

Équations différentielles (linéaires)

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 11



- 1 Équations et opérateurs linéaires
- 2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1
- 3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants





La moindre modélisation d'un phénomène en physique amène souvent à la résolution d'une **équation différentielle** voire aux **dérivées partielles** dont la solution cherchée sera la trajectoire, la température, la tension, ... du système considéré. Les fonctions dépendent généralement des trois dimensions spatiales x, y, z et du temps t .

Un **opérateur** $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^4$ ou plus et une fonction f excitatrice donnés, une **équation différentielle** prend la forme générale :

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, f).$$

Les équations aux dérivées partielles ont une forme analogue.



On est loin de savoir résoudre *i.e.* trouver les **courbes intégrales**, toutes les équations différentielles existantes sous forme exacte ou même approchée.

L'exemple le plus connu est la résolution des **équations de Navier-Stokes** qui vous apportera un million de dollar et la gloire éternelle tant ses applications sont nombreuses et le problème difficile :

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right)}_{\tilde{m} \quad a} = \underbrace{-\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueuse}}} .$$





es équations différentielles sont
en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de
travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),





Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ (équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.)





Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ (équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.)

Dans ces cas là, les méthodes sont clairement définies et leur application quasi mécanique.



Remarques liminaires :

- ① Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} . Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.

Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} où \mathbb{K} désigne l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} suivant la situation.



Remarques liminaires :

- 1 Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} . Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.

Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} où \mathbb{K} désigne l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} suivant la situation.

- 2 L'ensemble E considéré au cours de la première section sera supposé stable par combinaisons linéaires *i.e.*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in E.$$

Nous reviendrons sur ce point au deuxième semestre mais comprenez pour l'instant, que la structure de E permet de considérer toutes les sommes d'éléments de E ainsi que les éléments multipliés par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ sans que l'on ne s'échappe de E .



I. Équations et opérateurs linéaires

1 Équations et opérateurs linéaires

- Linéarité et conséquences
- Équations différentielles linéaires

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles.

Un opérateur $T : E \mapsto F$ est dit **linéaire** si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, T(\lambda x +_E y) = \lambda T(x) +_F T(y).$$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles.

Un opérateur $T : E \mapsto F$ est dit **linéaire** si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, T(\lambda x +_E y) = \lambda T(x) +_F T(y).$$

En particulier, si E est non vide alors

$$\forall x \in E, T(x - x) = T(x) - T(x) \implies \boxed{T(0_E) = 0_F.}$$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
$\overline{\mathcal{P}}$ ou $\overline{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f' + af, a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda(f' + af) + (g' + ag)$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
\mathbb{R}^2	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f' + af, a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'' + af' + bf, a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g)' + b(\lambda f + g) =$ $\lambda(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg).$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$

- $y \in E$ est l'inconnue cherchée.



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$

- $y \in E$ est l'inconnue cherchée.
- b en est appelé le **second membre**.



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$

- $y \in E$ est l'inconnue cherchée.
- $b \in F$ est appelé le **second membre**.
- On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) et tout élément de \mathcal{S} s'appelle une **solution particulière** et est notée en général y_p .



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$

- $y \in E$ est l'inconnue cherchée.
- $b \in F$ est appelé le **second membre**.
- On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) et tout élément de \mathcal{S} s'appelle une **solution particulière** et est notée en général y_p .
- On appelle **équation homogène associée à (\mathcal{E})** ou **sans second membre** toute équation de la forme :

$$T(y) = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Définition 2 :

Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$T(y) = b, \quad \text{où } b \in F. \quad (\mathcal{E})$$

- $y \in E$ est l'inconnue cherchée.
- $b \in F$ est appelé le **second membre**.
- On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) et tout élément de \mathcal{S} s'appelle une **solution particulière** et est notée en général y_p .
- On appelle **équation homogène associée** à (\mathcal{E}) ou **sans second membre** toute équation de la forme :

$$T(y) = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

- On note \mathcal{S}_0 ou \mathcal{S}_H l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_0) .



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Un des premiers avantages des équations linéaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème I (Principe de superposition) :

Soient $T : E \mapsto F$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in F$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $T(y) = b_1$ et $T(y) = b_2$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $T(y) = \lambda b_1 + b_2$.



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

- ① L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (\mathcal{E}_0) est non vide et stable par combinaisons linéaires.

On dit que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de E .



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

- 1 L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (\mathcal{E}_0) est non vide et stable par combinaisons linéaires.

On dit que \mathcal{S}_0 est un **sous-espace vectoriel** de E .

- 2 Si \mathcal{S} n'est pas vide alors toute solution de (\mathcal{E}) est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de (\mathcal{E}_0) :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in \mathcal{S}, \exists y_0 \in \mathcal{S}_0 / y = y_p + y_0.$$

On dit que \mathcal{S} est un **sous-espace affine** de E dirigé par \mathcal{S}_0 .



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

- 1 L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de (\mathcal{E}_0) est non vide et stable par combinaisons linéaires.

On dit que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de E .

- 2 Si \mathcal{S} n'est pas vide alors toute solution de (\mathcal{E}) est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de (\mathcal{E}_0) :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad \text{i.e.} \quad \forall y \in \mathcal{S}, \exists y_0 \in \mathcal{S}_0 / y = y_p + y_0.$$

On dit que \mathcal{S} est un sous-espace affine de E dirigé par \mathcal{S}_0 .

Toute solution générale d'une équation linéaire est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

ATTENTION

Toute solution de (\mathcal{E}) est une solution particulière de (\mathcal{E}) !
Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

ATTENTION

Toute solution de (\mathcal{E}) est une solution particulière de (\mathcal{E}) !
Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :



I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

ATTENTION

Toute solution de (\mathcal{E}) est une solution particulière de (\mathcal{E}) !
Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode I :

Pour résoudre une équation linéaire :

- 1 Déterminer \mathcal{S}_0 .

I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

ATTENTION

Toute solution de (\mathcal{E}) est une solution particulière de (\mathcal{E}) !
Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode I :

Pour résoudre une équation linéaire :

- 1 Déterminer \mathcal{S}_0 .
- 2 Déterminer une solution particulière y_p .

I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

ATTENTION

Toute solution de (\mathcal{E}) est une solution particulière de (\mathcal{E}) !
Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode I :

Pour résoudre une équation linéaire :

- 1 Déterminer \mathcal{S}_0 .
- 2 Déterminer une solution particulière y_p .
- 3 Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$ où $y_0 \in \mathcal{S}_0$.

I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemple 2 :

Posons $E = \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T l'opérateur différentiel et $b = \cos$.

On considère l'équation linéaire :

$$T(f) = \cos \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x).$$

- 1 Les solutions de l'équation homogène associée $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur \mathbb{R} i.e. $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- 2 La fonction $y_p = \sin$ est une solution particulière.

Il ne reste plus qu'à additionner :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto \sin(x) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle **équation homogène** associée à (\mathcal{E}) , l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle **équation homogène** associée à (\mathcal{E}) , l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle **ordre** d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.

I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle **équation homogène** associée à (\mathcal{E}) , l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle **ordre** d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.
- **Résoudre** ou **intégrer** une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \mapsto y(x)$ solutions de (\mathcal{E}) sur un intervalle à préciser.

I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y , toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle **équation homogène** associée à (\mathcal{E}) , l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle **ordre** d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.
- **Résoudre** ou **intégrer** une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \mapsto y(x)$ solutions de (\mathcal{E}) sur un intervalle à préciser.
- On appelle \mathcal{S} l'ensemble des solutions et tout élément de \mathcal{S} s'appelle une **solution particulière**.

I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x , et x ou t sa variable.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x , et x ou t sa variable.
- Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est **normalisée** ou **résolue**.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x , et x ou t sa variable.
- Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est **normalisée** ou **résolue**.
- Les courbes représentatives des solutions de (\mathcal{E}) sont appelées **courbes intégrales**.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.

En effet, $x \mapsto x$ en est solution mais pas $x \mapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du **théorème (2)**.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.
En effet, $x \mapsto x$ en est solution mais pas $x \mapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du **théorème (2)**.
- $2y' - y = e^x$ n'est pas homogène.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Remarques :

- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Remarques :

- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.

Elles seront en fait de classe \mathcal{C}^r sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :

$$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)} (b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{r-1}y^{(r-1)}),$$

somme de fonctions continues donc continues.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Remarques :

- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.

Elles seront en fait de classe \mathcal{C}^r sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :

$$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)} (b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{r-1}(x)y^{(r-1)}),$$

somme de fonctions continues donc continues.

- On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.

Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Remarques :

- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.

Elles seront en fait de classe \mathcal{C}^r sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :

$$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)} (b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{r-1}(x)y^{(r-1)}),$$

somme de fonctions continues donc continues.

- On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.

Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

- L'équation (\mathcal{E}) correspond à l'opérateur

$$\mathbb{T} : \mathcal{C}^r(\mathbb{R}; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$$

$$f \longmapsto a_r f^{(r)} + \dots + a_1 f' + a_0 f$$

où les coefficients a_i sont des fonctions continues.



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$RCu' + u = E(t).$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$RCu' + u = E(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$Li' + Ri = E(t).$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$RCu' + u = E(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$Li' + Ri = E(t).$$

- La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, la vitesse de désintégration $y'(t)$ est proportionnelle à sa concentration dans un rapport de $1/8000$ par an et vérifie donc l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation (datation au carbone 14).



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0.$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0.$$

- L'évolution au cours du temps de θ l'angle formé par un pendule de longueur ℓ et de masse m avec la verticale est donnée par l'équation différentielle **non** linéaire d'ordre 2 :

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0.$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exercice 1 :

- ④ Montrer que, quels que soient les réels α, β , la fonction $x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \quad (E_1)$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exercice 1 :

- ❶ Montrer que, quels que soient les réels α, β , la fonction $x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \quad (E_1)$$

- ❷ Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \quad (E_2)$$



I. Équations et opérateurs linéaires

2. Équations différentielles linéaires

Exercice I :

- ❶ Montrer que, quels que soient les réels α, β , la fonction $x \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \quad (E_1)$$

- ❷ Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \quad (E_2)$$

- ❸ Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Équations et opérateurs linéaires

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- Solutions de l'équation homogène
- Solution particulière
- Problème de Cauchy associé à une EDL₁
- Résolution des EDL₁ à coefficients constants

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre, **résolues** (i.e. le coefficient de y' vaut 1) :

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (\text{EDL}_1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I .

L'équation homogène associée (EDL_1) s'écrit :

$$y' + a(x)y = 0. \quad (\text{EDL}_1)_0$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Le **théorème (2)** de structure s'applique à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

À retenir :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & & \text{Solution} & & \text{Solution générale de} \\ \text{de (EDL}_1\text{)} & = & \text{particulière} & + & \text{l'équation homogène} \\ & & \text{de (EDL}_1\text{)} & & \text{(EDL}_1\text{)}_0 \end{array}$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .

Toutes les solutions de (\mathcal{E}_0) sont donc colinéaires à $x \mapsto e^{-A(x)}$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .

Toutes les solutions de (\mathcal{E}_0) sont donc colinéaires à $x \mapsto e^{-A(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une **droite vectorielle**, ou d'une autre manière que \mathcal{S}_0 est un espace (vectoriel) de dimension un.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .

Toutes les solutions de (\mathcal{E}_0) sont donc colinéaires à $x \mapsto e^{-A(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une **droite vectorielle**, ou d'une autre manière que \mathcal{S}_0 est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION

Il n'y a qu'une solution de $(EDL_1)_0$ qui s'annule :



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a .

Toutes les solutions de (\mathcal{E}_0) sont donc colinéaires à $x \mapsto e^{-A(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une **droite vectorielle**, ou d'une autre manière que \mathcal{S}_0 est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION

Il n'y a qu'une solution de $(EDL_1)_0$ qui s'annule :
la fonction nulle.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 5 :

Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{K}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 5 :

Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 :

Considérons $(1 + x^2)y' + y = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

⊕ L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 5 :

Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 :

Considérons $(1 + x^2)y' + y = 1$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

- ① L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ② La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente.

D'après le **théorème (2)**, la solution générale est donc

$$x \mapsto 1 + \lambda e^{-\arctan(x)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 1 :

Considérons $y' + xy = x$.

- 1 L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 1 :

Considérons $y' + xy = x$.

- 1 L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- 2 Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 1 :

Considérons $y' + xy = x$.

- 1 L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- 2 Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.
- 3 Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

- 1 Au brouillon ou à la manière des physiciens,



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

- 1 Au brouillon ou à la manière des physiciens,
 - 1 on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!).

L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

- 1 Au brouillon ou à la manière des physiciens,
 - 1 on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!).

L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.

- 2 On reconnaît la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

- 1 Au brouillon ou à la manière des physiciens,
 - 1 on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!).

L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.

- 2 On reconnaît la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
- 3 On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

- ❶ Au brouillon ou à la manière des physiciens,
 - ❶ on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas!).
L'équation s'écrit alors $\frac{y'}{y} = a(x)$.
 - ❷ On reconnaît la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
 - ❸ On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
- ❷ Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

① $y' = ay$ où a est une constante.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1 $y' = ay$ où a est une constante.
- 2 $y' = yx^\alpha$ sur \mathbb{R} si $\alpha \geq 0$, sur \mathbb{R}_+^* sinon.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1 $y' = ay$ où a est une constante.
- 2 $y' = yx^\alpha$ sur \mathbb{R} si $\alpha \geq 0$, sur \mathbb{R}_+^* sinon.
- 3 $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ sur $I =]0; \pi[$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Pour commencer, il s'agit de fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le **théorème (1)** de superposition.

Supposant cette première étape effectuée, on cherche une solution particulière de l'équation générale

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (\text{EDL}_1)$$

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale comme dans l' **exemple (7)** ou l' **exemple (8)** .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exemples 8 :

Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

④ $y' + ay = b$: La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exemples 8 :

Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

- 1 $y' + ay = b$: La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution.
- 2 $y' + ay = be^{\alpha x}$: La fonction $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exemples 8 :

Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

- 1 $y' + ay = b$: La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution.
- 2 $y' + ay = be^{\alpha x}$: La fonction $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.
 - 1 $x \mapsto e^{2x}$ est solution de $y' + y = 3e^{2x}$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exemples 8 :

Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

- ① $y' + ay = b$: La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution.
- ② $y' + ay = be^{\alpha x}$: La fonction $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.
 - ① $x \mapsto e^{2x}$ est solution de $y' + y = 3e^{2x}$.
 - ② $x \mapsto e^{2x}$ n'est pas solution de $y' - 2y = 3e^{2x}$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Méthode 3 :

- 1 Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL₁) non homogène sous la forme $x \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$ *i.e.* on « rend la constante variable ».



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Méthode 3 :

- 1 Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL₁) non homogène sous la forme $x \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$ *i.e.* on « rend la constante variable ».
- 2 En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL₁) et après simplification, $x \mapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Méthode 3 :

- 1 Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL₁) non homogène sous la forme $x \mapsto \lambda(x) e^{-A(x)}$ *i.e.* on « rend la constante variable ».
- 2 En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL₁) et après simplification, $x \mapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.

Exercice 3 :

Résoudre sur \mathbb{R} , $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Dans certains cas de seconds membres bien particuliers, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante développée ci après, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée.

Théorème 4 (Second membre particulier) :

Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$y' + ay = \lambda P(x) e^{\alpha x}, \quad \text{où } a \in \mathbb{K}. \quad (\text{EDL}_1)$$

L'équation (EDL_1) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto \mu x^m Q(x) e^{\alpha x},$$

où $\mu \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré $\deg(Q) = \deg(P)$ et

- $m = 0$ si $a + \alpha \neq 0$.
- $m = 1$ sinon.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = P(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbb{K} de degré n , admet une solution particulière polynomiale de degré n .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = P(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbb{K} de degré n , admet une solution particulière polynomiale de degré n .
- $y' + ay = \lambda e^{\alpha x}$, où $a, \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu e^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \mapsto y_p(x) = \mu x e^{\alpha x}, \quad \mu \in \mathbb{K}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = P(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbb{K} de degré n , admet une solution particulière polynomiale de degré n .
- $y' + ay = \lambda e^{\alpha x}$, où $a, \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu e^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \mapsto y_p(x) = \mu x e^{\alpha x}, \quad \mu \in \mathbb{K}.$$

- $y' + ay = \lambda \cos(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \sin(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu \cos(\omega x) + \nu \sin(\omega x), \quad (\mu; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = P(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans \mathbb{K} de degré n , admet une solution particulière polynomiale de degré n .
- $y' + ay = \lambda e^{\alpha x}$, où $a, \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu e^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \mapsto y_p(x) = \mu x e^{\alpha x}, \quad \mu \in \mathbb{K}.$$

- $y' + ay = \lambda \cos(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \sin(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu \cos(\omega x) + \nu \sin(\omega x), \quad (\mu; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$

- $y' + ay = \lambda \operatorname{ch}(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \operatorname{sh}(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \mapsto y_p(x) = \mu \operatorname{ch}(\omega x) + \nu \operatorname{sh}(\omega x), \quad (\mu; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

① $y' + y \cos(x) = 0.$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

❶ $y' + y \cos(x) = 0.$

❷ $(1 + x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2.$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

① $y' + y \cos(x) = 0.$

② $(1 + x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2.$

③ $y' - 2y = 3 \cos(x) - \sin(x).$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL₁) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$.

On appelle **problème de Cauchy** associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & (\text{C.L}_1) \end{cases}$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa **condition initiale**.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL₁) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$.

On appelle **problème de Cauchy** associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{C.L}_1)$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa **condition initiale**.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL₁) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système (C.L₁) possède une unique solution sur I .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL₁) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & (\text{C.L}_1) \end{cases}$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL₁) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\text{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & (\text{C.L}_1) \end{cases}$$

Remarque : La preuve de ce résultat montre que toute solution de (C.L₁) est bien de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$, ce qui justifie la **méthode (3)** de variation de la constante.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ .



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ .
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ .
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.
- Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.
En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.
D'après le **théorème (5)**, c'est la seule.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ .
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.
- Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.

D'après le **théorème (5)**, c'est la seule.

- La formule $y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(u)}b(u) du \right) e^{-A(x)}$ donnant la forme générale de la solution de (C.L₁) n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas, en général, calculer l'intégrale.

Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien, le plus difficile) trouver une solution particulière.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Exemple 9 :

Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur \mathbb{R}), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Exemple 9 :

Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur \mathbb{R}), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme λe^{-x^2} , et la condition initiale se traduit alors par $\lambda e^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2e$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Exemple 9 :

Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur \mathbb{R}), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme λe^{-x^2} , et la condition initiale se traduit alors par $\lambda e^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2e$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction

$$y : x \mapsto 2e^{1-x^2}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Exemple 9 :

Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur \mathbb{R}), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme λe^{-x^2} , et la condition initiale se traduit alors par $\lambda e^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2e$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction

$$y : x \mapsto 2e^{1-x^2}.$$

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₁

Corollaire 1 (Étude qualitative des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{K} ainsi que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (\text{EDL}_1)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
- Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{K}$.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Corollaire 2 (Équation linéaire $y' + ay = b$ à coefficients constants) :

Soit a et b deux éléments de \mathbb{K} .

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-ax} + \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \mapsto \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E , une résistance R , une bobine d'inductance L et un interrupteur.

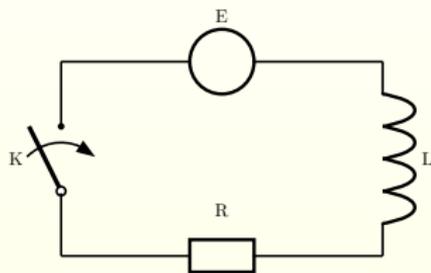


Figure 1 – Circuit RL



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert.

On note $i : t \mapsto i(t)$ l'intensité dans le circuit en fonction du temps t .

L'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad (\text{RL})$$

et la condition initiale $i(0) = 0$.

En notant $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps du circuit), l'équation précédente s'écrit :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$

- ① Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$,



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$

- 1 Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$,
- 2 la fonction constante à $i_p : t \mapsto \frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$

- 1 Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$,
- 2 la fonction constante à $i_p : t \mapsto \frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation.
- 3 Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \mapsto \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}.$$

- ❶ Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_H : t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$,
- ❷ la fonction constante à $i_p : t \mapsto \frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation.
- ❸ Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \mapsto \frac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- ❹ Comme $i(0) = 0$, on obtient $\lambda = -\frac{E}{R}$ soit :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

Commentaires : En pratique, $t \in [0; +\infty[$ et $\tau > 0$. La fonction i est alors une fonction d'atténuation dont la courbe ressemble à la figure ci-dessous.

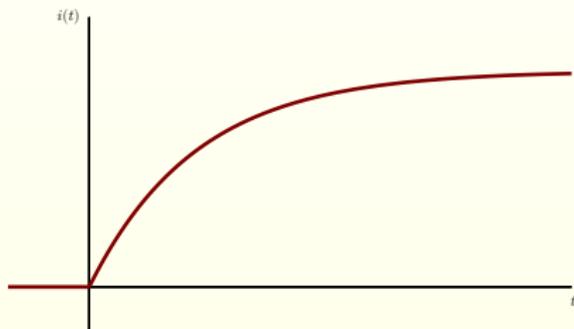


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

- En particulier, la fonction i est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

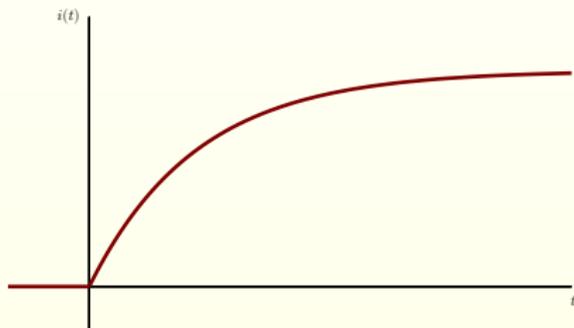


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

- La courbe de i admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{E}{R}$.

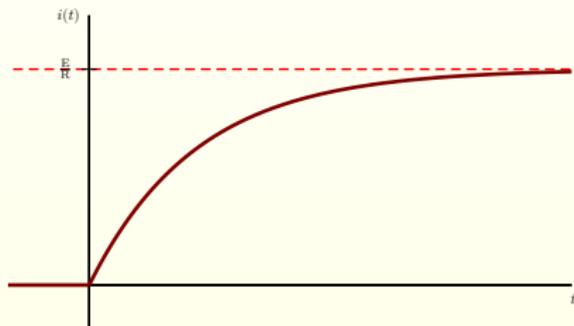


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

- La tangente à la courbe en $t = 0$ a pour coefficient directeur

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} - Ri(0) = \frac{E}{L}.$$

Cette tangente, d'équation $y = \frac{E}{L}t$, coupe donc l'asymptote à la courbe $y = \frac{E}{R}$ en

$$x = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{E}{L}} = \frac{L}{R} = \tau.$$



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

- Cette tangente, d'équation $y = \frac{E}{L} t$, coupe donc l'asymptote à la courbe $y = \frac{E}{R}$ en $x = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{E}{L}} = \frac{L}{R} = \tau$.

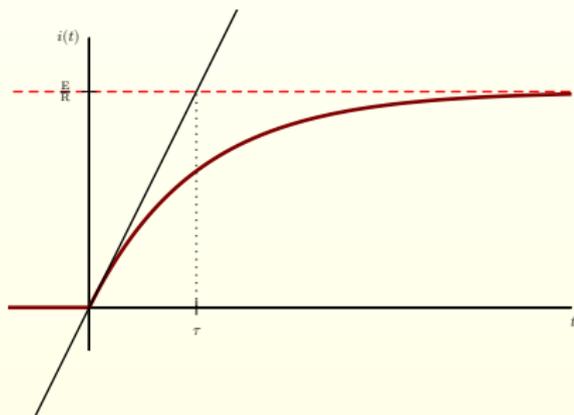


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

■ En physique, on dit que l'intensité est :

- en **régime permanent** quand elle s'approche fortement de son asymptote.
- et en **régime transitoire** dans sa période de forte croissance.

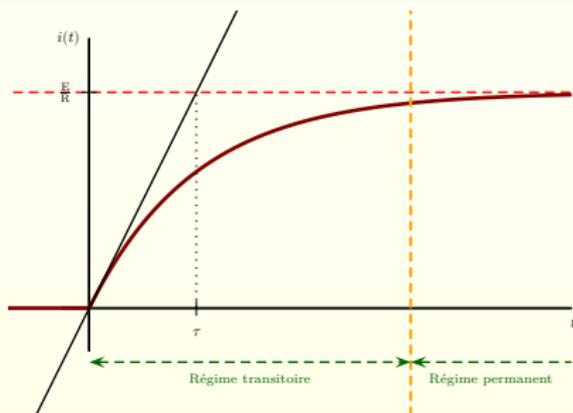


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \mapsto i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (\text{si } t \geq 0, \text{ bien entendu}).$$

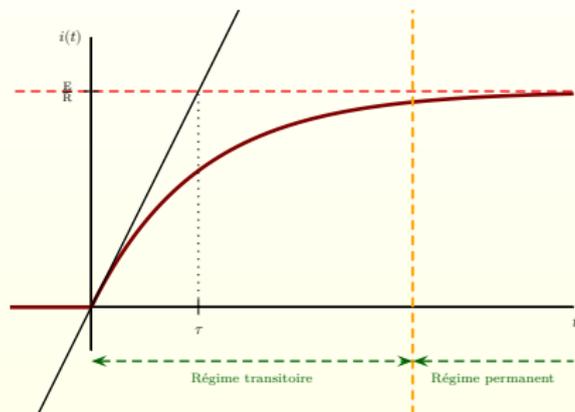


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.



II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

4. Résolution des EDL₁ à coefficients constants

Exercice 6 :

Quelle est la réponse en intensité d'un circuit RL en régime alternatif lorsque $E = \sqrt{2} \cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$?



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- 1 Équations et opérateurs linéaires
- 2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1
- 3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**
 - Solutions de l'équation homogène
 - Solution générale
 - Problème de Cauchy associé à une EDL₂



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \mapsto A e^{\alpha x} \text{ avec } A, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \sin(\omega x) \text{ avec } B \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \mapsto A e^{\alpha x} \text{ avec } A, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto B \sin(\omega x) \text{ avec } B \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre même si leur complexité augmente.

En accord avec le programme, on se restreindra au cas de **coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation homogène associée (EDL_2) s'écrit :

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{EDL}_2)$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

À retenir :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & & \text{Solution} & & \text{Solution générale de} \\ \text{de (EDL}_2\text{)} & = & \text{particulière} & + & \text{l'équation homogène} \\ & & \text{de (EDL}_2\text{)} & & \text{(EDL}_2\text{)}_0 \end{array}$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

À retenir :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & & \text{Solution} & & \text{Solution générale de} \\ \text{de (EDL}_2\text{)} & = & \text{particulière} & + & \text{l'équation homogène} \\ & & \text{de (EDL}_2\text{)} & & \text{(EDL}_2\text{)}_0 \end{array}$$

Notre démarche sera donc la même que pour les EDL₁.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'**exponentielle complexe**.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'**exponentielle complexe**.

Définition 5 (Polynôme caractéristique) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On appelle **polynôme caractéristique** de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $P_{car} = aX^2 + bX + c$ de discriminant $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 6 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas complexe) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_0$$

- $P_{car} = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $(EDL_2)_0$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 6 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas complexe) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_0$$

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$
$\Delta_{car} \neq 0$	r_1 et r_2 distinctes	$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	r	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v , déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v , déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ces solutions fondamentales ne sont pas multiples l'une de l'autre.

On dira bientôt qu'elles sont **libres** et qu'elles constituent une **base** de $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

On dira alors de ce dernier qu'il constitue un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ de **dimension** 2 et que, dès lors, $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ est un **plan affine** de direction $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).

La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).
La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
- Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.
Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).
La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos du **théorème (7)**.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).
La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
- Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.
Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).
La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos du **théorème (7)**.
- La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connaît une solution particulière. Elle trouve là toute sa pertinence.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

① $y'' + 4y = 0$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

① $y'' + 4y = 0$

② $y'' - y' + (1 + i)y = 0$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

❶ $y'' + 4y = 0$

❷ $y'' - y' + (1 + i)y = 0$

❸ $y'' - (2 + i)y' + (1 + i)y = 0$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 7 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas réel) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_{0,\mathbb{R}}$$

- $P_{car} = aX^2 + bX + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de ??.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 7 (Résolution de $(EDL_2)_0$ dans le cas réel) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (EDL_2)_{0,\mathbb{R}}$$

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$
$\Delta_{car} > 0$	r_1 et r_2 réelles distinctes	$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	$r (\in \mathbb{R})$	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$
$\Delta_{car} < 0$	$r \pm i\omega$ complexes conjuguées	$x \mapsto e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$ et $v : x \mapsto e^{rx} \sin(\omega x)$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$ et $v : x \mapsto e^{rx} \sin(\omega x)$.

Comme dans le cas complexe, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v , déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto x e^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$ et $v : x \mapsto e^{rx} \sin(\omega x)$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple II :

En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Dans le cas périodique, on peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos à l'aide d'une transformation de Fresnel :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ y : x \mapsto A e^{rx} \cos(\omega x + \varphi), (A ; \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple II :

En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Enfin, dans le cas $\Delta > 0$, les solutions peuvent aussi s'exprimer sous une forme trigonométrique mais hyperbolique cette fois :

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \mu_1 e^{r_2 x} = e^{\frac{r_1+r_2}{2} x} \left(\lambda_1 e^{\frac{r_1-r_2}{2} x} + \mu_1 e^{-\frac{r_1-r_2}{2} x} \right)$$

On pose $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ et $\omega = \frac{r_1-r_2}{2}$:

$$= e^{rx} \left(\lambda_1 (\operatorname{ch}(\omega x) + \operatorname{sh}(\omega x)) + \mu_1 (\operatorname{ch}(\omega x) - \operatorname{sh}(\omega x)) \right)$$

$$= e^{rx} \left((\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{ch}(\omega x) + (\lambda_1 - \mu_1) \operatorname{sh}(\omega x) \right)$$

$$= e^{rx} \left(\lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x) \right).$$

$$S_0^{\mathbb{R}} = \left\{ y : x \mapsto e^{rx} (\lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)), (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ y : x \mapsto A e^{rx} \operatorname{ch}(\omega x + \varphi), (A; \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

$$\textcircled{1} \quad y'' - 2y' - 3y = 0$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

❶ $y'' - 2y' - 3y = 0$

❷ $y'' + 2y' + y = 0$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

❶ $y'' - 2y' - 3y = 0$

❷ $y'' + 2y' + y = 0$

❸ $y'' + 2y' + 4y = 0$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Remarque : Des équations différentielles de la forme :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{ou} \quad y'' - \omega^2 y = 0,$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont fréquentes en physique.

Leurs solutions respectives s'écrivent :

$$x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x)$$

$$x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi). \quad x \mapsto A \operatorname{ch}(\omega x + \varphi).$$

$$(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad (A; \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 12 (Un peu de physique : Circuit LC) :

La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0.$$



Figure 2 – Circuit LC.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 12 (Un peu de physique : Circuit LC) :

La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

En posant $\omega^2 = \frac{1}{LC}$:

$$q'' + \omega^2 q = 0. \quad (\text{LC})$$

Les solutions s'écrivent alors sous la forme :

$$q : t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

avec $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

La constante A est appelée amplitude de la solution et la constante φ , son déphasage.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

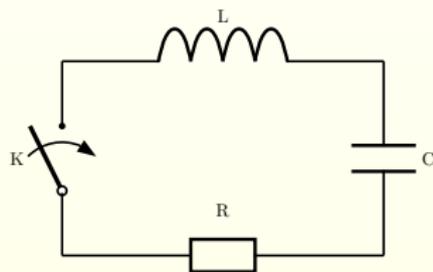


Figure 2 – Circuit RLC.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

On s'intéresse à l'évolution de cette charge q au cours du temps.

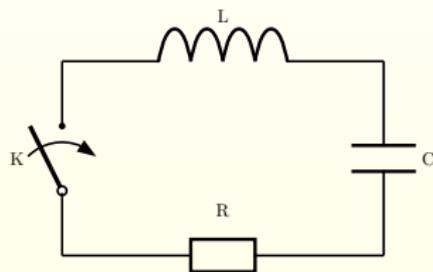


Figure 2 – Circuit RLC.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

Comme $\frac{dq}{dt} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i .

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

On note usuellement en physique :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, constante appelée **pulsation propre** du circuit.

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 :

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2q = 0.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 :

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q} q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 :

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q} q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).

Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta_{car} = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

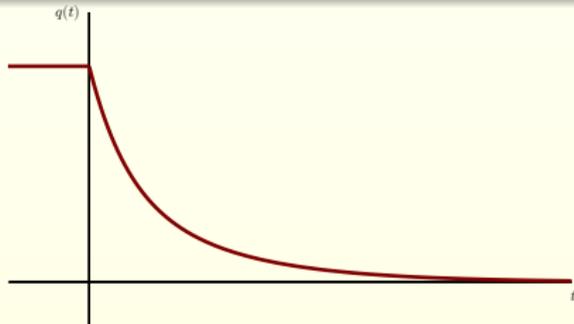
Exemple 13 :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q} q' + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{Car} = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2).$$

- Le discriminant est positif quand $Q < \frac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\frac{\omega_0}{2Q} (\pm \sqrt{1 - 4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux.

La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes.

On parle alors de **régime apériodique**, la charge se contentant de décroître de q_0 vers 0.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

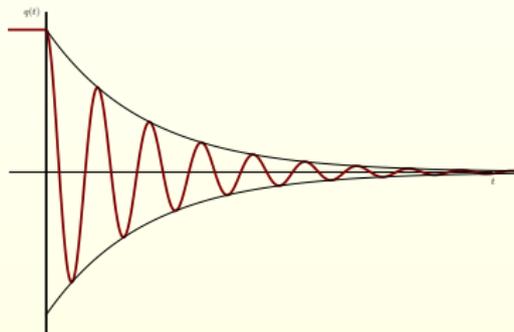
1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2q = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{car} = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2).$$

- Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante.

On parle alors de **régime pseudo-périodique** : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps



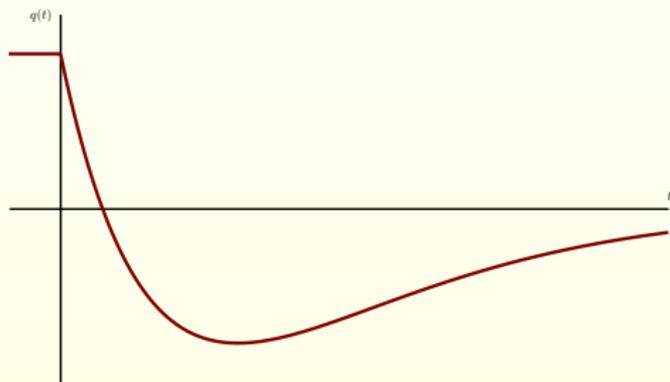
III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions de l'équation homogène

Exemple 13 :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2q = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{car} = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2).$$

- Enfin, dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$ il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante.
On parle de **régime critique**, la courbe ressemble à celle du régime apériodique.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

En accord avec le **théorème (2)**, toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\text{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

En accord avec le **théorème (2)**, toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\text{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \mapsto A e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

En accord avec le **théorème (2)**, toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\text{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \mapsto A e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \cos(\Omega x).$$
$$(\alpha; \Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}). \quad (\text{EDL}_2)$$

En accord avec le **théorème (2)**, toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\text{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \mapsto A e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \mapsto \cos(\Omega x).$$

$$(\alpha; \Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Quitte à user du **théorème (1)** de superposition, tous nos exemples se ramèneront à un des ces cas.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Théorème 8 (Second membre exponentiel) :

Soient $A, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = A e^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto B x^m e^{\alpha x}, \quad \text{où } B \in \mathbb{C} \text{ et}$$

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exemple 14 :

On veut trouver les solutions générales de l'équation

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$

Équation homogène : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont -1 et 1.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{2x}$: Comme 2 n'est pas racine de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \mapsto B e^{2x}, \quad B \in \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto B e^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{2x} \iff 4B e^{2x} - B e^{2x} = e^{2x}$$

$$\iff B = \frac{1}{3}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^x$: Comme 1 est racine simple de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \mapsto Bx e^x, \quad B \in \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto Bx e^x \text{ est solution de } y'' - y = e^x \Leftrightarrow (Bx e^x + 2B e^x) - Bx e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{2}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^x.$$

Conclusion : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sont finalement toutes les fonctions

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exercice 9 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Corollaire 3 (Second membre trigonométrique) :

Soient $A \in \mathbb{K}, \Omega \in \mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}, a \neq 0$, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = A \cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = A \sin(\Omega x). \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto x^m \left(B \cos(\Omega x) + C \sin(\Omega x) \right), \quad \text{où } B, C \in \mathbb{K} \text{ et}$$

- $m = 0$ si Ω n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si Ω est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exercice 10 :

Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 13y = 8 \cos(x) + 16 \sin(x)$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Même si nous n'irons guère plus loin, ce théorème se généralise aisément à des seconds membres un poil plus compliqués :

Corollaire 4 (Second membre exponentiel-polynôme) :

Soient $A, \alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = AP(x)e^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \quad (\text{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto Bx^m Q(x)e^{\alpha x},$$

où $B \in \mathbb{C}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré $\deg Q = \deg P$ et

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Par superposition, le corollaire (4) permet d'envisager les équations (EDL₂) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Par superposition, le **corollaire (4)** permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.
- $f(x) = Ax^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Par superposition, le **corollaire (4)** permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.
- $f(x) = Ax^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(x) = B \cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \cos(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Par superposition, le **corollaire (4)** permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.
- $f(x) = Ax^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(x) = B \cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \cos(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = B \sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \sin(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Par superposition, le corollaire (4) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = A e^{\alpha x}$.
- $f(x) = Ax^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(x) = B \cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \cos(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = B \sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = B e^{\alpha x} \sin(\Omega x)$, $B, \alpha, \Omega \in \mathbb{R}$.
- Par superposition, le cas où f est une somme de fonctions sinusoïdales de même pulsation, cette même somme produit par une exponentielle complexe, ...



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2. Solution générale

Exercice II :

Déterminer les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x e^{2x}$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL₂) :

Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$ et $x_0 \in I$.

On appelle **problème de Cauchy** associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\text{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa **condition initiale**.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL₂) :

Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$ et $x_0 \in I$.

On appelle **problème de Cauchy** associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\text{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa **condition initiale**.

Comme pour les (EDL₁), on peut s'attendre à l'existence et l'unicité d'une solution dans notre cas très restreint :



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL₂) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K})$.

Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, le système (C.L₂) possède une unique solution sur I .



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 15 :

On veut résoudre le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' - y = e^{2x} - e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

D'après l'exemple (14), les solutions générales sur \mathbb{R} sont de la forme :

$$x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2} \right) e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0$, *i.e.* $(\lambda; \mu)$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1 \\ \lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \mu = \frac{5}{12} \end{cases}$$

L'unique solution est ainsi la fonction

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exercice 12 :

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\textcircled{1} \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exercice 12 :

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\textcircled{1} \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y'' + y = \cos^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les $(EDL_2)_0$) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0; y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les (EDL₂)₀) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0; y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque : Ici encore, la seule solution de (EDL₂)₀ telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ est la fonction nulle.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 16 :

Considérons $y'' - 2y' + y = 0$.

Les solutions sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$x \mapsto e^x.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Corollaire 5 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \quad (\text{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Corollaire 5 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \quad (\text{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Vocabulaire : Le second membre d'une équation différentielle

$ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé **signal d'entrée** et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudié.

On parle de **régime libre** si f est la fonction nulle, et de **régime forcé** sinon.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exercice 13 :

Résoudre sur \mathbb{R} , l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2e^x$ avec les conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- 1 Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- 1 Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- 2 Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- 1 Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- 2 Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - 1 $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- ❶ Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- ❷ Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - ❶ $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - ❷ $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + e^{r_2x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- 1 Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- 2 Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - 1 $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - 2 $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + e^{r_2x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
- 3 Trouver une solution particulière : y_p



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- ❶ Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- ❷ Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - ❶ $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - ❷ $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + e^{r_2x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
- ❸ Trouver une solution particulière : y_p
 - ❶ On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- ① Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- ② Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - ① $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - ② $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + e^{r_2x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
- ③ Trouver une solution particulière : y_p
 - ① On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
 - ② Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- ❶ Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- ❷ Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - ❶ $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - ❷ $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
- ❸ Trouver une solution particulière : y_p
 - ❶ On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
 - ❷ Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
- ❹ Donner l'allure générale des solutions : $y = y_H + y_p$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Méthode 4 :

- ❶ Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
- ❷ Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
 - ❶ $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
 - ❷ $x \mapsto \lambda e^{r_1x} + e^{r_2x}$, $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$ ou $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
- ❸ Trouver une solution particulière : y_p
 - ❶ On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
 - ❷ Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
- ❹ Donner l'allure générale des solutions : $y = y_H + y_p$.
- ❺ Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L , et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux)

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}.$$

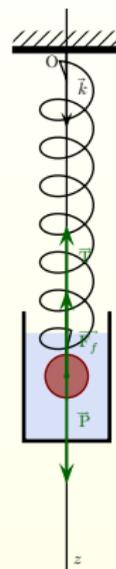


Figure 6 – Oscillateur harmonique en régime libre

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Mise en équation : Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical orienté vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - K(z - L) + mg \iff mz'' + \alpha z' + Kz = KL + mg.$$

Cette équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = L + \frac{mg}{K}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).

En portant l'origine en z_0 *i.e.* en posant $Z = z - z_0$, on obtient :

$$mZ'' + \alpha Z' + KZ = 0 \iff Z'' + 2\lambda Z' + \omega^2 Z = 0.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

L'équation du mouvement est donc régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0. \quad (\text{Oscil}_0)$$

Où on a noté, comme d'usage en physique :

- $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$, le coefficient d'amortissement de l'oscillateur,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui représente la pulsation propre.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- Régime apériodique quand $\lambda > \omega_0$,

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (3), (5) et (4).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (3), (5) et (4).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- Régime pseudo-périodique quand $\lambda < \omega_0$.

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (3), (5) et (4).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exercice 14 :

Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime libre donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 0. \quad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique :
Oscillateur linéaire en régime forcé) :

On reprend l'équation précédente mais avec
un second membre non nul :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = F \cos(\omega t). \quad (\text{Oscil})$$

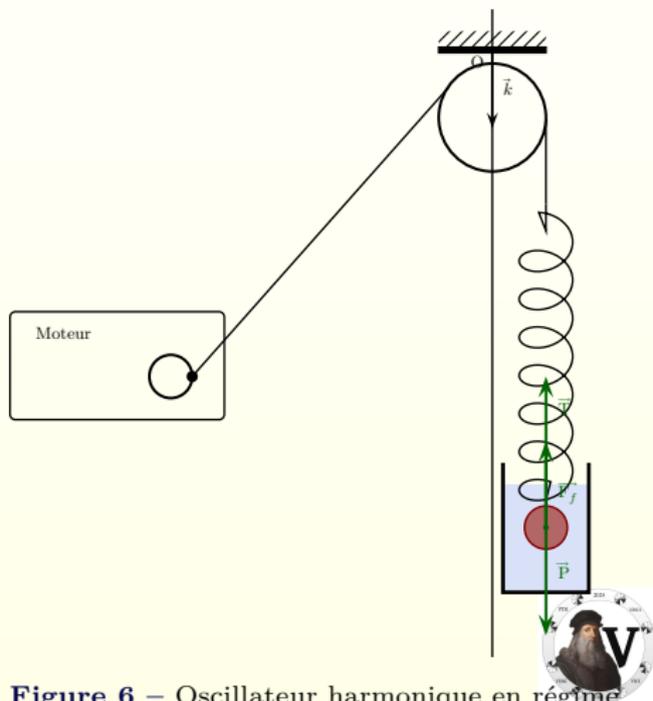


Figure 6 – Oscillateur harmonique en régime forcé

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Interprétation physique : Ceci se traduit en disant que le mouvement obtenu est la somme de l'oscillation propre, qui dépend des conditions initiales, et de l'oscillation forcée par la force extérieure ; on parle aussi de réponse à l'excitation décrite par le second membre.

Généralement, il suffit de ne considérer que cette réponse qui subsiste seule après l'extinction de l'oscillation propre due à l'amortissement.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Résolution : Pour ce faire il est commode d'utiliser les nombres complexes en considérant l'équation :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = F e^{i\omega t}.$$

La recherche d'une solution particulière sous la forme $\tilde{z}_p = Z e^{i\omega t}$ conduit à

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)Z = F \iff Z = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} F.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Fonction de transfert : En posant $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$, cette équation se réécrit :

$$Z = H(\omega)F.$$

$H(\omega)$ représente la fonction de transfert qui décrit la réponse en fonction de la pulsation.

Écrite sous sa forme exponentielle on a $H(\omega) = |H|e^{i\varphi}$ puis $\tilde{z}_p = |H(\omega)| F e^{i(\omega t + \varphi)}$.

Notre solution particulière s'écrit alors :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi).$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi).$$

Interprétation : Ainsi, à une excitation sinusoïdale un système linéaire fait correspondre une réponse sinusoïdale de même pulsation.

De même, à une somme de sinusoïdes correspond une somme de sinusoïdes. Pour chacune d'entre elles le module et l'argument de la fonction de transfert représentent respectivement l'amplification et le déphasage.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Systeme conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

L'amplification croît avec un déphasage nul à partir de la valeur statique $\frac{F}{\omega_0}$ jusqu'à l'infini lorsque ω atteint la valeur ω_0 .



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

Ensuite elle décroît jusqu'à zéro avec un déphasage égal à $-\pi$, le déphasage étant défini par :

$$\begin{cases} \cos \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\omega_0^2 - \omega^2) |H(\omega)| = -1 \\ \sin \varphi &= - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 2\lambda\omega |H(\omega)| = 0 \end{cases}$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

La valeur infinie correspond à la **résonance** lorsque le système est excité à sa pulsation propre ω_0 .

Dans la conception d'un système, le simple calcul de cette pulsation (ou fréquence ou période propre) peut conduire à modifier l'inertie ou la raideur d'un système pour l'éloigner des excitations attendues.

En tout état de cause, la réponse ne peut être que finie à cause de l'amortissement qui est négligé ici.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, l'amplification est :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

Il apparaît que le dénominateur de la fonction de transfert ne peut plus s'annuler : pour un amortissement faible on a une courbe de réponse voisine de celle du système non amorti mais avec un maximum fini.

En annulant la dérivée de $|H(\omega)|$ par rapport à ω^2 , on obtient la pulsation qui donne ce maximum :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, l'amplification est :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

À mesure que le coefficient d'amortissement λ augmente, l'abscisse du maximum diminue jusqu'à 0 où la fonction $|H(\omega)|$ de ω devient décroissante, ce qui se produit pour l'amortissement critique :

$$\omega_0^2 - 2\lambda_{crit}^2 = 0 \iff \lambda_{crit} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)| F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Le déphasage est, ici, défini par :

$$\begin{cases} \cos \varphi &= (\omega_0^2 - \omega^2)|H(\omega)| \\ \sin \varphi &= -2\lambda\omega|H(\omega)| \end{cases}$$

- Pour les plus petites valeurs de la pulsation on a le régime quasi statique dominé par la raideur dans lequel la réponse est en phase avec l'excitation.
- Pour les plus grandes, on atteint le régime dominé par l'inertie dans lequel la réponse est en opposition et l'amplification est de l'ordre de $\frac{F}{\omega^2}$.

L'amortissement devient essentiel loin de ces deux extrêmes.



III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3. Problème de Cauchy associé à une EDL₂

Exercice 15 :

Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 5 \cos(t). \quad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

On déterminera également le comportement asymptotique correspondant physiquement à l'état stable.

