Planche 40/

Exercice 1

Étudier $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$

Correction : D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est définie et même de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si $f : t \longmapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x\,;x^2]$.

Ceci n'est possible que si $0 \notin [x\,;x^2]$ *i.e.* $x \in \mathcal{D}_\mathrm{F} =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

$\forall\, x \in \mathcal{D}_\mathrm{F}$, F est dérivable et, d'après les théorème sur les dérivées de composées et la relation de Chasles pour l'intégrale, on a :

$$\mathrm{F}'(x) = 2x\frac{e^{-x^4}}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}.$$

On résout alors l'équation,

$$\begin{aligned} 2e^{-x^4} &\geqslant e^{-x^2} \\ -x^4 + \ln(2) &\geqslant -x^2 \\ -x^4 + x^2 + \ln(2) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

En posant $\mathrm{X} = x^2$, on factorise $-\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+\ln(2) = -\left(\mathrm{X} - \underbrace{\frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}}_{=x_0^2}\right)\left(\mathrm{X} - \underbrace{\frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}}_{>0}\right)$

$$-(x-x_0)(x+x_0)\left(x^2 + \frac{\sqrt{1+4\ln(2)}-1}{2}\right) \geqslant 0$$

Du signe de $-(x-x_0)(x+x_0)$ avec $x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}} \simeq 1,2$.

Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes pour avoir celui de la dérivée.

x	$-\infty$		$-x_0$		-1		0		1		x_0		$+\infty$
$\dfrac{2e^{-x^2}}{x}$		$-$				$-$	||	$+$				$+$	
$2e^{-x^4} - e^{-x^2}$		$-$	0			$+$	1	$+$			0	$-$	
$\mathrm{F}'(x)$		$+$	0			$-$	||	$+$			0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\mathrm{F}(-x_0) > 0$	$\searrow$	$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = 0$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\displaystyle\int_{1}^{1} \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = 0$	$\nearrow$	$\mathrm{F}(x_0) > 0$	$\searrow$	0

Comme $t \longmapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est impaire, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

Pour les limites en 0, on peut majorer $\dfrac{e^{-t^2}}{t}$ par $\dfrac{1}{t}$ pour avoir

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \int_{x}^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x) = -\infty$ et la courbe de F admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

Pour la limite en $+\infty$, on commence par poser $t = xu$ pour se débarrasser de x dans une des deux bornes :

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} \frac{e^{-(xu)^2}}{xu} x\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{x} \frac{e^{-(xu)^2}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Ensuite, on majore $\dfrac{1}{u}$ par 1 et $e^{-(xu)^2}$ par e^{-x^2u},

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_{1}^{x} e^{-x^2u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{x^2}e^{-x^2u}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}e^{-x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ et la courbe de F admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

Enfin, pour la limite en $-\infty$, on fait pareil et on trouve pareil : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ et la courbe de F admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

Commentaires : *J'avais dit que ce ne serait pas facile ;-). T'inquiète pas ! Même le prof ne saura pas le faire. Je pense que l'exo portait juste sur savoir dériver une composée.*

Exercice 2

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a l'application linéaire associée à A est-elle bijective ?

Correction : Rien à faire à part calculer le déterminant. Il est nul cet exercice.

Et comme, il n'y a que deux apparitions de a, on sait qu'on va tomber, au pire, sur un trinôme du second degré en a donc pas besoin de s'embêter et exceptionnellement appliquer la règle de Sarrus en disant bien qu'on a d'abord regarder pour faire apparaître des 0 dans une colonne ou un ligne et qu'on a essayer de chercher un facteur commun :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 + 2a + 3(1-a) + a(1-a) - 1 - 0 \\ &= -a^2 + 2 = \left(\sqrt{2} - a\right)\left(\sqrt{2} + a\right).\end{aligned}$$

La matrice est donc inversible si, et seulement si $a = \pm\sqrt{2}$. L'application linéaire associée est donc bijective pour les mêmes valeurs.