Nombres complexes II - équations et Géométrie

I/ Équations

Exercice 1 : Calculer les racines carrées des nombres suivants sous forme exponentielle et algébrique si possible

$z_1 = 1$ $z_4 = 8 - 6\,\mathrm{i}$ $z_7 = 7 - 24\,\mathrm{i}$

$z_2 = -2\,\mathrm{i}$ $z_5 = 5 + 12\,\mathrm{i}$ $z_8 = -15 + 8\,\mathrm{i}$

$z_3 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ $z_6 = 7 + 4\,\mathrm{i}$ $z_9 = 9 + 40\,\mathrm{i}$

Exercice 2 :

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

   En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. En suivant la même idée, calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (1 + 2i)z + \mathrm{i} - 1 = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{3}z - \mathrm{i} = 0$.
4. $z^2 - (3 + 4\,\mathrm{i})z - 1 + 5\,\mathrm{i} = 0$.
5. $(2 + \mathrm{i})z^2 - (5 - \mathrm{i})z + 2 - 2\,\mathrm{i} = 0$.
6. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
7. $z^4 - (5 - 14\,\mathrm{i})z^2 - 2(12 + 5\,\mathrm{i}) = 0$
8. $z^4 - (3 + 8\,\mathrm{i})z^2 - 16 + 12\,\mathrm{i} = 0$.
9. $z^4 + (3 - 6\,\mathrm{i})z^2 - 2(4 + 3\,\mathrm{i}) = 0$.
10. $z^4 + (2\,\mathrm{i} - 1)z^2 - 1 - i = 0$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = 1 + \mathrm{i}$.
2. $e^z + 2e^{-z} = 2$

Exercice 5 :

1. Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12\,\mathrm{i}\,z^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0. \tag{IX.1}$$

   En déduire toutes les solutions complexes.

2. Avec les mêmes idées résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-(3+2i)z^2+(3+11i)z-2(1+7i)=0$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z+z'=4+2\,\mathrm{i} \\ zz'=2+4\,\mathrm{i} \end{cases}$
2. $\begin{cases} a+b=1+\mathrm{i} \\ ab=2-\mathrm{i}\,. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$
6. 's $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$

II/ Racines de l'unité

Exercice 7 : Trouver les racines cubiques des nombres suivants :

$z_1=2-2\,\mathrm{i}$ $z_2=11+2\,\mathrm{i}$ $z_3=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$. $z_4=4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$

Exercice 8 : Soit $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5}}$.

1. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\Omega=\omega+\dfrac{1}{\omega}$, puis les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
3. Comment utiliser ce qui précède pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Exercice 9 : Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $\begin{cases} \mathrm{A}=\omega+\omega^2+\omega^4 \\ \mathrm{B}=\omega^3+\omega^5+\omega^6 \end{cases}$.

1. Calculer $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ et AB.
2. En déduire A et B.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$.
2. $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$
3. $z^8=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$
4. $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$.
5. $z^6+z^3(z+1)^3+(z+1)^6=0$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) : $z^{n+1} = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $z \neq 0$ est une solution de (E), que vaut $|z|$? Résoudre alors (E).

Exercice 12 : Résoudre de deux manières l'équation $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.

En déduire la valeur de $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 13 : Résoudre l'équation $(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$ dans $\mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 :

1. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de 1.

   Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}$.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^{n-1} + \dots + z + 1$.
2. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

III/ Géométrie complexe

Exercice 16 : Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1 + \mathrm{i}t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 17 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 19 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|} = 3$
9. $z+\overline{z} = z\overline{z}$

Exercice 20 :

1. Traduire géométriquement la condition
$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$
2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie
$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Exercice 21 : Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 22 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}\,) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i}\,)^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \arg(z-\mathrm{i}\,)$

Exercice 23 : Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,\mathrm{i}\,)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)$;
2. $A(2-\mathrm{i}\,)$, $B(1-4\,\mathrm{i}\,)$ et $C(-2-3\,\mathrm{i}\,)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,\mathrm{i}\,)$ et $C(4-\mathrm{i}\,)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Exercice 24 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. les points d'affixes z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle.
2. ($\star$) Les points d'affixes 1, z et z^3 sont alignés.
3. ($\star$) les points d'affixes j, z, jz sont alignés.

Exercice 25 : Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b, c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer qu'il y a équivalence entre :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solution j ou $\overline{j}$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. Bonus : $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$.

Exercice 26 : Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

IV/ Transformations géométriques

Exercice 27 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$
9. $z \longmapsto (1 - \mathrm{i}\,)z + 2 + \mathrm{i}$

Exercice 28 : Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on déterminera l'affixe du centre.

Exercice 29 : On donne A, d'affixe $1 + \mathrm{i}$, B, d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et C, d'affixe $4 + 3\,\mathrm{i}$ dans le plan complexe.

Déterminer la nature du triangle ABA$'$ où A$'$ est le symétrique de A par rapport au centre de gravité de ABC.

Exercice 30 : Dans le plan complexe, on donne $\mathrm{A}(2)$, $\mathrm{B}(1-\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(1+\mathrm{i})$.

1. Quelle est la nature de ABC ?
2. Γ est le cercle de diamètre [BC] et r est la rotation de centre A qui envoie B sur C. Si M est un point de Γ et si M$'$ est son image par r, démontrer que C, M et M$'$ sont alignés.