

Nombres complexes et trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$, calculer $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2. En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right).$$

3. En remarquant que $\frac{7}{4} = 2 \times \frac{7}{8}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$$\text{D'où, } \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Comme $\frac{7\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

4. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

$$z = 2 + \sqrt{3} + i = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = \underbrace{4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5. Donner la forme exponentielle de $z = -2 \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) + i \left(\sqrt{6} - \sqrt{2} \right)$.

C'était cadeau !

$$z = 4 e^{i \frac{11\pi}{12}}.$$

6. Soit $z_G = e^{1+i\frac{\pi}{3}}$. Donner $\operatorname{Re}(z_G)$, $\operatorname{Im}(z_G)$, $\arg(z_G)$ et $|z_G|$.

$$- \operatorname{Re}(z_G) = \frac{e}{2}$$

$$- \arg(z_G) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$- \operatorname{Im}(z_G) = \frac{e\sqrt{3}}{2}$$

$$- |z_G| = e$$

7. Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.

$$z = \ln(2) + i \frac{\pi}{6} [2i\pi].$$

8. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de $f : t \mapsto e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall t \in] -1; 1[, f'(t) = \frac{-1 + i}{\sqrt{1 - t^2}} e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}.$$

Nombres complexes et trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2. En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{7\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right).$$

3. En remarquant que $\frac{11}{6} = 2 \times \frac{11}{12}$, calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$$\text{D'où, } \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) < 0$ et on trouve finalement :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \left(= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right).$$

4. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

$$z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \underbrace{4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geq 0} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

5. Donner la forme exponentielle de $z = -2 \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) + i \left(\sqrt{6} + \sqrt{2} \right)$.

C'était cadeau !

$$z = 4 e^{i \frac{7\pi}{12}}.$$

6. Soit $z_D = e^{1+i\frac{\pi}{6}}$. Donner $\operatorname{Re}(z_D)$, $\operatorname{Im}(z_D)$, $\arg(z_D)$ et $|z_D|$.

$$- \operatorname{Re}(z_D) = \frac{e\sqrt{3}}{2}$$

$$- \arg(z_D) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$- \operatorname{Im}(z_D) = \frac{e}{2}$$

$$- |z_D| = e$$

7. Résoudre $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

$$z = \ln(2) + i \frac{\pi}{3} [2i\pi].$$

8. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de $f : t \mapsto e^{\arctan(t) + i t}$.

D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2} + i \right) e^{\arctan(t) + i t}.$$