (a) on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas !).

   L'équation s'écrit alors $\dfrac{y'}{y} = a(x)$.

   (b) On reconnait la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
   (c) On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
2. Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.
2. $y' = yx^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
3. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$.

II.2 Solution particulière

$$y' + a(x)y = b(x). \qquad (\mathrm{EDL}_1)$$

Exemple 8 : Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

1. $y' + ay = b$: La fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution.
2. $y' + ay = b\,\mathrm{e}^{\alpha x}$: La fonction $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.
   (a) $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ est solution de $y' + y = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.
   (b) $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ n'est pas solution de $y' - 2y = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.

Méthode 3 (Variation de la constante) :

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL_1) non homogène sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ *i.e.* on « rend la constante variable ».
2. En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL_1) et après simplification, $x \longmapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y'+2xy-1=0$.

Théorème 4 (Second membre particulier) :
Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$y'+ay=\lambda\,\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a\in\mathbb{K}. \tag{EDL$_1$}$$

L'équation (EDL_1) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mu\, x^m\, \mathrm{Q}(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mu\in\mathbb{K}$ et $\mathrm{Q}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg(\mathrm{Q})=\deg(\mathrm{P})$ et

— $m=0$ si $a+\alpha\neq 0$.
— $m=1$ sinon.

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

— $y'+ay=\mathrm{P}(x)$, où $a\in\mathbb{K}$ et $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
— $y'+ay=\lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, où $a,\lambda,\alpha\in\mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x\longmapsto y_p(x)=\mu\,\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x\longmapsto y_p(x)=\mu x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mu\in\mathbb{K}.$$

— $y'+ay=\lambda\cos(\omega x)$ et $y'+ay=\lambda\sin(\omega x)$, où $a,\lambda\in\mathbb{K}$, et $\omega\in\mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x\longmapsto y_p(x)=\mu\cos(\omega x)+\nu\sin(\omega x), \qquad (\mu\,;\nu)\in\mathbb{K}^2.$$

— $y'+ay=\lambda\mathrm{ch}\,(\omega x)$ et $y'+ay=\lambda\mathrm{sh}\,(\omega x)$, où $a,\lambda\in\mathbb{K}$, et $\omega\in\mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x\longmapsto y_p(x)=\mu\mathrm{ch}\,(\omega x)+\nu\mathrm{sh}\,(\omega x), \qquad (\mu\,;\nu)\in\mathbb{K}^2.$$

Exercice 4 : Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y'+y\cos(x)=0$.
2. $(1+x^2)y'+xy=1+x+2x^2$.
3. $y'-2y=3\cos(x)-\sin(x)$.

II.3 Problème de Cauchy associé à une EDL_1

Définition 4 (Problème de Cauchy [1] d'une EDL_1) : Soient $a,b\in\mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$, $y_0\in\mathbb{K}$ et $x_0\in\mathrm{I}$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y'+a(x)y=b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0)=y_0. \end{cases} \tag{C.L$_1$}$$

La condition $y(x_0)=y_0$ est appelée sa *condition initiale*.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_1) :
Soient $a, b \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_1)$ possède une unique solution sur I.

Commentaires :

— Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.

— La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

— Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.

D'après le théorème (5), c'est la seule.

Exemple 9 : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme $\lambda\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et la condition initiale se traduit alors par $\lambda\,\mathrm{e}^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2\,\mathrm{e}$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

Exercice 5 : Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Corollaire 5.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x). \qquad (\mathrm{EDL}_1)$$

Alors :

— Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$.

— Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$.

[1]. **Augustin Louis**, baron **Cauchy**, né à Paris le 21 août **1789** et mort à Sceaux le 23 mai **1857**, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par **Leonhard Euler**, **Paul Erdos** et **Arthur Cayley**, avec près de 800 parutions et sept ouvrages. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

II.4 Résolution des EDL_1 à coefficients constants

Corollaire 5.2 (Équation linéaire $y' + ay = b$ à coefficients constants) :
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

L 'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \longmapsto \left(y_0 - \frac{b}{a} \right)\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}.$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résistance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur.

L'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i = \mathrm{E}, \tag{XI.1}$$

et la condition initiale $i(0) = 0$.

En notant $\tau = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ (constante de temps du circuit), l'équation (XI.1) s'écrit :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}.$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ est solution particulière de l'équation.
3. Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \longmapsto \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} + \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4. Comme $i(0) = 0$, on obtient $\lambda = -\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ soit :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geqslant 0, \text{ bien entendu}).$$

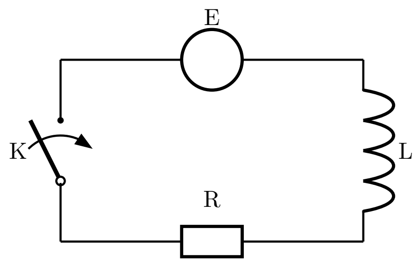

Figure XI.1 – Circuit RL

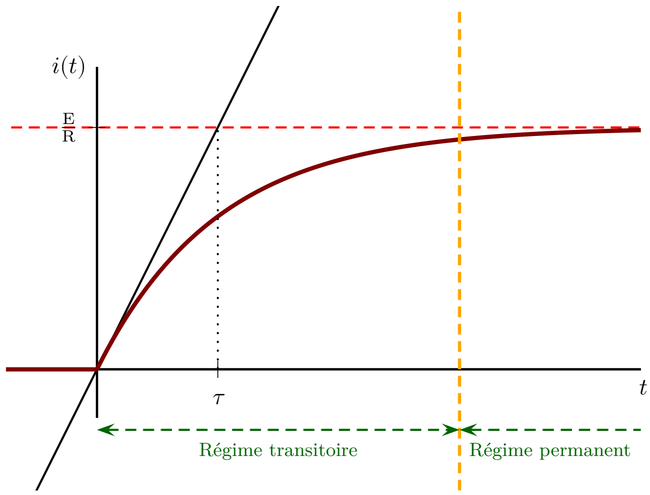

Figure XI.2 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.

Exercice 6 : Quelle est la réponse en intensité d'un circuit RL en régime alternatif lorsque $E = \sqrt{2}\cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$?

III/ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

En accord avec le programme, on se restreindra au cas de **coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation homogène associée (EDL_2) s'écrit :

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

À retenir 2 : Solution générale de (EDL_2) = Solution particulière de (EDL_2) + Solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{EDL}_2)_0$

III.1 Solutions de l'équation homogène

Définition 5 (Polynôme caractéristique) : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ de discriminant $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$.

Théorème 6 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas complexe) :
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

— $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
— $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_0$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$
$\Delta_{car} \neq 0$	r_1 et r_2 distinctes	$x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{rx}$

Exercice 7 : Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' - y' + (1+i)y = 0$
3. $y'' - (2+i)y' + (1+i)y = 0$

Théorème 7 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas réel) :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$$

— $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
— $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$
$\Delta_{car} > 0$	r_1 et r_2 réelles distinctes	$x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	$r\ (\in \mathbb{R})$	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{rx}$
$\Delta_{car} < 0$	$r \pm \mathrm{i}\,\omega$ complexes conjuguées	$x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\Big)$

Exercice 8 : Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$

Remarque : Des équations différentielles de la forme :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'' - \omega^2 y = 0,$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont fréquentes en physique. Leurs solutions respectives s'écrivent : $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ et

$$x \longmapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \qquad x \longmapsto \lambda \mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu \mathrm{sh}\,(\omega x)$$

$$x \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega x + \varphi). \qquad x \longmapsto \mathrm{A}\mathrm{ch}\,(\omega x + \varphi).$$

$(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2$

Exemple 11 (Un peu de physique : Circuit LC) : La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0.$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{1}{\mathrm{LC}}$:

$$q'' + \omega^2 q = 0. \tag{LC}$$

Les solutions de (LC) s'écrivent alors sous la forme :

$$q : t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

avec $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0\,;\dfrac{2\pi}{\omega}\right[$.

La constante A est appelée amplitude de la solution et la constante φ, son déphasage.

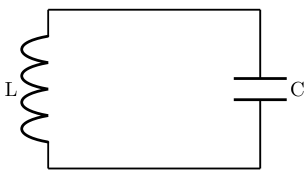

Figure XI.3 – Circuit LC.

Exemple 12 (Un peu de physique : Circuit RLC) : La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{L}} + u_{\mathrm{C}} = 0 \iff \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}q' + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0.$$

On note usuellement en physique :

— $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, constante appelée *pulsation propre* du circuit.

— $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle *facteur de qualité* du circuit.

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).

Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta_{car} = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

— Le discriminant est positif quand $Q < \dfrac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\dfrac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1-4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux.

La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes.

On parle alors de *régime apériodique*, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0 (*confer* figure (XI.5)).

— Au contraire, lorsque $Q > \dfrac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante.

On parle alors de *régime pseudo-périodique* : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps (*confer* figure (XI.6)).

— Enfin, dans le cas où $Q = \dfrac{1}{2}$ il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante.

On parle de *régime critique*, la courbe ressemble à celle du régime apériodique (*confer* figure (XI.7)).

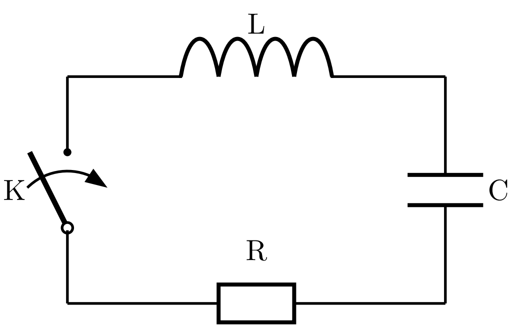

Figure XI.4 – Circuit RLC.

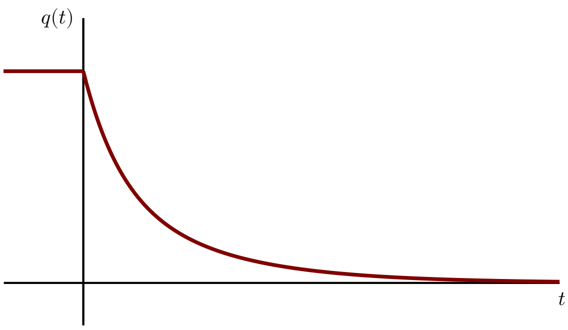

Figure XI.5 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime apériodique.

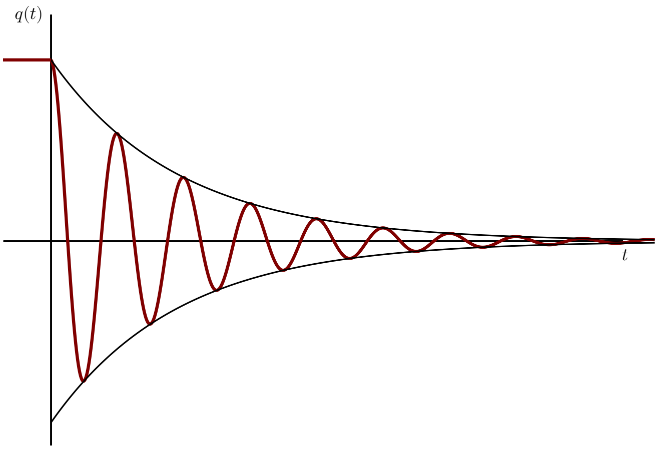

Figure XI.6 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime pseudo-périodique.

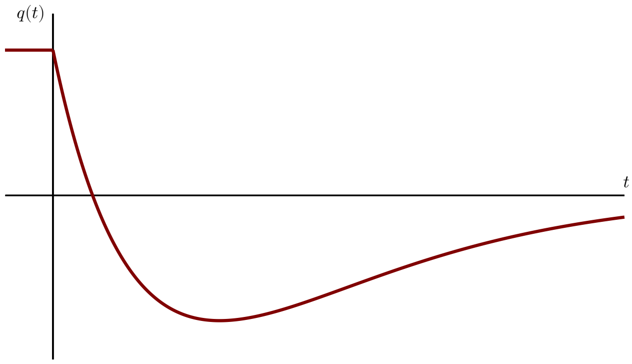

Figure XI.7 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime critique.

III.2 Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $\left(\mathrm{EDL}_2\right)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \sin(\Omega x).$$
$$(\alpha\,;\Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Quitte à user du théorème (1) de superposition, tous nos exemples se ramèneront à un des ces cas.

Théorème 8 (Second membre exponentiel) :
Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } \mathrm{B} \in \mathbb{C} \text{ et}$$

— $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
— $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
— $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Exemple 13 : On veut trouver les solutions générales de l'équation

$$y'' - y = e^{2x} - e^{x}.$$

Équation homogène : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$$

car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont -1 et 1.

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{2x}$: Comme 2 n'est pas racine de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto B\,e^{2x}, \qquad B \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \longmapsto B\,e^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{2x} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ 4B\,e^{2x} - B\,e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{x}$: Comme 1 est racine simple de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto Bx\,e^{x}, \qquad B \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \longmapsto Bx\,e^{x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{x} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (Bx\,e^{x} + 2B\,e^{x}) - Bx\,e^{x} = e^{x} \\ &\iff B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = e^{2x} - e^{x}$ sont finalement toutes les fonctions

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^{x} + \mu\,e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 9 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^{x}\cos(x)$.

Corollaire 8.1 (Second membre trigonométrique) :
Soient $A \in \mathbb{K}, \Omega \in \mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = A\cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = A\sin(\Omega x). \tag{EDL$_2$}$$

L'équation (EDL$_2$) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto x^m \Big(B\cos(\Omega x) + C\sin(\Omega x)\Big), \qquad \text{où } B, C \in \mathbb{K} \text{ et}$$

- $m = 0$ si Ω n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si Ω est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.

Exercice 10 : Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 13y = 8\cos(x) + 16\sin(x)$.

Corollaire 8.2 (Second membre exponentiel-polynôme) :
Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mathrm{B} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$ et
- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Exercice 11 : Déterminer les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.

III.3 Problème de Cauchy associé à une EDL_2

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL_2) : Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\mathrm{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa *condition initiale*.

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_2) :
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_2)$ possède une unique solution sur I.

Exemple 14 : On veut résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

D'après l' exemple (13) , les solutions générales sur $\mathbb{R}$ soit de la forme :

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^{x} + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0$, *i.e.* $(\lambda\,;\mu)$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{3} &= 1 \\ \lambda - \mu + \frac{1}{6} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{4} \\ \mu &= \frac{5}{12} \end{cases}$$

L'unique solution est ainsi la fonction

$$x \longmapsto \frac{1-2x}{4} e^{x} + \frac{5}{12} e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}.$$

Exercice 12 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' + y = \cos^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exemple 15 : Considérons $y'' - 2y' + y = 0$.

Les solutions sont de la forme $x \longmapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x) e^{x}$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$x \longmapsto e^{x}.$$

Corollaire 9.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

Alors :

— Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.

— Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Vocabulaire : En physique, le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé *signal d'entrée* et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudié.

On parle de *régime libre* si f est la fonction nulle, et de *régime forcé* sinon.

Exercice 13 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2e^x$ avec les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$

Méthode 4 (Résolution d'un problème de Cauchy linéaire) :

0. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
1. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
   (a) $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   (b) $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
2. Trouver une solution particulière : y_p
   (a) On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
   (b) Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
3. Donner l'allure générale des solutions : $y = y_{\mathrm{H}} + y_p$.
4. Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.

Exemple 16 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) : Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L, et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux)

$$\vec{\mathrm{F}}_f = -\alpha\vec{v}.$$

Mise en équation : Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical oriente vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - \mathrm{K}(z - \mathrm{L}) + mg \iff mz'' + \alpha z' + \mathrm{K}z = \mathrm{KL} + mg.$$

Cette équation équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = \mathrm{L} + \dfrac{mg}{\mathrm{K}}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).

En portant l'origine en z_0 *i.e.* en posant $\mathrm{Z} = z - z_0$, on obtient :

$$m\mathrm{Z}'' + \alpha\mathrm{Z}' + \mathrm{KZ} = 0 \iff \mathrm{Z}'' + 2\lambda\mathrm{Z}' + \omega^2\mathrm{Z} = 0.$$

L'équation du mouvement est donc régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0. \qquad (\mathrm{O}scil_0)$$

Où on a noté, comme d'usage en physique :

— $2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$, le coefficient d'amortissement de l'oscillateur,

— $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui représente la pulsation propre.

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

— **Régime apériodique** quand $\lambda > \omega_0$,
— **Régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,
— **Régime pseudo-périodique** quand $\lambda < \omega_0$.

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (XI.5), (XI.7) et (XI.6).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

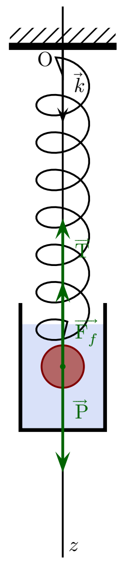

Figure XI.8 – Oscillateur harmonique en régime libre

Exercice 14 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime libre donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 0. \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

On reprend l'équation $\mathrm{O}scil_0$ mais avec un second membre non nul :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\cos(\omega t). \qquad (\mathrm{O}scil)$$

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Interprétation physique : Ceci se traduit en disant que le mouvement obtenu est la somme de l'oscillation propre, qui dépend des conditions initiales, et de l'oscillation forcée par la force extérieure ; on parle aussi de réponse à l'excitation décrite par le second membre.

Généralement, il suffit de ne considérer que cette réponse qui subsiste seule après l'extinction de l'oscillation propre due à l'amortissement.

Résolution : Pour ce faire il est commode d'utiliser les nombres complexes en considérant l'équation :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}.$$

La recherche d'une solution particulière sous la forme $\tilde{z_p} = \mathrm{Z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$ conduit à

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega)\mathrm{Z} = \mathrm{F} \iff \mathrm{Z} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}\mathrm{F}.$$

Fonction de transfert : En posant $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}$, cette équation se réécrit :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{H}(\omega)\mathrm{F}.$$

$\mathrm{H}(\omega)$ représente la fonction de transfert qui décrit la réponse en fonction de la pulsation.

Écrite sous sa forme exponentielle on a $\mathrm{H}(\omega) = |\mathrm{H}|e^{\mathrm{i}\,\varphi}$ puis $\tilde{z_p} = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)}$.

Notre solution particulière s'écrit alors :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi).$$

Interprétation : Ainsi, à une excitation sinusoïdale un système linéaire fait correspondre une réponse sinusoïdale de même pulsation.

De même, à une somme de sinusoïdes correspond une somme de sinusoïdes. Pour chacune d'entre elles le module et l'argument de la fonction de transfert représentent respectivement l'amplification et le déphasage.

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et $|\mathrm{H}(\omega)| = \dfrac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

L'amplification croît avec un déphasage nul à partir de la valeur statique $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega_0}$ jusqu'à l'infini lorsque ω atteint la valeur ω_0.

Ensuite elle décroît jusqu'à zéro avec un déphasage égal à $-\pi$, le déphasage étant défini par :

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| = -1 \\ \sin\varphi &= -\displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} 2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| = 0 \end{cases}$$

La valeur infinie correspond à la *résonance* lorsque le système est excité à sa pulsation propre ω_0.

Dans la conception d'un système, le simple calcul de cette pulsation (ou fréquence ou période propre) peut conduire à modifier l'inertie ou la raideur d'un système pour l'éloigner des excitations attendues.

En tout état de cause, la réponse ne peut être que finie à cause de l'amortissement qui est négligé ici.

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, la fonction de transfert devient :

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

L'amplification est :

$$|\mathrm{H}(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

Il apparaît que le dénominateur de la fonction de transfert ne peut plus s'annuler : pour un amortissement faible on a une courbe de réponse voisine de celle du système non amorti mais avec un maximum fini.

En annulant la dérivée de $|\mathrm{H}(\omega)|$ par rapport à ω^2, on obtient la pulsation qui donne ce maximum :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$

À mesure que le coefficient d'amortissement λ augmente, l'abscisse du maximum diminue jusqu'à 0 où la fonction $|\mathrm{H}(\omega)|$ de ω devient décroissante, ce qui se produit pour l'amortissement critique :

$$\omega_0^2 - 2\lambda_{crit}^2 = 0 \iff \lambda_{crit} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Le déphasage est, ici, défini par :

$$\begin{cases} \cos\varphi &= (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| \\ \sin\varphi &= -2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| \end{cases}$$

— Pour les plus petites valeurs de la pulsation on a le régime quasi statique dominé par la raideur dans lequel la réponse est en phase avec l'excitation.

— Pour les plus grandes, on atteint le régime dominé par l'inertie dans lequel la réponse est en opposition et l'amplification est de l'ordre de $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega^2}$.

L'amortissement devient essentiel loin de ces deux extrêmes.

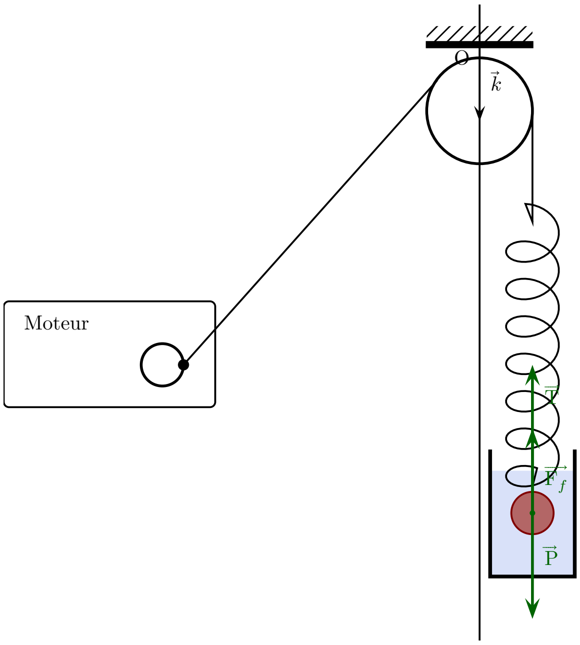

Figure XI.9 – Oscillateur harmonique en régime forcé

Exercice 15 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 5\cos(t). \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

On déterminera également le comportement asymptotique correspondant physiquement à l'état stable.