Une fonction définie par une intégrale

Lorsque cela a un sens, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Question liminaire :* Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}$.
2. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En justifiant soigneusement le raisonnement, établir que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{(3x+4\sqrt{x}-1)\ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x}+x)}.$$
4. (a) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, factoriser $3x+4\sqrt{x}-1$.
   (b) En déduire le signe de F′ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de F.

   Par commodité d'écriture, on pourra poser $\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}\right)^2$.
5. *Limite en $+\infty$ et nature de la branche infinie.*
   (a) Après avoir encadré $\ln(t)$ et $\dfrac{1}{1+t}$ sur $[\sqrt{x}\,;x]$ pour $x \geqslant 1$, démontrer que
$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+\sqrt{x}}.$$
   (b) Conclure sur la limite de F en $+\infty$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0$. Quelle interprétation graphique donnez vous de ce résultat ?
6. *Prolongement et dérivabilité de* F *en* 0.
   (a) Pour tout $x \in \left]0\,;1\right[$, montrer que :
$$\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}.$$
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{F}(x)$.

   La fonction $\tilde{\mathrm{F}} : \begin{array}{ccl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ *est alors continue sur* $[0\,;+\infty[$.

   On dit que $\tilde{\mathrm{F}}$ *est un* prolongement par continuité *de* F *en* 0.

   Dans toute la suite du devoir, on confondra dorénavant $\tilde{\mathrm{F}}$ et F.

   (c) En étudiant la limite de son taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de F en 0 et donner une interprétation graphique.
7. Avec tous les éléments étudiés, tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

   On prendra 10 cm pour 1 unité et on se restreindra à l'intervalle $[0\,;2]$ *(donc ne pas tracer la branche infinie).*
   On prendra, de plus, comme approximation $\alpha \simeq 0,05$ *et* $\mathrm{F}(\alpha) \simeq 0,32$.