Solutions d'équation et géométrie

Problème 1 (Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$) – On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 + \mathrm{i}\, z)^5 = (1 - \mathrm{i}\, z)^5 \tag{E}$$

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - 10X + 5 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$.
   (b) En développant, trouver une première résolution de (E).

2. À partir de l'expression des racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité, déduire une seconde résolution de (E).

3. Confronter les résultats des questions précédentes et donner les tangentes des nombres $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.
   On mettra les résultats sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$ *où* $p, q, n \in \mathbb{Z}$.

4. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Problème 2 (Construction géométrique des images des racines d'une équation) –

Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on appelle (E) l'équation $z^2 - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} z - 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2.

On note M_1, M_2, P, A, B, C les points d'affixes respectives z_1, z_2, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, 1, -1, i dans un repère orthonormé direct du plan.

On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure.

L'objectif est de construire les points M_1 et M_2 à partir de ces trois points à l'aide d'une règle et d'un compas.

1. Que vaut la somme des racines de l'équation ? Justifiez que P est le milieu de $[M_1M_2]$.

2. Donnez les expressions de z_1 et z_2 en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$.

3. (a) Montrez que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}$ et $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}$ sont deux réels positifs.
   (b) En déduire les formes exponentielles de $z_1 + 1$, $z_2 + 1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1$.
   (c) Montrer que $\arg\left(\frac{z_2 + 1}{z_1 + 1}\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1}{z_1 + 1}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

   Qu'en déduire pour les les points M_1, M_2, P et B ?

4. Calculer $|\,\mathrm{i} - 1|^2$, $|z_1 - 1|^2$ et $|z_2 - 1|^2$. Qu'en déduire pour les points M_1, M_2 et C ?

5. Expliquer comment, à partir du point P, construire à la règle et au compas les points M_1 et M_2 sans résoudre l'équation (E).

   Faire une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$.