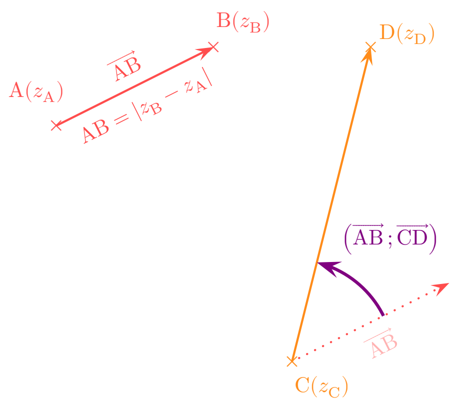
Un peu de géométrie

Dans tout ce devoir, on admettra le résultat suivant que l'on démontrera dans un chapitre ultérieur.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, *on considère les points* A, B, C *et* D *deux à deux distincts et d'affixes respectivement* z_A, z_B, z_C *et* z_D.

Alors :

$$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| \qquad \textit{et} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) \ [2\pi]\,.$$



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_\mathrm{A} = 2$ et le cercle Γ de centre O passant par A.

On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ puis on note B le point d'affixe $z_\mathrm{B} = \alpha$ et C celui d'affixe $z_\mathrm{C} = \overline{\alpha}$.

1. Donner la forme exponentielle de α.

2. Faire une figure **à la règle non graduée et au compas** que l'on complétera tout au long de l'exercice.

   La feuille sera absolument blanche et sans carreaux. L'utilisation du rapporteur et de l'équerre est absolument interdite comme mesurer.
   Prenez une échelle assez grande i.e. *environ* 2 *phalanges pour la distance* OA.

3. Montrer que $\mathrm{B} \in \Gamma$ et $\mathrm{C} \in \Gamma$. Compléter la figure.

4. Dans la suite, θ désigne un réel quelconque dans $]-\pi\,;\pi]$.

   On note D le point d'affixe $z_\mathrm{D} = 2\,\mathrm{e}^{i\theta}$ puis on définit le point E (dont on notera l'affixe z_E) appartenant à Γ tel que $(\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

   (a) Où se situe le point D ? Quelle est la nature du triangle ODE ?

   Placer D et E sur la figure en justifiant les traits de construction.

   (b) En calculant son module et son argument, déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_\mathrm{E}}{z_\mathrm{D}}$.

   (c) En déduire que $z_\mathrm{E} = \alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

5. On note F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].
   (a) Montrer que F a pour affixe $z_{\mathrm{F}} = \dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{e}^{i\theta}$ et G pour affixe $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{\alpha\,\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.
   (b) Vérifier que $\overline{\alpha} - 4 = \dfrac{1}{2}\alpha(\alpha - 4)$.
   (c) En déduire que $\dfrac{z_{\mathrm{G}} - 2}{z_{\mathrm{F}} - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$.
   (d) Montrer que le triangle AFG est équilatéral direct.

   Compléter la figure avec tous les éléments précédents.

6. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur AF est minimale.
   (a) Établir l'égalité $\mathrm{AF}^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.
   (b) Soit $f : \begin{array}{ccl}]-\pi\,;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta). \end{array}$

   Exprimer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ sous une forme **factorisée**.
   (c) En déduire le tableau de variation de f sur $]-\pi\,;\pi]$.
   (d) Conclure et placer le point D_{min} ainsi trouvé sur la figure.