

Planche 71/ _____

Exercice 1 _____

Déterminer les développements en série entières des fonctions : $x \mapsto \ln(2+x)$ et $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Correction : La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière si, et seulement si $x \in]-1; 1[$.

La fonction $x \mapsto \ln(2+x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est donc développable en série entière si, et seulement si $x \in]-2; 2[$ et on a :

$$\forall x \in]-2; 2[, \ln(2+x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k 2^k} = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \dots$$

La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est définie si, et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$ i.e. $x \in]-1; 1[$.

Sur cet intervalle $1+x > 0$ et $1-x > 0$ donc $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ somme de deux fonctions développables en séries entières sur $] -1; 1[$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}. \end{aligned}$$

Remarque : En reconnaissant, si c'était au programme, que $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{argth}(x)$ dont la dérivée

est $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ on aurait pu avoir le développement en série entière directement en intégrant celui de sa dérivée pour trouver la même chose sur le même intervalle $] -1; 1[$.

Exercice 2 _____

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ soit } M_{a,b} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (n \geq 2).$$

Déterminer le rang de la matrice $M_{a,b}$.

Correction : La matrice est à coefficients réels et symétrique donc, d'après le théorème spectral, elle est semblable à une matrice diagonale i.e. $\exists P \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ (invertible) et D diagonale telles que $M_{a,b} = PDP^{-1}$.

Une matrice invertible ne changeant pas le rang, il est plus facile de trouver celui de la matrice diagonale. On cherche donc les valeurs propres de $M_{a,b}$.

On a :

$$P_{M_{a,b}}(X) = \det(M_{a,b} - XI_n)$$

$$= \begin{vmatrix} b-X & a & \cdots & a \\ a & b-X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b-X \end{vmatrix}$$

$$= \left((n-1)a + b - X \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b-X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b-X \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n L_i$$

$$= \left((n-1)a + b - X \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b-a-X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & \cdots & 0 & b-a-X \end{vmatrix} \quad C_i \leftarrow C_i - C_1$$

$$= \left((n-1)a + b - X \right) (b-a-X)^{n-1} \quad \text{On développe par rapport à la première ligne puis matrice diagonale.}$$

$M_{a,b}$ admet donc deux valeurs propres $\lambda_1 = (n-1)a - b$ simple et $\lambda_2 = b - a$ de multiplicité $n - 1$.

Conclusion,

- Si $a = b$, $M_{a,b}$ est de rang 1 car semblable à une matrice où seul le coefficient en haut à gauche est non nul.
- Si $b = (n-1)a$, $M_{a,b}$ est de rang $n - 1$ car semblable à une matrice où tous les termes diagonaux sont non nuls sauf celui en haut à gauche.