Primitives et calculs d'intégrales

I/ Théorème fondamental de l'analyse

Exercice 1 (Simplissimes) : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes. On précisera les intervalles de primitivation.

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1-5t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \sqrt[5]{t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \tan(t)\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int^x t(2t^2+1)^4\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^\alpha(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln^\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
13. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
17. $\displaystyle\int^x \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
18. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
19. $\displaystyle\int^x \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
20. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)+2}}\,\mathrm{d}t$
21. $\displaystyle\int^x \frac{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
22. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4\,\mathrm{d}t$
23. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(t)-\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
24. $\displaystyle\int^x e^{\sin^2(t)}\sin(2t)\,\mathrm{d}t.$
25. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}t$
26. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+\mathrm{i}+t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques) : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \cos^4(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 : Montrer que $\forall\ (x\,;y)\in\mathbb{R}^2$, $|\sin(x)-\sin(y)|\leqslant|x-y|$.

Exercice 4 : Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I}=[0\,;+\infty[$.
2. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{-3}^x \mathrm{e}^{2t+4}\,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I}=[-3\,;+\infty[$.

3. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
4. $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \ln(t) \,\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Correction : D'après le théorème fondamental de l'analyse, la seule justification à donner est la continuité de l'intégrande sur l'intervalle considéré. Une fois cela réalisé, le théorème affirme que la primitive est de classe $\mathscr{C}^1$ sur celui-ci.

C'est le cas des quatre fonctions considérées. On ne le redira pas.

Pour tout x de I on a donc :

1. $\left(\displaystyle\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t\right)' = x^2$.
2. $\left(\displaystyle\int_{-3}^x \mathrm{e}^{2t+4} \,\mathrm{d}t\right)' = \mathrm{e}^{2x+4}$.
3. $\left(\displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right)' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
4. $\left(\displaystyle\int_x^{2x} \ln(t) \,\mathrm{d}t\right)' = 2\ln(2x) - \ln(x) = 2\ln(2) + \ln(x)$.

Exercice 5 :

1. Étudier les variations de la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{-5}^x (t^2 + 3t - 4) \,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}\,(t)}{t} \,\mathrm{d}t$.

Correction :

2. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc F sera définie si, et seulement si $\forall\, t \in [x\,;2x]$, $t \neq 0$ *i.e.* si, et seulement si $x \neq 0$.

   Donc $\mathscr{D}_{\mathrm{F}} = \mathbb{R}^*$.

   Étudions les variations de F :

   En notant φ une primitive de f sur l'un des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on peut écrire $\mathrm{F}(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$, somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(x) = 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) &= \frac{2\mathrm{sh}\,(2x)}{2x} - \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} \\ &= \frac{\mathrm{sh}\,(2x) - \mathrm{sh}\,(x)}{x}.\end{aligned}$$

   La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\,(2x) - \mathrm{sh}\,(x)$ est du signe de x *i.e.* $\forall\, x \in \mathscr{D}_{\mathrm{F}}$, $\mathrm{F}'(x) > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \,\|\|\, 0$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut compléter l'étude par des calculs de limites aux bornes du domaine de définition, que nous ne détaillerons pas ici car ils utilisent des techniques sur les intégrales dont nous parlerons dans un futur chapitre, mais qui apparaissent dans le tableau de variations ci-dessus.

On peut même prolonger F par continuité en posant $\mathrm{F}(0) = 0$ pour en faire une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$			$+$		
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)}\sin(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{4} (x-1)^2\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
7. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u$
14. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes (p et q entiers naturels donnés)

1. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\cos(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2\sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x.$

Correction :

1. On sait que $\cos(px)\cos(qx) = \dfrac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$:

Si $p \neq q$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^\pi = 0.$

Si $p = q \neq 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2px))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$

Si $p = q = 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{d}x = \pi.$

La démarche est identique pour les deux autres questions :

2. On trouve $\displaystyle\int_0^\pi \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = 0$ si $p \neq q$ et $\dfrac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout choix de p et q.

Exercice 8 : Soit α un réel.

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer en fonction de ε et α l'intégrale $\mathrm{I}_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. En déduire, suivant la valeur de α, l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon$.

II/ Intégration par parties

Exercice 9 : Déterminer les primitives ou les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties en précisant le ou les intervalles considérés le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \cos(t)\exp(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \cos(t)\ln(1+\cos(t))\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int^x \left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^t \ln(t)\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int^x t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$, $(n\in\mathbb{N})$
13. $\displaystyle\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int^x \arccos(t)\,\mathrm{d}t$
15. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$
16. $\displaystyle\int^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Correction : Après avoir vérifié que les fonctions u et v étaient bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à préciser, on utilise la formule

$$\int^x uv' = [uv]^x - \int^x u'v.$$

1. Pour tout $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Une IPP s'écrit :
$$\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]^x - \frac{1}{2}\int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right).$$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (intégration par parties).

3. Considérons une intégration par parties avec $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1] \subset]-1\,;+\infty[$:
$$\int_0^1 t\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t(t+1)\sqrt{t+1}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (t+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t(t+1)\sqrt{t+1} - \frac{4}{15}(t+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Avec $u : x \longmapsto \ln(x)$ et $v : x \longmapsto \frac{x^3}{3}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, une IPP s'écrit :
$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\times t^2\,\mathrm{d}t &= \left[\ln(t)\times\frac{t^3}{3}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\times\frac{t^3}{3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int_1^x \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^x \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

5. On pose $u : x \longmapsto \big(\ln(x)\big)^2$ et $v : x \longmapsto x$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned}\int^x \big(\ln(t)\big)^2\,dt &= \left[t\ln^2(t)\right] - 2\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) - 2x.\end{aligned}$$

6. Notons $\mathrm{I} = \displaystyle\int^x \cos(t)\exp(t)\,dt$.

   Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp(x)$ et $v' = \cos(x)$.

   Alors $u' = \exp(x)$ et $v = \sin(x)$.

   Donc,
$$\mathrm{I} = \int^x \cos(t)\exp(t)\,dt = \big[\sin(t)\exp(t)\big]^x - \int^x \sin(t)\exp(t)\,dt$$

   Si l'on note $\mathrm{J} = \displaystyle\int^x \sin(t)\exp(t)\,dt$, alors on a obtenu
$$\mathrm{I} = \big[\sin(t)\exp(t)\big]^x - \mathrm{J} \tag{VIII.1}$$

   Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp(x)$ et $v' = \sin(x)$. Ce qui donne
$$\mathrm{J} = \int^x \sin(t)\exp(t)\,dt = \big[-\cos(t)\exp(t)\big]^x - \int^x -\cos(t)\exp(t)\,dt = \big[-\cos(t)\exp(t)\big]^x + \mathrm{I}$$

Primitives et calculs d'intégrales

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$\mathrm{J} = \big[-\cos(t)\exp(t) \big]^x + \mathrm{I} \tag{VIII.2}$$

Repartons de l'équation (VIII.1) dans laquelle on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (VIII.2).

$$\mathrm{I} = \big[\sin(t)\exp(t)\big]^x - \mathrm{J} = \big[\sin(t)\exp(t)\big]^x - \big[-\cos(t)\exp(t)\big]^x - \mathrm{I}$$

D'où

$$2\mathrm{I} = \big[\sin(t)\exp(t)\big]^x + \big[\cos(t)\exp(t)\big]^x.$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\big(\sin(x) + \cos(x)\big)\exp(x).$$

Commentaires : *Il existe plusieurs autres méthodes dont celle de passer par les complexes que nous reverrons ou celle de chercher une primitive sous la forme : $x \longmapsto (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))\exp(x)$. En dérivant et identifiant, on trouvera $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.*

7. $\displaystyle\int^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2\int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).$

8. $$\begin{aligned}\int^x e^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t &= xe^{\arccos(x)} + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= xe^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}e^{\arccos(x)} + \int^x \sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Donc, $\displaystyle\int^x e^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(xe^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}e^{\arccos(x)}\right).$

9. $$\begin{aligned}\int^x \cos(t)\ln(1+\cos(t))\,\mathrm{d}t &= \sin(x)\ln(1+\cos(x)) - \int^x \sin(t)\frac{-\sin(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)\ln(1+\cos(x)) - \int^x \frac{\cos^2(t)-1}{\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)\ln(1+\cos(x)) - \int^x (\cos(x)-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\ln(1+\cos(x)) - \sin(x) + x.\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\frac{x}{(x+1)^2}e^x = \frac{1}{x+1}e^x - \frac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\frac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc $\displaystyle\int^x \frac{te^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{x+1}.$

11. $\displaystyle\int^x \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int^x e^{t\ln(t)-t}\,d(t\ln(t)-t) = e^{x\ln(x)-x} = \left(\frac{x}{e}\right)^x \mathrm{d}t.$

12. $\displaystyle\int^x t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{1}{n+1}\int^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$

13. $\displaystyle\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = x\sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

    Donc , $\displaystyle\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))).$

    De même, $\displaystyle\int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = x\cos(\ln(x)) + \int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = x\cos(\ln(x)) + x\sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t.$

    Donc, $\displaystyle\int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))).$

14. $\displaystyle\int^x \arccos(t)\,\mathrm{d}t = x\arccos(x) + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}.$
15. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\arctan(t)\Big]_0^1 - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$
16. On considère intelligemment, $u : x \longmapsto \dfrac{1}{2}(1+x^2)$ et $v : x \longmapsto \arctan(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan(x) - \frac{1}{2}x.$$

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_3.

Correction :

1. $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$

   Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^2$ et $t \longmapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on peut utiliser une IPP pour I_1 :

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln^n(t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2-1\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right).$$

2. Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^2$ et $t \longmapsto \ln^{n+1}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on peut utiliser une IPP pour I_{n+1} :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} t\ln^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln^{n+1}(t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{n+1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t\ln^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, $\mathrm{I}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{2}{2}\mathrm{I}_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2-1\right).$

   Et, $\mathrm{I}_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{2}\mathrm{I}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{8}\left(\mathrm{e}^2-1\right) = \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^2+3\right).$

Commentaires : *La relation de récurrence trouvée à la question (2) permet de trouver une forme explicite de I_n :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \frac{\mathrm{e}^2}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{2^k(n-k)!} - (-1)^n\frac{n!}{2^n}\mathrm{I}_0.$$

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^x (\ln(t))^n \,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, simplifier $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour $n \geqslant 2$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{\mathrm{I}_k}{k!} + \frac{\mathrm{I}_{k+1}}{(k+1)!}\right)$ en fonction de I_n.
3. En déduire une expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $x \longmapsto t$ et $x \longmapsto \ln^{n+1}(t)t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Une IPP s'écrit alors :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \int_1^x \ln^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^{n+1}(t)\right]_1^x - (n+1)\int_1^x t \times \frac{1}{t}\ln^n(t)\,\mathrm{d}t = x\ln^{n+1}(x) - (n+1)\mathrm{I}_n.$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} = \dfrac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}$.

2. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{\mathrm{I}_k}{k!} + \frac{\mathrm{I}_{k+1}}{(k+1)!}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{I}_k}{k!} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{I}_k}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\mathrm{I}_k}{k!} - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{I}_k}{k!}\\ &= (-1)^1\frac{\mathrm{I}_1}{1!} + (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{I}_n}{n!} = -\mathrm{I}_1 - (-1)^n\frac{\mathrm{I}_n}{n!}\end{aligned}$$

Avec $\mathrm{I}_1 = x\ln(x) - x + 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{\mathrm{I}_k}{k!} + \frac{\mathrm{I}_{k+1}}{(k+1)!}\right) = -x\ln(x) + x - 1 - (-1)^n\frac{\mathrm{I}_n}{n!}.$$

3. D'après la question précédente, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= (-1)^n n!\left(-x\ln(x) + x - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!}\right)\\ &= (-1)^n n!\left((-1)^1\frac{x\ln^1(x)}{1!} + (-1)^0\frac{x\ln^0(x)}{0!} - 1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{x\ln^k(x)}{k!}\right).\\ &= (-1)^n n!\left(-1 + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x\ln^k(x)}{k!}\right).\end{aligned}$$

Formule encore valide pour $n = 1$.

Exercice 12 (Intégrales de Wallis) : On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Pour $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}.
3. En déduire que la suite $\left(nW_nW_{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

Correction :

1. Rapidement, on a :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2. Soit $n \geqslant 2$.

   Les fonctions $t \longmapsto \sin(t)$ et $t \longmapsto \cos^{n+1}(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité)} \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n \iff (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. Pour $n \geqslant 1$, notons $u_n = nW_nW_{n-1}$.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)W_{n+1}W_n - nW_nW_{n-1} = W_n\Big((n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}\Big) = 0.$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante dès $n = 1$, de valeur $u_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

Un peu d'histoire : *John Wallis, né le 23 novembre **1616** à Ashford, et mort le 28 octobre **1703** à Oxford, est un mathématicien anglais.*

Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

Wallis a fait ses études à Cambridge, à l'Emmanuel College d'abord, puis au Queens' College. Étudiant d'abord la théologie, il est ordonné en 1640. Il se réoriente ensuite vers les mathématiques et montre un grand talent pour la cryptographie durant la guerre civile, en décryptant les messages des royalistes. Il occupe ensuite la chaire savilienne de géométrie à l'université d'Oxford, succédant à Peter Turner, renvoyé car royaliste. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society.

— *Ses travaux en mathématiques concernent principalement le calcul différentiel et intégral où il introduit les intégrales de Wallis d'allure générale* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

- *On lui doit également le symbole de l'infini, ∞, que l'on utilise de nos jours, ainsi que l'infinitésimal $\dfrac{1}{\infty}$ dont il s'est servi dans des calculs d'aire.*
- *Il assista l'astronome Jeremiah Horrocks pour ses calculs d'éphémérides, notamment lors du transit de Vénus de 1639.*
- *Il résolut le problème de la voûte quarrable (1692), posé par Vincenzo Viviani : trouver une fenêtre dans une voûte hémisphérique de sorte que le reste de la voûte soit quarrable, c'est-à-dire dont l'aire puisse s'écrire c^2, où c est un nombre constructible à la règle et au compas.*
- *La formule du produit de Wallis :*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

est équivalente au développement en fraction continue généralisée de $\dfrac{4}{\pi}$ trouvé par William Brouncker et semble avoir été inspirée par celui-ci.

III/ Changement de variables

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et 1-périodique et F une primitive de f.

À quelle condition F est-elle également 1-périodique ? Généraliser le résultat pour f qui est T-périodique.

Exercice 14 : Soit $f : [-1\,;1] \longmapsto \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Correction : Comme $t \longmapsto \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$, la fonction $t \longmapsto f(\cos(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale est définie.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$. On pose donc $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, changement de variables strictement décroissant de classe $\mathscr{C}^1$ entre $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et lui-même.

D'où,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t))\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(u))\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 15 : Calculer les intégrales suivantes (a réel donné)

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx \quad (0<a)$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\,dx$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2 x}$.

Correction :

1. On pose $t=\dfrac{1}{x}$ et donc $x=\dfrac{1}{t}$ et $dx=-\dfrac{1}{t^2}\,dt$.

   On obtient :

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,dt=-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt=-\mathrm{I}.$$

   Donc, $\mathrm{I}=0$.

2. On pose $u=\dfrac{1}{x}$ *i.e.* $du=-\dfrac{dx}{x^2}=u^2\,dx$ et on obtient :

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\,dx=\int_{2}^{\frac{1}{2}}(1+u^2)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

   Sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;2\right]$, $\arctan\left(\dfrac{1}{u}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(u)$:

$$\begin{aligned}
&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(u)\right)du\\
&=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}1+\frac{1}{u^2}\,du-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\arctan(u)\,du\\
&=\frac{\pi}{2}\left[u-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}-\mathrm{I}=\frac{3\pi}{2}-\mathrm{I}.
\end{aligned}$$

   Donc, $\mathrm{I}=\dfrac{3\pi}{4}$.

3. $\displaystyle\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{1+x(1-x)}\,dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2$.

Primitives et calculs d'intégrales

Pour I_1, $1+x(x-1)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et on pose $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}\,(t)$ et donc $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+2)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\ln(\sqrt{3})}-\mathrm{e}^{2\ln(2-\sqrt{3})}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\ln(\sqrt{3})}-\mathrm{e}^{-2\ln(2-\sqrt{3})}\right)+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3}))\right)\\
&=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2\right)-\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}\right)-2\ln(2\sqrt{3}-3)\right)\\
&=\frac{3}{16}\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2\right)-2\ln(2\sqrt{3}-3)\right)\\
&=-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3).
\end{aligned}$$

Pour I_2, $1+x(1-x)=-x^2+x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et on pose $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(t)$ et donc $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= \int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(t)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{5}{8}\int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{5}{8}\left(2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)\qquad\text{avec } \frac{1}{2}\sin(2t)=\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)},\\
&=\frac{5}{4}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\\
&=\frac{5}{4}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3)+\frac{5}{4}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}$.

4. $$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}(-\mathrm{d}u)\\
&=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,du-\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\
&=-\pi\Big[\arctan(\cos u)\Big]_0^{\pi}-\mathrm{I}=\frac{\pi^2}{2}-\mathrm{I}.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{I}=\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 16 : Déterminer les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\displaystyle\int^x x^2 \ln|x| \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x x\ln^2 x \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x x^2 \arctan(x) \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x^5-1)} \,\mathrm{d}x \quad (u = x^5)$
7. $\displaystyle\int^x \frac{x^3}{(x^2+1)^3} \,\mathrm{d}x \quad (x = \tan(t))$
8. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x\sqrt{x(x-1)}} \,\mathrm{d}x \quad \left(x = \frac{1}{t}\right)$

Correction :

5. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ n'est continue que $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$. On considère donc $x \in \mathrm{I}$ où I est un segment d'intersection vide avec $[-1\,;1]$.

   Sur cet intervalle, on pose alors $u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \implies x = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ qui est bien strictement monotone et de classe $\mathscr{C}^1$ (en x) sur I.

   On remplace dans l'intégrande avec $\mathrm{d}x = \dfrac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u$:

$$\int^x \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int^u \frac{1-u^2}{1+u^2} \times u \times \frac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u.$$

   On est ramené à la primitivation d'une fraction rationnelle, ce qui passe par une décomposition en éléments simples.

   On trouve :

$$\frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} = \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u)(1+u)} = \frac{au+b}{1+u^2} + \frac{c}{1-u} + \frac{d}{1+u}.$$

   Pour les pôles 1 et -1, on trouve rapidement $c = 1$ et $d = 1$.

   En multipliant les deux membres par $1+u^2$, évaluant en $u = \mathrm{i}$ puis identifiant parties réelle et imaginaire, on trouve aussi $a = 0$ et $b = -2$.

$$\begin{aligned}\text{D'où, } \int^x \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int^u -\frac{2}{1+u^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 2\arctan(u) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right).\end{aligned}$$

   On vérifiera que chaque terme est correctement défini sur I.

Primitives et calculs d'intégrales

Commentaires : *Si jamais la fonction* argth *avait été au programme, le résultat, plus symétrique, aurait été plus joli puisqu'on aurait trouvé :*

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int^u \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \int^u -\frac{2}{1+u^2}+\frac{2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\left(\operatorname{argth}(u) - \arctan(u)\right) \\ &= 2\left(\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right).\end{aligned}$$

IV/ Fonctions rationnelles

Exercice 17 : Calculer les primitives suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\displaystyle\int^x \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int^x \frac{2x+1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int^x \frac{2x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int^x \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int^x \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int^x \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int^x \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$
14. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-5x-2}$
15. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x+1}$
16. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{9x^2-6x+1}$
17. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$
18. $\displaystyle\int^x \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int^x \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Correction :

1. $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1 = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)-(\mathrm{X}-1) = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}-1) = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)$.

   Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \dfrac{\mathrm{X}^5}{\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}$ est de la forme $a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+\dfrac{d_1}{\mathrm{X}-1}+\dfrac{d_2}{(\mathrm{X}-1)^2}+\dfrac{e}{\mathrm{X}+1}$.

   Détermination de a, b et c :

   La division euclidienne de X^5 par $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ s'écrit $\mathrm{X}^5 = (\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)+2\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-2$. On a donc $a=1$, $b=1$ et $c=2$.

   $e = \displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$. Puis, $d_2 = \displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)^2f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}$. Enfin, $x=0$ fournit $0 = c-d_1+d_2+e$ et donc, $d_1 = -2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = -\dfrac{9}{4}$. Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3 - X^2 - X + 1} = X^2 + X + 2 - \frac{9}{4}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1|.$$

2. On pose $u = x^2$ et donc $du = 2xdx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(u+1)^2} &= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2})\,du \\ &= \frac{1}{2}(\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1}) \\ &= \frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}).\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} &= \int \frac{dx}{2x} - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{dx}{2(x+2)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln|x| + \ln|x+2|\Big) - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

4. $$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|.$$

5. $$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2}\,dx &= -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x}. \\ &= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \ln|x|.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^3-1}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx &= -3\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{x-3} \\ &= -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C.\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \int dx - 2\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= x - \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

9. $$\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan(x) - 2\int^x \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx.$$

Dans la dernière intégrale, on pose $u = \sqrt{x}$ et donc $x = u^2$ puis, $dx = 2u\,du$.

On obtient $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int^x \frac{2u^2}{u^4+1}\,du.$

Primitives et calculs d'intégrales

Mais,

$$\begin{aligned}\frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int^x \frac{2u^2}{u^4+1}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}u-1)+\arctan(\sqrt{2}u+1)\right),$$

et donc,

$$\int^x \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\arctan(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right)-\sqrt{2}\left(\arctan(\sqrt{2x}-1)+\arctan(\sqrt{2x}+1)\right).$$

10. En posant $u=x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int^x \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du,$$

puis en posant $v=\sqrt{u+1}$ et donc $u=v^2-1$ et $du = 2vdv$, on obtient

$$\int^x \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du = \int^x \frac{v}{v^2-1}\,2vdv = 2\int^x \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv = 2v+\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right|.$$

Finalement,

$$\int^x \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}(2\sqrt{x^n+1}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|).$$

19. La fonction rationnelle $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x^2+x+1)^2}$ admet une décomposition en éléments simples (qui n'est pas au programme) de deuxième espèce de la forme :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Déterminons les coefficients :

— $(x^2+x+1)^2\varphi(x)\Big|_{x=\mathrm{j}} = \mathrm{j}^3 = a\,\mathrm{j}+b \iff 1 = a\,\mathrm{j}+b \implies a=0$ et $b=1$.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x) = 1 \implies 1 = c.$

— $\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0 \implies 0 = b+d \implies d=-1.$

Donc, $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \dfrac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{x-1}{x^2+x+1}.$

Primitivons chaque terme séparément :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Et,

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+t+1)^2} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1}{3}(2t+1)^2\right)^2}$$

En posant $\tan(u) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)$ *i.e.* $(1+\tan^2(u))\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}&= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int^u \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2(u)} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int^u \cos^2(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\int^u 1+\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{4\sqrt{3}}{9}u + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin(2u)\end{aligned}$$

Or, $\sin(2\arctan(v)) = 2\sin(\arctan(v))\cos(\arctan(v)) = 2\tan(\arctan(v))\cos^2(\arctan(v)) = \dfrac{2v}{1+v^2}$,

$$\begin{aligned}&= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(2t+1)}{1+\frac{(2t+1)^2}{3}}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int^x \frac{t^3}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

V/ Fonctions trigonométriques

Exercice 18 : Déterminer les primitives suivantes, en précisant, si nécessaire, les intervalles de validité des calculs :

1. $\displaystyle\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int^x x^2\,\mathrm{e}^{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int^x \sin^8(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \cos^{2003}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\mathrm{ch}\,(t)\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int^x \mathrm{sh}^4(t)\,\mathrm{d}t$.
11. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sin(x)}$ et $\displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$.
12. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\tan(x)}$ et $\displaystyle\int^x \frac{1}{\mathrm{th}\,(x)}$.
13. $\displaystyle\int^x \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\sin(x)}$.
14. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2+\sin^2(x)}$.
15. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$.
16. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(3x)}{\sin(x)+\sin(3x)}$.
17. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.
18. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)+\mathrm{sh}\,(x)}\,dx$.
19. $\displaystyle\int^x \frac{3-\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int^x \frac{1}{7+\tan(x)}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\sin(2x)+2\cos(2x)}{5}\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. $\displaystyle\int^x e^t\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2\sin(2x)+\cos(2x)-5}{10}\,\mathrm{e}^{x}$.
3. $\displaystyle\int^x x^2 e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int^x x^2 e^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x\right)$.

   Or,
$$\begin{aligned}\int^x x^2\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x &= x^2\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{2}{1+i}\int^x x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{2}{1+i}\left(x\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+i} - \int^x \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= x^2\frac{(1-i)\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{2} + ixe^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{1+i}\\ &= \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}x^2(1-\mathrm{i})(\cos x+\mathrm{i}\sin x) + ix(\cos x+\mathrm{i}\sin x) - \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\right).\end{aligned}$$
   Par suite,
$$\int^x x^2 e^x \sin x\,\mathrm{d}x = e^x\left(\frac{x^2}{2}(\cos x+\sin x) - x\sin x - \frac{1}{2}(\cos x-\sin x)\right).$$
4. $\displaystyle\int^x \sin^8(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\sin^9(x) - \frac{1}{11}\sin^{11}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\displaystyle\int^x \cos^{2003}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2004}\cos^{2004}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\mathrm{ch}\,(t)\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\Big(\sin(2x)\mathrm{ch}\,(2x) - \cos(2x)\mathrm{sh}\,(2x)\Big)$.
8. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^{\,3}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\,(t) + \frac{1}{3}\mathrm{sh}^{\,3}(t)$ ou $\displaystyle\frac{1}{12}\mathrm{sh}\,(3t) + \frac{3}{4}\mathrm{sh}\,(t)$.
9. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}(\sin(4t) + 8\sin(2t) + 12t)$.
10. $\displaystyle\int^x \mathrm{sh}^{\,4}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}(\mathrm{sh}\,(4t) - 8\mathrm{sh}\,(2t) + 12t)$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$, sur $]k\pi\,;(k+1)\pi[$ avec un changement de variable $u = \cos(x)$ ou $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)|$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{th}\,x} = \ln|\mathrm{sh}\,(x)|$.
13. $\displaystyle\int \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos(x)}{x-\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-\sin(x)|$.
14. $\displaystyle\frac{1}{2+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\dfrac{2}{\cos^2(x)} + \tan^2(x)}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \frac{1}{2+3\tan^2(x)}\mathrm{d}(\tan(x))$, et en posant $u = \tan(x)$,

$$\int \frac{1}{2+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}u\Big) = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan(x)\right).$$

15. Posons $\displaystyle \mathrm{I} = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle \mathrm{J} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

Alors, $\displaystyle \mathrm{I}+\mathrm{J} = \int dx = x$ et $\displaystyle \mathrm{I}-\mathrm{J} = \int \frac{-\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos(x)+\sin(x)|$.

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$\mathrm{I} = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos(x)+\sin(x)|).$$

ou bien, en posant $u = x - \dfrac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}(u + \ln|\cos u|) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4} + \ln\Big|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x)+\sin(x))\Big|\right)\\ &= \frac{1}{2}(x + \ln|\cos(x)+\sin(x)|).\end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned}\frac{\cos(3x)}{\sin(x)+\sin(3x)} &= \frac{4\cos^3 x - 3\cos(x)}{4\sin(x) - 4\sin^3 x} = \frac{1}{4}\frac{4\cos^3 x - 3\cos(x)}{\sin(x)(1-\sin^2(x))} = \frac{1}{4}\left(\frac{4\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{3}{\sin(x)\cos(x)}\right)\\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sin(2x)}.\end{aligned}$$

Primitives et calculs d'intégrales

Par suite,

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sin(x)+\sin(3x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| - \frac{3}{4}\ln|\tan(x)|.$$

17. $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2(x)+\sin^2(x))^2 - 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u \text{ (en posant } u=2x)\\ &= \int \frac{1}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\frac{dv}{1+v^2} \text{ (en posant } v=\tan u)\\ &= \int \frac{dv}{v^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

18. Multiplier et diviser par $\mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x)$, ou passer en e^x : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\mathrm{sh}\,(2x)}{4} - \dfrac{\mathrm{ch}\,(2x)}{4}$ ou $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}$.
19. $\displaystyle\int^x \frac{3-\sin(x)}{2\cos(x)+3\tan(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\ln(2-\sin(x)) + \frac{7}{10}\ln|1+2\sin(x)| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]\,, -\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]\right\}$ avec un changement de variable $u=\sin(x)$.
20. $\displaystyle\int^x \frac{1}{7+\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan(x)+7| + \frac{1}{50}\ln|\cos(x)|$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ avec un changement de variable $u=\tan(x)$.
21. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ avec un changement de variable $u=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 19 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Correction :

1. Notons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}dx$.

   Le changement de variable $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en t (que l'on sait intégrer !).

   En posant $t=\tan\dfrac{x}{2}$ on a $x=\arctan\dfrac{t}{2}$ ainsi que les formules suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer $\sin(x)$. Comme x varie de $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$ alors $t=\tan\frac{x}{2}$ varie de $t=0$ à $t=1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}dt \\ &= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1.\end{aligned}$$

2. Notons $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$.

   Alors,

$$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

   Donc $\mathrm{J} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{I} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Exercice 20 (Diverses) : Calculer les primitives ou intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int^x x^3e^x\,dx$.
4. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,dt$.
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos(x))^2\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.
8. $\displaystyle\int^x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.
9. $\displaystyle\int^x \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ pour $0<x<1$.
10. $\displaystyle\int^x \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
11. $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ avec $0<x<a$.
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.
14. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
15. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$.

Correction :

2. On pose $u=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x=\frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx=\frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2}\,\mathrm{d}u$.

Primitives et calculs d'intégrales

Sur $]1, +\infty[$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\frac{u}{u^2-1} - 2\int \frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2u}{u^2-1} + 2\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| \\ &= 2\sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right|\end{aligned}$$

3. Intégrations par parties : $(x^3-3x^2+6x-6)e^x$.
4. Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\,(t)\sin(t) - \mathrm{ch}\,(t)\cos(t))$.
5. Intégrations par parties (2) : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\arccos(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi^2+4$.
6. Intégrations par parties : $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$.
7. Changement de variable $x = a\sin u$: $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \mathrm{C}$.
8. Changement de variable $u = e^x$: $\dfrac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2)$.
9. Changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$: $2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.
10. Changement de variable $t = \arcsin(x)$: $\dfrac{1}{2}(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}) + \mathrm{C}$.
11. Changement de variable $x^3 = u^2$: $\dfrac{2}{3}\arcsin\sqrt{\dfrac{x^3}{a^3}}$.
12. Primitives : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\arctan^2(t)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$.
13. Changement de variable ou intégration par parties : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.
14. Changement de variable $u = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
15. Changement de variable $u = \dfrac{x+2}{\sqrt{3}}$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Primitives et calculs d'intégrales