Planche 73/

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \longmapsto (x+z, y-x, y+z, x+y+2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Correction :

1. En posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $f(x\,;y\,;z) = \mathrm{AX}$ donc linéaire par linéarité du produit matriciel à gauche.
2. **Remarque :** D'après le théorème du rang, on sait déjà que f ne peut être surjective.

   $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Comme $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0$, $\dim \mathrm{Im}\,(f) \leqslant 2$ mais C_1 et C_2 dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles sont libres donc $\dim \mathrm{Im}\,(f) \geqslant 2$.

   En conclusion, $\dim \mathrm{Im}\,(f) = 2$. Le rang est 2 et une base est donnée par

   $$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   D'après le théorème du rang, on sait que $\dim \ker\,(f) = 1$ donc il suffit de trouver un vecteur non nul de celui-ci.

   Or, $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0 \iff f(e-1+e_2-e_3) = 0$ où $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker\,(f)$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non nul. Il en forme une base.

   Remarque : On peut aussi résoudre le système $\mathrm{AX} = 0$ pour trouver la même chose mais c'est plus long et moins joli.

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions :

1. $(x, y) \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
2. $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $(x, y) \longmapsto y^x$.

Correction : Bien justifier avant par un petit argument que les dérivées partielles d'ordre 1 ou 2 existent.

1. $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{x+y}{1-xy}$ est une fraction rationnelle donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ où $xy \neq 1$ *i.e.* $\mathbb{R}^2$ privé de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

   Par composition avec $\arctan$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 1\}$.

   On dérive alors une composée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = \frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}} = \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$
$$= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = \frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}} = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y) = 0.$$

   La dernière en parlant du théorème de Cauchy-Schwarz sur un ouvert.

2. $(x\,;y) \longmapsto x^2+y^2$ est polynomiale strictement positive sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ donc la fonction $(x\,;y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet ensemble et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x\,;y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   Remarque : Comme $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier par contre elle n'y est pas dérivable car, par exemple,

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \cos(\theta) \text{ n'existe pas.}$$

3. $f(x\,;y) = \mathrm{e}^{x\ln(y)}$ donc f est définie si, et seulement si $y > 0$ *i.e.* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ qui est un ouvert.

Sur cet ensemble, par composition de fonctions d'une variable, f est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) &= \ln(y)\,\mathrm{e}^{x\ln(y)} = \ln(y)\,y^x \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) &= xy^{x-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,;y) &= \ln^2(y)\,\mathrm{e}^{x\ln(y)} = \ln^2(y)\,y^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,;y) &= x(x-1)y^{x-2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,;y) &= \frac{1}{y}\,y^x + x\ln(y)y^{x-1} = (1+x\ln(y))\,y^{x-1}
\end{aligned}$$

Pour vérifier le théorème de Cauchy-Schwarz même si c'est inutile :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x\,;y) = y^{x-1} + x\ln(y)y^{x-1} = (1+x\ln(y))y^{x-1}.$$