Primitives et calculs d'intégrales

I/ Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 1 (Simplissimes) : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes. On précisera les intervalles de primitivation.

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1-5t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \sqrt[5]{t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^\alpha(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln^\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x t(2t^2+1)^4\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int^x \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int^x \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
18. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)+2}}\,\mathrm{d}t$
19. $\displaystyle\int^x \frac{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
20. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4\mathrm{d}t$
21. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(t)-\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
22. $\displaystyle\int^x \tan(t)\,\mathrm{d}t$
23. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$
24. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}t$
25. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+\mathrm{i}+t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques) : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \cos^4(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 : Montrer que $\forall\ (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin(x)-\sin(y)|\leqslant|x-y|$.

Exercice 4 : Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f\,:\,x\longmapsto\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I}=[0\,;+\infty[$.
2. $f\,:\,x\longmapsto\displaystyle\int_{-3}^x \mathrm{e}^{2t+4}\,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I}=[-3\,;+\infty[$.

Primitives et calculs d'intégrales

3. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
4. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \ln(t) \, \mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Exercice 5 :

1. Étudier les variations de la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x} (t^2 + 3t - 4) \, \mathrm{d}t$.
2. Étudier la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}\,(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 6 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2} \, \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
7. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln(x) \, \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \, \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2 \, \mathrm{d}u$
14. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes (p et q entiers naturels donnés)

1. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx) \, \mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\cos(px)\sin(qx) \, \mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\sin(px)\sin(qx) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 8 : Soit α un réel.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer en fonction de ε et α l'intégrale $\mathrm{I}_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^\alpha \ln(x) \, \mathrm{d}x$
3. En déduire, suivant la valeur de α, l'existence et la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_\varepsilon$.

Primitives et calculs d'intégrales

II/ Intégration par parties

Exercice 9 : Déterminer les primitives ou les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties en précisant le ou les intervalles considérés le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \cos(t)\exp(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \cos(t)\ln\left(1+\cos(t)\right)\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int^x \left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^t \ln(t)\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int^x t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$, $(n\in\mathbb{N})$
13. $\displaystyle\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int^x \arccos(t)\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 : Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^e t(\ln(t))^n\,dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_3.

Exercice 11 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^x (\ln(t))^n\,dt$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, simplifier $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{\mathrm{I}_n}{n!}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pour $n\geqslant 2$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{\mathrm{I}_k}{k!}+\frac{\mathrm{I}_{k+1}}{(k+1)!}\right)$ en fonction de I_n.
3. En déduire une expression de I_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (Intégrales de Wallis) : On pose, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Pour $n\geqslant 2$, donner une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}.
3. En déduire que la suite $\left(n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

Primitives et calculs d'intégrales

III/ Changement de variables

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et 1-périodique et F une primitive de f.

À quelle condition F est-elle également 1-périodique ? Généraliser le résultat pour f qui est T-périodique.

Exercice 14 : Soit $f : [-1\,;1] \longmapsto \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 : Calculer les intégrales suivantes (a réel donné)

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (0 < a)$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+|x(1-x)|}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2 x}$.

Exercice 16 : Déterminer les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\displaystyle\int^x x^2 \ln|x|\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x x^2\arctan(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x^5-1)}\,\mathrm{d}x \qquad (u = x^5)$
7. $\displaystyle\int^x \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \qquad (x = \tan(t))$
8. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x\sqrt{x(x-1)}}\,\mathrm{d}x \qquad \left(x = \frac{1}{t}\right)$

IV/ Fonctions rationnelles

Exercice 17 : Calculer les primitives suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\displaystyle\int^x \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \frac{2x+1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \frac{2x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int^x \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int^x \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int^x \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int^x \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$
14. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-5x-2}$
15. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x+1}$
16. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{9x^2-6x+1}$
17. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$
18. $\displaystyle\int^x \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int^x \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

V/ Fonctions trigonométriques

Exercice 18 : Déterminer les primitives suivantes, en précisant, si nécessaire, les intervalles de validité des calculs :

1. $\displaystyle\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int^x x^2\,\mathrm{e}^{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$
4. $\displaystyle\int^x \sin^8(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \cos^{2003}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\mathrm{ch}\,(t)\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t.$
8. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \mathrm{sh}^4(t)\,\mathrm{d}t.$
11. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sin(x)}$ et $\displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}.$
12. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\tan(x)}$ et $\displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{th}\,(x)}.$
13. $\displaystyle\int^x \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\sin(x)}.$
14. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2+\sin^2(x)}.$
15. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.$
16. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(3x)}{\sin(x)+\sin(3x)}.$
17. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}.$
18. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)+\mathrm{sh}\,(x)}\,dx.$
19. $\displaystyle\int^x \frac{3-\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int^x \frac{1}{7+\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 19 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 20 (Diverses) : Calculer les primitives ou intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int^x x^3 e^x\,dx.$
4. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,dt.$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos(x))^2\,\mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int^x e^{\sin^2(x)}\sin 2x\,dx.$
8. $\displaystyle\int^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$
9. $\displaystyle\int^x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$
10. $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ pour $0<x<1$.
11. $\displaystyle\int^x \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
12. $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ avec $0<x<a$.
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$
15. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$
16. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x.$