Une fonction définie par une intégrale

Commentaires :

« théorème fondamental » ne prend pas de « e » à la fin.

Lorsque cela a un sens, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Question liminaire :* Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)}$.

Correction : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on factorise par les termes prépondérants en $+\infty$:

$$\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{2}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty} \underbrace{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1}.$$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on obtient aisément

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} = +\infty.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on factorise, cette fois, par les termes prépondérants en 0 :

$$\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x} = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow}1} \underbrace{\left(\sqrt{x}-1\right)}_{\underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow}-1} \sqrt{x}\ln(x).$$

D'après les théorèmes sur les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln(x) = 0$, donc, avec les théorèmes sur limites de produits, on obtient aisément

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x} = 0.$$

2. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Soit $f\colon t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de $\ln$ et du polynôme $t \mapsto 1+t$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).

En outre, $x \in \mathbb{R}_+^*$ entraîne que $[\sqrt{x}\,;x]$ ou $[x\,;\sqrt{x}]$ suivant que $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 1$ sont deux segments inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est bien continue sur ces deux segments donc $\mathrm{F}(x)$ est correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaires : *Il est très important de ne pas oublier de mentionner que l'intervalle formé par les bornes $\sqrt{x}$ et x est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Commentaires : *Comprenez bien ce que veut dire « définie » et faites la différence avec qui doit l'être et qui doit être continue ou non nul ou dans dans tel intervalle ou .... Encore une fois et malheureusement pas la dernière, « définie » veut dire que ça existe, qu'on peut le calculer, l'appréhender, que c'est uniquement déterminé et que l'on peut donc jouer avec. Ce n'est pas un mot vague et, d'une manière générale, on n'écrit pas un symbole comme $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$, on ne divise pas, on ne compose pas, ... sans se demander si les objets que l'on considère existe... en un mot sont* ***définis****.*

3. En justifiant soigneusement le raisonnement, établir que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{(3x + 4\sqrt{x} - 1)\ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x}+x)}.$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la relation de Chasles :

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(\sqrt{x}),$$

en posant $\mathrm{G}\colon x \mapsto \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\mathrm{G}' = f$.

De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel G est $\mathscr{C}^1$, donc par composition $x \mapsto \mathrm{G}(\sqrt{x})$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par différence, F est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{F}'(x) &= \mathrm{G}'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{G}'(\sqrt{x}) \\
&= f(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{\ln\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\ln(x)}{4}\left(\frac{4}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}+x}\right) \\
&= \frac{\ln(x)}{4}\,\frac{4(\sqrt{x}+x) - (1+x)}{(1+x)(\sqrt{x}+x)} \\
&= \frac{(3x + 4\sqrt{x} - 1)\ln(x)}{4(1+x)(\sqrt{x}+x)}.
\end{aligned}$$

4. (a) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, factoriser $3x + 4\sqrt{x} - 1$.

Correction : On reconnaît un trinôme en $\sqrt{x}$. En posant $t = \sqrt{x}$, on a

$$3x + 4\sqrt{x} - 1 = 3t^2 + 4t - 1.$$

Après calcul du discriminant, les racines sont $\dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$, d'où la factorisation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3x + 4\sqrt{x} - 1 = 3\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{7}+2}{3}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right).$$

(b) En déduire le signe de F' sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de F.

Par commodité d'écriture, on pourra poser $\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}\right)^2$.

Correction : D'après la question précédente, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = \frac{3}{4}\,\frac{\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{7}+2}{3}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right)}{(1+x)(\sqrt{x}+x)}\ln(x),$$

qui est donc du signe de $\left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}\right)\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction affine change de signe pour $x = \left(\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}\right)^2 = \dfrac{11-4\sqrt{7}}{9} = 1 - \underbrace{\dfrac{2-4\sqrt{7}}{9}}_{<0} < 1.$

On en déduit le tableau de signe pour $\mathrm{F}'(x)$ et donc les variations de F :

x	0		α		1		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	‖ 0	↗	$\mathrm{F}(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

Noter que $\mathrm{F}(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Commentaires : *Pas de valeurs approchées à ce stade et, d'une manière générale, jamais en mathématiques. Ces valeurs doivent à peine apparaître sur la courbe et nulle part ailleurs. N'allez pas gâcher la beauté des mathématiques par l'apport de choses imprécises, approchées, empiriques, physiques. ;-)*

5. *Limite en $+\infty$ et nature de la branche infinie.*

(a) Après avoir encadré $\ln(t)$ et $\dfrac{1}{1+t}$ sur $[\sqrt{x}\,;x]$ pour $x \geqslant 1$, démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 1,\quad \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+\sqrt{x}}.$$

Correction : Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Alors, $\sqrt{x} \leqslant x$ et pour tout $t \in [\sqrt{x}\,;x]$, par croissance de $\ln$, on a :

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} \leqslant t \leqslant x && \text{(croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{x}} && \text{(décroissance de } t \mapsto \frac{1}{1+t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*). \end{aligned}$$

Par produit d'inégalités à termes **positifs**, on en déduit :

$$\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1+x} \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t} \leqslant \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}}.$$

Par croissance de l'intégrale (vu que $\sqrt{x} \leqslant x$) :

$$\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1+x}\int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{d}t \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{d}t.$$

Donc, $\forall\, x \geqslant 1, \quad \dfrac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \dfrac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+\sqrt{x}}$.

(b) Conclure sur la limite de F en $+\infty$.

Correction : D'après la question (1), et le théorème de comparaison, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0$. Quelle interprétation graphique donnez vous de ce résultat ?

Correction : D'après l'encadrement établi en (5a), on obtient (après division par $x > 0$) :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2x(1+x)} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)}{x} \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{x(1+\sqrt{x})}.$$

Déterminons les limites des minorant et majorant en factorisant par les termes prépondérants :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2x(1+x)} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{2x}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1},$$

Et,

$$\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{x(1+\sqrt{x})} = \frac{\ln(x)}{x}\,\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Le théorème de comparaison permet de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0.$$

On dit que la courbe de F présente une *branche parabolique dirigée selon* $(\mathrm{O}x)$.

6. *Prolongement et dérivabilité de* F *en* 0.
   (a) Pour tout $x \in]0\,;1[$, montrer que :

$$\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}.$$

Correction : $\forall x \in]0\,;1[$, $x \leqslant \sqrt{x}$. On considère donc $t \in [x\,;\sqrt{x}]$ et, de même que précédemment, on a :

$$x \leqslant t \leqslant \sqrt{x} \implies \ln(x) \leqslant \ln(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(x) < 0 \qquad (\text{croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$0 < -\frac{1}{2}\ln(x) \leqslant -\ln(t) \leqslant -\ln(x) \qquad (\text{en multipliant par } -1)$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+x} \qquad \left(\text{décroissance de } t \mapsto \frac{1}{1+t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\right)$$

Par produit d'inégalités à termes **positifs**, on en déduit :

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}} \leqslant -\frac{\ln(t)}{1+t} \leqslant -\frac{\ln(x)}{1+x}.$$

Par croissance de l'intégrale (car $x \leqslant \sqrt{x}$), on a :

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}}\int_x^{\sqrt{x}} \mathrm{d}t \leqslant -\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{\ln(x)}{1+x}\int_x^{\sqrt{x}} \mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1+\sqrt{x}}(\sqrt{x}-x) \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant -\frac{\ln(x)}{1+x}(\sqrt{x}-x) \qquad \left(\text{car } -\int_x^{\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{x}}^x\right)$$

Finalement, $\dfrac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \dfrac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{F}(x)$.

Correction : D'après la question (1) et le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{F}(x) = 0.$$

La fonction $\tilde{\mathrm{F}}$: $\begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{F}(x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$ *est alors continue sur* $[0\,;+\infty[$.

On dit que $\tilde{\mathrm{F}}$ *est un* prolongement par continuité *de* F *en* 0.

Dans toute la suite du devoir, on confondra dorénavant $\tilde{\mathrm{F}}$ et F.

   (c) En étudiant la limite de son taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de F en 0 et donner une interprétation graphique.

Correction : Reprenons l'encadrement de la question (6a) :

$$\forall\, x \in\,]0\,;1[\,,\ \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2(1+x)} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{1+x}.$$

D'où, x étant strictement positif et $\mathrm{F}(0)=0$, le taux de d'accroissement de F en 0 s'encadre par :

$$\forall\, x \in\,]0\,;1[\,,\ \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2x(1+x)} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)}{x} \leqslant \frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{x(1+x)}.$$

Or, $\forall\, x \in\,]0\,;1[$, $\displaystyle\frac{(x-\sqrt{x})\ln(x)}{2x(1+x)} = \underbrace{\frac{1}{2(1+x)}}_{\xrightarrow[x>0]{x\to 0}\frac{1}{2}} \times \underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\xrightarrow[x>0]{x\to 0}-\infty}\ \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x>0]{x\to 0}-\infty}.$

D'après les théorèmes sur les limites de produits, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0} = +\infty.$$

La fonction F n'est donc pas dérivable en 0 mais sa courbe y admet une (demi-)tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

7. Avec tous les éléments étudiés, tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

   On prendra 10 cm pour 1 unité et on se restreindra à l'intervalle $[0\,;2]$ *(donc ne pas tracer la branche infinie).*
   On prendra, de plus, comme approximation $\alpha \simeq 0,05$ *et* $\mathrm{F}(\alpha) \simeq 0,32$*.*

Correction : Reprenons, les éléments de l'étude :

— En 0, $\mathrm{F}(0)=0$ et la courbe y admet une tangente « verticale ».
— En α et 1, la courbe admet des extrema et une tangente « horizontale ».
— Au voisinage de l'infini, la courbe admet une branche parabolique de direction $(\mathrm{O}x)$.