Nombres Complexes I & Primitives

1. **Nombres complexes**
   - Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
   - Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
   - Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs.
   - Module d'un complexe, propriétés, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$.
   - Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
   - Complexes de module 1 , stabilité par produit, inverse/conjugué.
   - Définition de l'exponentielle complexe sur les imaginaires purs uniquement, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre, application à la factorisation par l'angle moitié.
   - Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.
   - Forme polaire de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ en donnant l'écriture $\mathrm{A}\cos(\theta - \varphi)$.
   - Linéarisation et délinéarisation d'expressions trigonométriques à l'aide des formules de Moivre et d'Euler.
   - Les formules de trigonométrie seront supposées connues.
2. **Calculs de primitives et d'intégrales**
   - Définition d'une primitive. En cas d'existence, description de l'ensemble des primitives.
   - Primitives usuelles.
   - Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   - Théorème fondamental de l'analyse. Existence d'une primitive F d'une fonction continue et unicité sous condition. Corollaire $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.
   - Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: croissance, positivité et séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive).
   - Intégrations par parties de deux fonctions $\mathscr{C}^1$.
   - Formule de changement de variable.
   - Intégration d'inverses de trinômes. Décomposition en éléments simples dans le cas de pôles simples.

Questions de cours possibles [1] :

1. Montrer que $\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$.
3. Déterminer des primitives des fonctions $x \longmapsto \cos^3(x)$, $x \longmapsto x\arctan(x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x)$.
4. Formule d'intégration par parties avec les hypothèses de régularité et la démonstration.
5. Intégrale de fonctions paires, impaires ou périodiques. Choix laissé à l'examinateur.
6. ($\star$) Inégalité triangulaire supérieure : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. Pour les plus aguerris, cas d'égalité.
7. ($\star$) Transformation de Fresnel : $\forall\, a, b) \in \mathbb{R}\backslash\{(0;0)\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\exists\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+' \times \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$
8. ($\star$) Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f, φ, ψ sont des fonctions vérifiant des propriétés à préciser.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.