Nombres complexes et intégration

1. Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $13z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.

$$z_{12} = \frac{\sqrt{3} \pm 7\,\mathrm{i}}{26}.$$

3. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie

$$|z - 1 + \mathrm{i}\,| = 2.$$

$|z - 1 + \mathrm{i}\,|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$ donc

$$|z - 1 + \mathrm{i}\,| = 2 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

C'est le cercle de centre $\Omega\,(1\,;-1)$ et de rayon 2.

4. En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z \neq -\mathrm{i}\,$.

Ensuite, en posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\forall\, z \neq -\mathrm{i}\,,\ \frac{z-2}{z+\mathrm{i}} &= \frac{x-2+\mathrm{i}\,y}{x+(y+1)\,\mathrm{i}} = \frac{((x-2)+\mathrm{i}\,y)\,(x-(y+1)\,\mathrm{i}\,)}{x^2+(y+1)^2}\\ &= \frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)\ \mathrm{i}}{x^2+(y+1)^2}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{z-2}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} &\iff (2-x)(y+1)+xy = 0\\ &\iff 2 - x + 2y = 0\\ &\iff x - 2y - 2 = 0.\end{aligned}$$

En vérifiant que $-\mathrm{i} = (0\,;-1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x - 2y - 2 = 0$ privé du point $(0\,;-1)$.

5. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\,$.

$$z = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = \underbrace{4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

Nombres complexes et intégration

6. Résoudre $\mathrm{e}^z = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

$$z = \frac{3}{2}\ln(2) + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}\ \ [2\,\mathrm{i}\,\pi]\,.$$

7. Donner le domaine de primitivabilité une primitive F de $f : t \longmapsto \dfrac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{e}^{\arccos(t)+\mathrm{i}\,\arcsin(t)}$.

D'après les théorèmes sur les composées et produits de fonctions continues, f est continue sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \subset\,]-1\,;1[\,,\ \mathrm{F}(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)+\mathrm{i}\,\arcsin(t)}.$$

8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{i}\,t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\,\left[\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\,\mathrm{i}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)\,\mathrm{i}\,.$$

9. À l'aide d'une IPP, calculer $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{2}t^2$ et $t \longmapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ et $]0\,;1]$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Nombres complexes et intégration

Nombres complexes et intégration

1. Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{12}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^{12}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $11z^2-z\sqrt{8}+1=0$.

$$z_{12}=\frac{\sqrt{2}\pm 3\,\mathrm{i}}{11}.$$

3. En posant $z=x+\mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie

$$|z-1+\mathrm{i}\,|=|z+2|\,.$$

$|z-1+\mathrm{i}\,|^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ et $|z+2|^2=(x+2)^2+y^2$ donc

$$\begin{aligned}|z-1+\mathrm{i}\,|=|z+2| &\iff (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2\\ &\iff -2x+2y+2=2x+4\\ &\iff 2x-y+1=0.\end{aligned}$$

C'est la droite d'équation $2x-y+1=0$.

4. En posant $z=x+\mathrm{i}\,y$, déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}}\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Toujours le domaine de définition en premier : $z\neq-\mathrm{i}$.

Ensuite, en posant $z=x+\mathrm{i}\,y$, $x,y\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\forall\, z\neq-\mathrm{i}\,,\ \frac{z-2}{z+\mathrm{i}}=\frac{x-2+\mathrm{i}\,y}{x+(y+1)\,\mathrm{i}}&=\frac{((x-2)+\mathrm{i}\,y)\,(x-(y+1)\,\mathrm{i}\,)}{x^2+(y+1)^2}\\ &=\frac{x(x-2)+y(y+1)+((2-x)(y+1)+xy)\,\mathrm{i}}{x^2+(y+1)^2}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{z-2}{z+\mathrm{i}}\in\mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff x(x-2)+y(y+1)=0\\ &\iff x^2-2x+y^2+y=0\\ &\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

En vérifiant que $-\mathrm{i}\,=(0\,;-1)$ vérifie l'équation ci-dessus, l'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $(0\,;-1)$.

5. Donner la forme exponentielle du nombre $z = 2 + \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

$$z = 2 + \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = \underbrace{4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geqslant 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}.$$

6. Résoudre $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

$$z = \ln\left(2\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} \quad [2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

7. Donner le domaine de primitivabilité une primitive F de $f : t \longmapsto \left(\frac{1}{1+t^2} + \mathrm{i}\right) \mathrm{e}^{\arctan(t) + \mathrm{i}\,t}$.

D'après les théorèmes sur les composées et produits de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R},\ \mathrm{F}(t) = \mathrm{e}^{\arctan(t) + \mathrm{i}\,t}.$$

8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t - \mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \mathrm{i}\arctan(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right) - \mathrm{i}.$$

9. À l'aide d'une IPP, calculer $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Nombres complexes et intégration