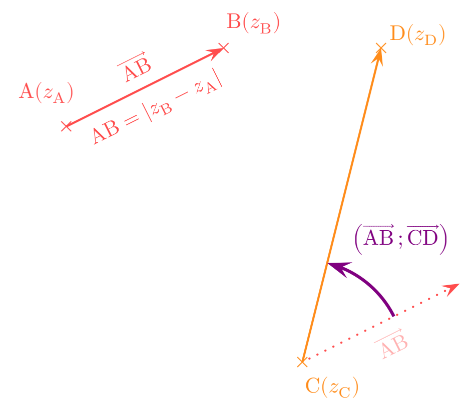
Un peu de géométrie

Dans tout ce devoir, on admettra le résultat suivant que l'on démontrera dans un chapitre ultérieur.

> *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, *on considère les points* A, B, C *et* D *deux à deux distincts et d'affixes respectivement* z_A, z_B, z_C *et* z_D.
>
> *Alors :*
>
> $$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| \qquad \textit{et} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)\ [2\pi]\,.$$
>
> 
>

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_\mathrm{A} = 2$ et le cercle Γ de centre O passant par A.

On pose $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ puis on note B le point d'affixe $z_\mathrm{B} = \alpha$ et C celui d'affixe $z_\mathrm{C} = \overline{\alpha}$.

1. Donner la forme exponentielle de α.

> **Correction :** $\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.

2. Faire une figure **à la règle non graduée et au compas** que l'on complétera tout au long de l'exercice.

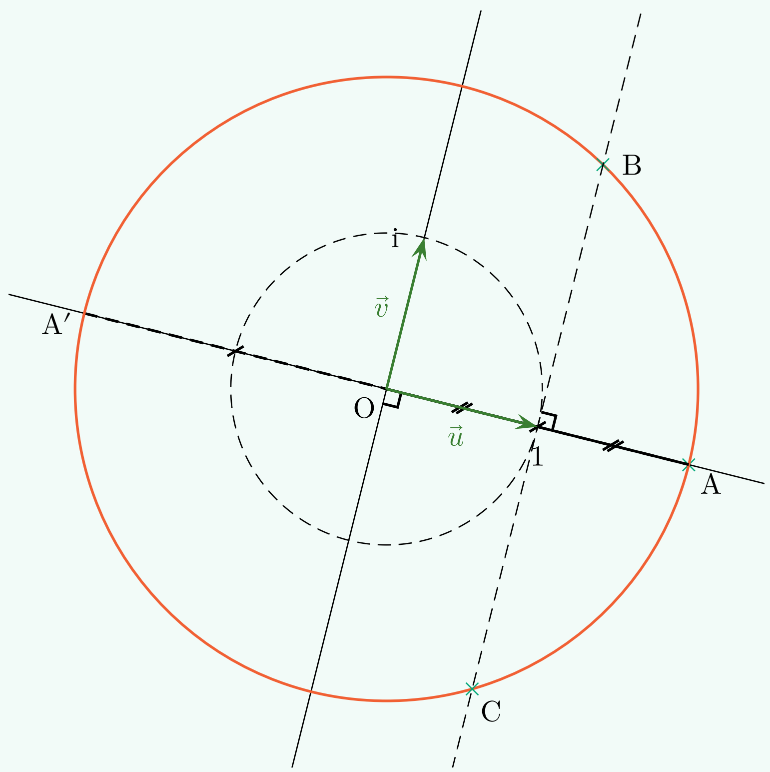
   La feuille sera absolument blanche et sans carreaux. L'utilisation du rapporteur et de l'équerre est absolument interdite comme mesurer.
   Prenez une échelle assez grande i.e. *environ* 2 *phalanges pour la distance* OA.

> **Correction :** On construit la figure à la règle et au compas seuls :
>
> (i) Soient deux points distincts O et A.
> (ii) Le symétrique A′ de A par rapport à O permet de tracer l'axe des réels (AA′).
> (iii) La médiatrice de [OA] intersecte (AA′) en U(1) qui sera l'unité sur les abscisses.

(iv) Le cercle de centre O et de rayon OU intersecte la médiatrice de $[AA']$ en $V(\,i\,)$ de telle manière que $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est ainsi construit.

(v) La médiatrice de $[OA]$ intersecte aussi le cercle Γ en $B(\alpha)$ et $C(\overline{\alpha})$.



3. Montrer que $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$. Compléter la figure.

Correction : On a $OB = |z_B| = |\alpha| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ donc $B \in \Gamma$.

De même, $OC = |z_C| = |\overline{\alpha}| = |\alpha| = 2$ donc $C \in \Gamma$.

4. Dans la suite, θ désigne un réel quelconque dans $]-\pi\,;\pi]$.

On note D le point d'affixe $z_D = 2\,e^{i\theta}$ puis on définit le point E (dont on notera l'affixe z_E) appartenant à Γ tel que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

(a) Où se situe le point D ? Quelle est la nature du triangle ODE ?

Placer D et E sur la figure en justifiant les traits de construction.

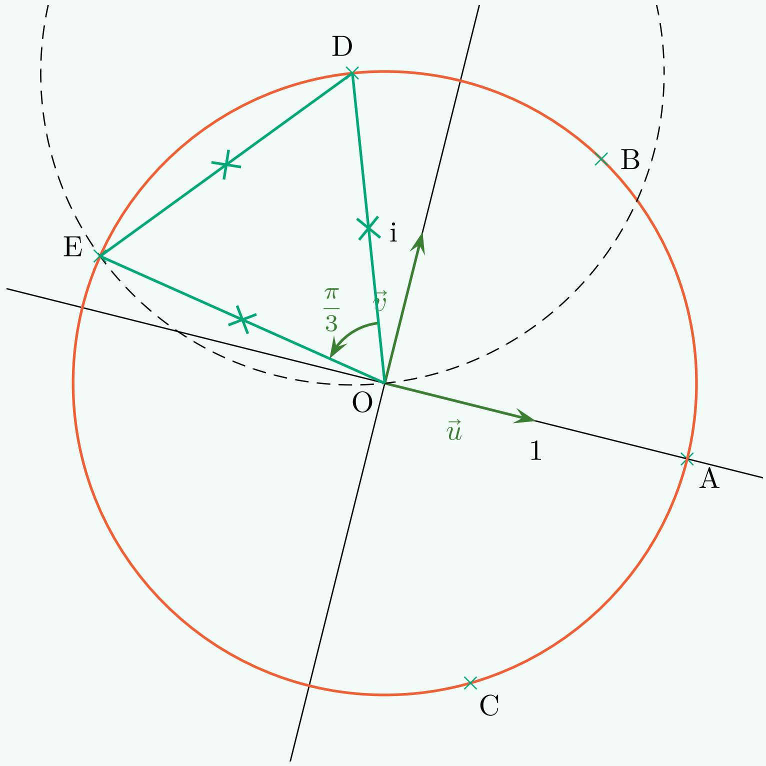
Correction : Comme $OD = |z_D| = \left|2\,e^{i\theta}\right| = 2$, on en déduit que $D \in \Gamma$.

Comme $\mathrm{OD} = \mathrm{OE}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, le triangle ODE est équilatéral direct. Le cercle de centre E et de rayon OD intersecte Γ en deux points tels que les triangles formés soient équilatéraux. On choisit pour E celui qui le rend équilatéral direct.

Sur la figure précédente :

(v) $\mathrm{D}(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})$ un point quelconque de Γ.

(vi) Le cercle de centre E et de rayon EO intersecte Γ en deux points. On choisit E tel que $(\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



(b) En calculant son module et son argument, déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{D}}}$.

Correction : On a $\left|\dfrac{z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{D}}}\right| = \dfrac{|z_{\mathrm{E}}|}{|z_{\mathrm{D}}|} = \dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}} = 1$.

De plus, $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{D}}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{O}}}\right)\ [2\pi] \equiv (\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}})\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Finalement, $\dfrac{z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{D}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.

(c) En déduire que $z_{\mathrm{E}} = \alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Correction : D'après la question précédente :

$$\frac{z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{D}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \iff z_{\mathrm{E}} = z_{\mathrm{D}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$

5. On note F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

   (a) Montrer que F a pour affixe $z_F = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et G pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha\, e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Correction : Comme F est le milieu de [BD], on a :

$$z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha + 2\, e^{i\theta}}{2} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.$$

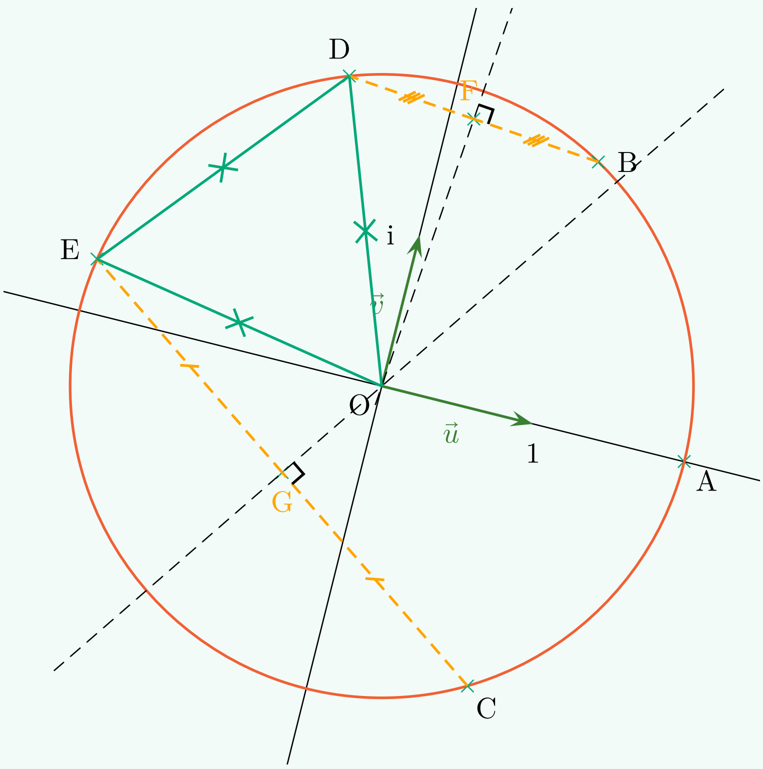
De même,

$$z_G = \frac{z_C + z_E}{2} = \frac{\overline{\alpha} + \alpha\, e^{i\theta}}{2}.$$

Sur la figure précédente :

(vii) La médiatrice de [BD] intersecte (BD) en F.

(viii) La médiatrice de [CE] intersecte (CE) en G.



   (b) Vérifier que $\overline{\alpha} - 4 = \dfrac{1}{2}\alpha(\alpha - 4)$.

Correction : Il suffit de calculer et comparer :

$$\overline{\alpha} - 4 = 1 - i\sqrt{3} - 4 = -3 - i\sqrt{3}$$

Et,

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha-4)=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})=\frac{1}{2}(-3+i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-3)$$
$$=\frac{1}{2}(-6-2i\sqrt{3})=-3-i\sqrt{3}.$$

Finalement et sans surprises, $\overline{\alpha}-4=\frac{1}{2}\alpha(\alpha-4)$.

(c) En déduire que $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\alpha}{2}$.

Correction : On a :

$$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\frac{\overline{\alpha}+\alpha\,e^{i\theta}}{2}-2}{\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\frac{\overline{\alpha}+\alpha\,e^{i\theta}-4}{\alpha+2\,e^{i\theta}-4}=\frac{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-4)+\alpha\,e^{i\theta}}{\alpha-4+2\,e^{i\theta}}\quad\text{(question précédente)}$$
$$=\frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha-4+2\,e^{i\theta}}{\alpha-4+2\,e^{i\theta}}=\frac{1}{2}\alpha.$$

(d) Montrer que le triangle AFG est équilatéral direct.

Compléter la figure avec tous les éléments précédents.

Correction : D'après ce qui précède,

$$\frac{AG}{AF}=\left|\frac{z_G-z_A}{z_F-z_A}\right|=\left|\frac{z_G-2}{z_F-2}\right|=\left|\frac{1}{2}\alpha\right|=\frac{1}{2}\,|\alpha|=\frac{1}{2}\times 2=1.$$

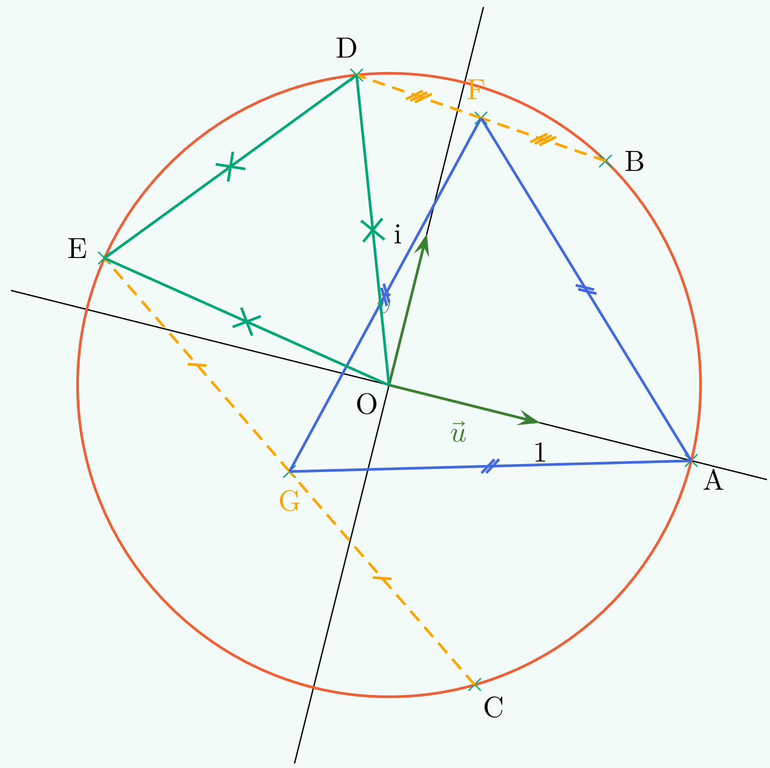
Donc $AG=AF$ et le triangle AFG est isocèle en A.

En outre,

$$(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})\equiv\arg\left(\frac{z_G-z_A}{z_F-z_A}\right)\equiv\arg\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\equiv\arg(\alpha)\equiv\frac{\pi}{3}\;[2\pi].$$

Le triangle AFG est donc équilatéral direct.

Un peu de géométrie



6. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur AF est minimale.
   (a) Établir l'égalité $\mathrm{AF}^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.

Correction : Peu de finesse, on développe et calcule sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AF}^2 &= |z_\mathrm{F} - z_\mathrm{A}|^2 = \left|\frac{\alpha}{2} + \mathrm{e}^{i\theta} - 2\right|^2\\
&= \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\theta) + i\sin(\theta) - 2\right|^2\\
&= \left|\cos(\theta) - \frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta)\right)\right|^2\\
&= \left(\cos(\theta) - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta)\right)^2\\
&= \cos^2\theta - 3\cos(\theta) + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{3}\sin(\theta) + \sin^2\theta\\
&= 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

   (b) Soit $f : \begin{array}{ccl}]-\pi\,;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta). \end{array}$

   Exprimer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ sous une forme **factorisée**.

Correction : La fonction f est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) &= 3\sin(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right)\\ &= 2\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

(c) En déduire le tableau de variation de f sur $]-\pi\,;\pi]$.

Correction : Pour tout $\theta \in\,]-\pi\,;\pi]$, $\theta - \dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{4\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Or, à l'aide du cercle trigonométrique, sur $\left]-\dfrac{4\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $\cos(u) \geqslant 0$ si, et seulement si $u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *i.e.* $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $]-\pi\,;\pi]$:

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	7	$\searrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\searrow$	7

(d) Conclure et placer le point D_{min} ainsi trouvé sur la figure.

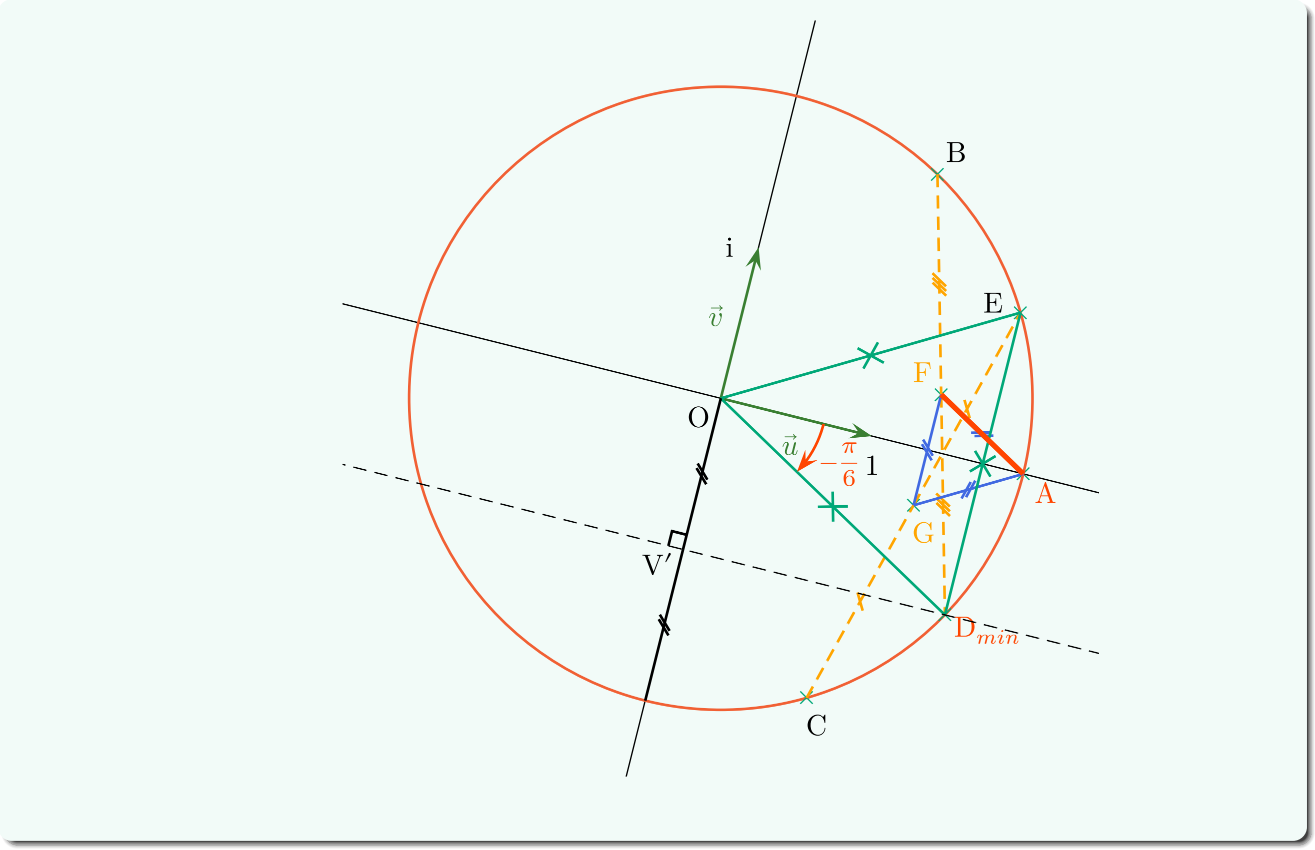
Correction : D'après la question précédente, la fonction f admet pour valeur minimale $4-2\sqrt{3}$ en $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

La distance minimale cherchée est donc $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = -1+\sqrt{3}$ atteinte pour $D_{min}\left(2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Sur la figure précédente :

(ix) V' le symétrique de V par rapport à O.

(x) La perpendiculaire à (VV') passant par V' intersecte Γ en deux points. On choisit pour D_{min} celui tel $(\vec{u}, \overrightarrow{OD_{min}}) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.


B
i
$\vec{v}$
E
F
O
$\vec{u}$
$-\dfrac{\pi}{6}$
1
A
G
V'
D_{min}
C