Solutions d'équation et géométrie

Problème 1 (Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$) – On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+\mathrm{i}\,z)^5 = (1-\mathrm{i}\,z)^5 \tag{E}$$

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - 10X + 5 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$.

Correction : Sans difficulté particulière : $5-2\sqrt{5}$ et $5+2\sqrt{5}$.

(b) En développant, trouver une première résolution de (E).

Correction : On développe :

$$(1+\mathrm{i}\,z)^5 - (1-\mathrm{i}\,z)^5 = 10\,\mathrm{i}\,z - 20\,\mathrm{i}\,z^3 + 2\,\mathrm{i}\,z = 2\,\mathrm{i}\,z(5-10z^2+z^4).$$

L'équation (E) est équivalente à l'équation $z(z^4-10z^2+5)=0$.

On résout $z^4-10z^2+5=0$ en posant $X=z^2$, ce qui nous ramène à l'équation précédente.

Remarquons que les racines de cette équation sont deux réels strictement positifs.

Les racines de (E) sont donc 0, $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. À partir de l'expression des racines $5^{\text{èmes}}$ de l'unité, déduire une seconde résolution de (E).

Correction : Remarquons d'abord que $z=-i$ n'est pas solution de (E), donc que $(1-\mathrm{i}\,z)\neq 0$.

On peut donc diviser par $(1-\mathrm{i}\,z)^5$ sans perdre l'équivalence.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\iff \frac{(1+\mathrm{i}\,z)^5}{(1-\mathrm{i}\,z)^5}=1 \iff \left(\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^5=1\\
&\iff \frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} \text{ où } k\in[\![-2\,;2]\!]\\
&\iff 1+\mathrm{i}\,z = (1-\mathrm{i}\,z)\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} \text{ où } k\in[\![-2\,;2]\!]\\
&\iff \mathrm{i}\,z\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}-1 \text{ où } k\in[\![-2\,;2]\!]
\end{aligned}$$

Remarquons encore que pour $k\in[\![-2\,;2]\!]$, $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\neq 0$ car $\dfrac{2k\pi}{5}\not\equiv \pi\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } (\mathrm{E}) &\iff z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}-1}{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}+1\right)} \text{ où } k\in[\![-2\,;2]\!]\\
&\iff z=\frac{2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2\,\mathrm{i}\,\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}=\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right) \text{ où } k\in[\![-2\,;2]\!].
\end{aligned}$$

3. Confronter les résultats des questions précédentes et donner les tangentes des nombres $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$.

   On mettra les résultats sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ *où* $p, q, n \in \mathbb{Z}$.

Correction : Il apparaît donc que $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ sont les deux racines positives de l'équation (E) et de plus, $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

4. Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Correction : Soit $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$. On sait d'après une formule de trigonométrie que $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, donc ici, il vient l'égalité $b = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \dfrac{2x}{1-x^2}$, ou encore $bx^2+2x-b=0$.

On résout cette équation, on lui trouve deux racines dont l'une est positive et l'autre non.

Comme $x>0$, on en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

Problème 2 (Construction géométrique des images des racines d'une équation) –

Soit $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on appelle (E) l'équation $z^2 - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z - 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2.

On note $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les points d'affixes respectives z_1, z_2, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 1, -1, i dans un repère orthonormé direct du plan.

On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure.

L'objectif est de construire les points M_1 et M_2 à partir de ces trois points à l'aide d'une règle et d'un compas.

1. Que vaut la somme des racines de l'équation ? Justifiez que P est le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$.

Correction : On sait que la somme des racines de l'équation $az^2+bz+c=0$ est $-\dfrac{b}{a}$.

Pour notre équation, on a alors $z_1+z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *i.e.* $\dfrac{z_{\mathrm{M}_1}+z_{\mathrm{M}_2}}{2} = z_{\mathrm{P}}$.

Le point P est donc le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$.

2. Donnez les expressions de z_1 et z_2 en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Correction : Le discriminant Δ de (E) s'écrit $\Delta = 4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 4 = 4\left(\mathrm{e}^{2i\theta}+1\right) = 8\cos(\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) \geqslant 0$ et une racine carrée de Δ est donc $\sqrt{8\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Les racines de (E) sont alors $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \sqrt{2\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \sqrt{2\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

3. (a) Montrez que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}$ et $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}$ sont deux réels positifs.

Correction : Pour le premier des deux nombres, c'est évident, puisqu'il est la somme de nombres positifs car $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Pour le second, on manipule un peu l'expression :

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)} &= \frac{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos(\theta)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} && \left(\text{on multiplie par } \frac{1}{1}\right)\\
&= 2\,\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} && \left(\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\
&= \frac{2}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}} \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

(b) En déduire les formes exponentielles de z_1+1, z_2+1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1$.

Correction :

$$z_1 + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 + \sqrt{2\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}\right)}_{\geqslant 0 \text{ d'après la question précédente}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}},$$

$$z_2 + 1 = \underbrace{\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}\right)}_{\geqslant 0 \text{ d'après la question précédente}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 = \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\geqslant 0 \text{ car } \frac{\theta}{2}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

(c) Montrer que $\arg\left(\frac{z_2+1}{z_1+1}\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}{z_1+1}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

Qu'en déduire pour les les points $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{P}$ et B ?

Correction : D'après la question précédente,

$$\arg\left(\frac{z_2+1}{z_1+1}\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}{z_1+1}\right) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \equiv 0\ [2\pi]\,.$$

En terme d'angles, cela s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BM_1}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM_2}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{BM_1}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)\equiv 0\ [2\pi]\,.$$

Les points B, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ et P sont donc alignés (et du même côté de B).

4. Calculer $|\,\mathrm{i}-1|^2$, $|z_1-1|^2$ et $|z_2-1|^2$. Qu'en déduire pour les points $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ et C ?

Correction : Juste un peu de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{i}-1|^2 &= 2\\
z_1-1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-1+\sqrt{2\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}=\left(\sqrt{2\cos(\theta)}+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\\
|z_1-1|^2 &= 2\left(\cos(\theta)+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\right|^2\\
&= 2\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\qquad\left(\cos(\theta)=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\
&= 2.\\
z_2-1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-1-\sqrt{2\cos(\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}=\underbrace{\left(\sqrt{2\cos(\theta)}-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{=\overline{\sqrt{2\cos(\theta)}+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}\\
|z_2-1|^2 &= |z_1-1|^2=2.
\end{aligned}$$

Donc $|\,\mathrm{i}-1|=|z_1-1|=|z_2-1|$ *i.e.* $\mathrm{AC}=\mathrm{AM_1}=\mathrm{AM_2}$, les points $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ et C sont donc sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

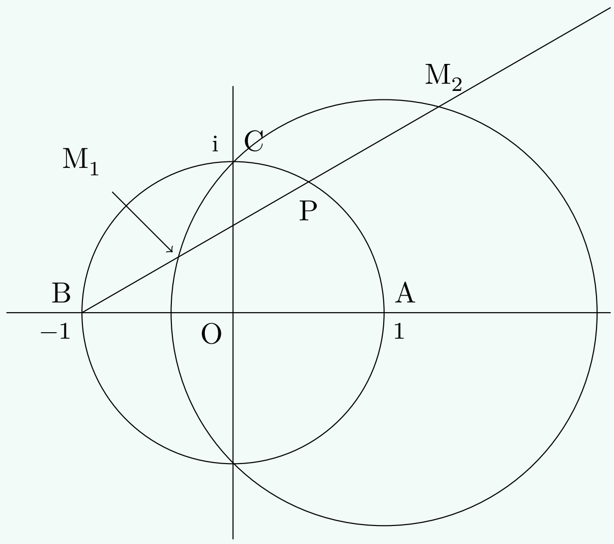
5. Expliquer comment, à partir du point P, construire à la règle et au compas les points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ sans résoudre l'équation (E).

   Faire une figure dans le cas $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Correction : D'après $(3c)$, les points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ appartiennent à la droite (BP).

D'après (4), les points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ appartiennent au cercle de centre A passant par O.

Le point P étant connu, les points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ sont donc les intersections entre (BP) et le cercle précédent.


M$_2$
i
C
M$_1$
P
B
A
-1
O
1