Planche 93/

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^n$. $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

On pose $B_2 = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ avec pour tout $i \in [|1;n|], d_i = e_1 + e_2 + \dots + e_i$.

1. Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Exprimer un vecteur de B_1 dans B_2.

Correction :

1. L'écriture de B_2 dans la base B_1 est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc inversible. C'est la matrice d'une base ce qu'est donc B_2.
2. Il suffit d'inverser la matrice de B_2 dans B_1 à partir du système. Easy !

Exercice 2

Soient u et v deux suites définies par :

$u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Monter que $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.
2. Montrer que $b > \dfrac{a+b}{2}$ et $a < \sqrt{ab}$.
3. Montrer que ces suites convergent vers une même limite l

Correction :

1. Comme a et b sont strictement positifs et distincts, on a :

$$0 < \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \iff \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

2. Comme $a < b$ alors $a + b < 2b$ et $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2b}{2} = b$.

   De même $\sqrt{ab} > \sqrt{a^2} = |a| = a$.

   Remarque : On vient de montrer que pour $0 < a < b$, $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$ *i.e.* La moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique et toutes les deux entre a et b.
3. Là c'est un peu plus long. Exercice dur pour un oral d'ATS, je trouve. Je le fais par étape.
   (a) Par construction ou récurrence immédiate, il est clair que $0 < u_n$ et $0 < v_n$.
   (b) D'après la question précédente, par récurrence immédiate, il est clair que $a < u_n < v_n < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   En particulier, les deux suites sont bornées. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elles sont monotones pour avoir leur convergence.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < \frac{v_n + v_n}{2} < v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc (strictement) décroissante.

De même,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > \sqrt{u_n^2} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc (strictement) croissante.

(d) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones et bornées, elles convergent donc respectivement vers deux limites ℓ_u et ℓ_v.

Montrons que $\ell_u = \ell_v$.

Comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ par passage à la limite, on a

$$\ell_v = \frac{\ell_u + \ell_v}{2} \iff 2\ell_v = \ell_u + \ell_v \iff \ell_v = \ell_u.$$

Les suites convergent donc vers une même limite ℓ.

Remarque : Ce n'est pas demandé mais on pourrait montrer qu'elles sont aussi adjacentes :

On sait déjà que $v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$.

De plus,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$

Comme $0 < u_n < v_n$ et par croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \sqrt{u_n^2} = u_n$.

$$\leqslant \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Puis par récurrence,

$$\leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \frac{1}{2^n}(b-a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 *i.e.* les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.