Planche 70/

Exercice 1

Soient x, y et z des complexes, et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs propres de M ? M est-elle diagonalisable ?
2. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit inversible.
3. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit une matrice de symétrie.

Correction :

1. Après calcul, on a :

   — $\mathrm{MX}_1 = (x+y+z)\mathrm{X}_1$
   — $\mathrm{MX}_2 = (x-y-z)\mathrm{X}_2$
   — $\mathrm{MX}_3 = (-x+y-z)\mathrm{X}_3$
   — $\mathrm{MX}_4 = (-x-y+z)\mathrm{X}_4$

   Les vecteurs X_i, non nuls, son donc des vecteurs propres de M. Ils sont clairement libres en calculant leur déterminant par exemple donc forment une base de vecteurs propres pour M qui est donc diagonalisable dans cette base.

   Commentaires : *Cela n'a rien à voir avec le fait que les valeurs propres soient distinctes ou pas.*

2. Le déterminant est indépendant de la base dans laquelle on le calcule donc, dans la base des X_i, on a :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{M}) &= (x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z) \\ &= (x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z). \end{aligned}$$

   M est donc inversible si, et seulement si $\det(\mathrm{M}) \neq 0$ *i.e.* M est inversible si, et seulement si les 4 quantités $x+y+z$, $x-y-z$,$-x-y+$ z, et $-x+y-z$ sont non nulles.

   Commentaires : *On ne peut pas faire mieux.*

3. M est une matrice de symétrie si, et seulement si $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_4$ ce qui impose déjà $\det(\mathrm{M}) = \neq 0$ et les conditions précédentes.

   De plus, on sait qu'une symétrie n'admet pour valeurs propres que 1 et -1. On pourrait donc résoudre tout plein de systèmes de la forme $\begin{cases} x+y+z & = \pm 1 \\ x-y-z & = \pm 1 \\ -x+y-z & = \pm 1 \\ -x-y+z & = \pm 1 \end{cases}$ mais ce serait un peu long.

   Il vaut peut-être mieux calculer

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 2yz & 2xz & 2xy \\ 2yz & x^2+y^2+z^2 & 2xy & 2xz \\ 2xz & 2xy & x^2+y^2+z^2 & 2yz \\ 2xy & 2xz & 2yz & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix},$$

et résoudre $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_4$ qui se ramène au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ yz & = 0 \\ xz & = 0 \\ xy & = 0 \end{cases}$$

La première équation impose que x, y et z ne peuvent être tous nuls. Les triplets solutions sont donc tous ceux où une coordonnée est ± 1 et les deux autres égales à 0 :

$$\mathcal{S} = \{(1\,;0\,;0)\,,(0\,;1\,;0)\,,(0\,;0\,;1)\,,(-1\,;0\,;0)\,,(0\,;-1\,;0)\,,(0\,;0\,;-1)\}\,.$$